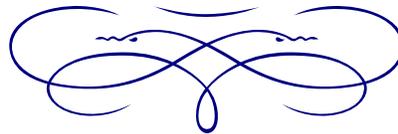


# *Olympiades Françaises de Mathématiques*

*2012-2013*

## *Envoi Numéro 4*

*À renvoyer au plus tard le vendredi 15 février*



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

-  - Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**. 
  - Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
  - Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1997 ou avant**.
- 
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
  - Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
  - Respecter la numérotation des exercices.
- 
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.
- 
- 

## Exercices Juniors

*Exercice 1.* Soient  $x_1, x_2, \dots, x_5$  des réels tels que

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5|.$$

Montrer que ces cinq réels sont égaux.



*Exercice 2.* Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels telle que, pour tout entier  $n$ ,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 1.$$

Montrer que la moyenne des  $n$  premiers termes de la suite et la moyenne des  $n + 1$  premiers termes de la suite sont distantes d'au plus  $\frac{1}{2}$ .



*Exercice 3.* Soit  $E$  un ensemble fini de réels strictement positifs tels que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $E$  contient autant d'éléments strictement supérieurs à  $x$  que d'éléments strictement inférieurs à  $\frac{1}{x}$ . Déterminer le produit de tous les éléments de  $E$ .



## Exercices Communs

*Exercice 4.* Soit  $x, y, z > 0$  tels que  $xyz = 8$ . Montrer que

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1} \leq 0.$$



*Exercice 5.* Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour tous  $x$  et  $y$ ,

$$f(xy) \leq xf(y).$$



*Exercice 6.* Soient un entier  $n$  et des réels  $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$  tels que

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2}.$$

Montrer que, pour tout entier  $k$  inférieur ou égal à  $n$ , il existe  $k$  réels parmi  $u_1, u_2, \dots, u_n$  dont la somme est supérieure ou égale à  $k$ .

## Exercices Olympiques

*Exercice 7.* Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$



*Exercice 8.* Soient  $x, y$  et  $z$  des réels strictement positifs tels que

$$x + y + z \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Montrer que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

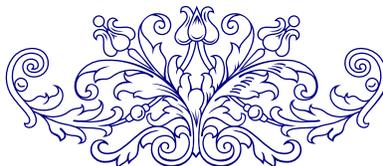


*Exercice 9.* Soient  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs tels que

$$a^2 + b^2 > c^2, \quad b^2 + c^2 > a^2, \quad c^2 + a^2 > b^2.$$

Montrer que

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} + 2 \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc} \geq 3.$$



*Fin*