Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 4

À renvoyer au plus tard le vendredi 15 février

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_5$ des réels tels que

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5|.$$

Montrer que ces cinq réels sont égaux.

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que, pour tout entier n,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1.$$

Montrer que la moyenne des n premiers termes de la suite et la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite sont distantes d'au plus $\frac{1}{2}$.

Exercice 3. Soit E un ensemble fini de réels strictement positifs tels que, pour tout réel x strictement positif, E contient autant d'éléments strictement supérieurs à x que d'éléments strictement inférieurs à $\frac{1}{x}$. Déterminer le produit de tous les éléments de E.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit $x, y, z > 0$ tels que $xyz = 8$. Montrer que

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1} \leqslant 0.$$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y,

$$f(xy) \leqslant xf(y).$$

Exercice 6. Soient un entier n et des réels $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ tels que

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \ldots + \frac{1}{u_n^2}.$$

Montrer que, pour tout entier k inférieur ou égal à n, il existe k réels parmi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dont la somme est supérieure ou égale à k.

Exercices Olympiques

Exercice 7. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 8. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que

$$x+y+z \geqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Montrer que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}.$$

Exercice 9. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a^2+b^2 > c^2, \qquad b^2+c^2 > a^2, \qquad c^2+a^2 > b^2.$$

Montrer que

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} + 2\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc} \geqslant 3.$$

Fin