Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 4 – Corrigé

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x_1, x_2,..., x_5 des réels tels que

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5|.$$

Montrer que ces cinq réels sont égaux.

Solution.
Notons $\alpha = |x_2 - x_1|$ et montrons par l'absurde que $\alpha = 0$. D'après l'énoncé, il existe des signes $\varepsilon_1, \ldots,$ ε_5 tels que

$$x_2 - x_1 = \varepsilon_1 \alpha,\ x_3 - x_2 = \varepsilon_2 \frac{\alpha}{2},\ x_4 - x_3 = \varepsilon_3 \frac{\alpha}{3},\ x_5 - x_4 = \varepsilon_4 \frac{\alpha}{4},\ x_1 - x_5 = \varepsilon_5 \frac{\alpha}{5}.$$

Alors, par télescopage,

$$0 = x_1 - x_5 + x_5 - x_4 + x_4 - x_3 + x_3 - x_2 + x_2 - x_1 = \varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_2 \frac{\alpha}{2} + \varepsilon_3 \frac{\alpha}{3} + \varepsilon_4 \frac{\alpha}{4} + \varepsilon_5 \frac{\alpha}{5}.$$

Si $\alpha \neq 0$, il existe donc des signes $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_4'$ tels que

$$\frac{1}{5} = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' \frac{1}{2} + \varepsilon_3' \frac{1}{3} + \varepsilon_4' \frac{1}{4},$$

donc un entier n tel que $\frac{1}{5} = \frac{n}{12}$ ce qui est impossible car 5 ne divise par 12.

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que, pour tout entier n,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1.$$

Montrer que la moyenne des n premiers termes de la suite et la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite sont distantes d'au plus $\frac{1}{2}$.

Solution.
Notons, pour tout entier n strictement positif $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n)$.
▷ Soit $m > n$. Remarquons tout d'abord que, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &\leqslant |u_m - u_{m-1}| + |u_{m-1} - u_{m-2}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leqslant m - n. \end{aligned}$$

▷ Pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - v_n| &= \left|\frac{(n+1)(u_1 + \ldots + u_n) - n(u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1})}{n(n+1)}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{(u_1 - u_{n+1}) + \ldots + (u_n - u_{n+1})}{n(n+1)}\right| \\ &\leqslant \frac{|u_1 - u_{n+1}| + \ldots + |u_n - u_{n+1}|}{n(n+1)} \\ &\leqslant \frac{n + \ldots + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit E un ensemble fini de réels strictement positifs tels que, pour tout réel x strictement positif, E contient autant d'éléments strictement supérieurs à x que d'éléments strictement inférieurs à $\frac{1}{x}$. Déterminer le produit de tous les éléments de E.

Solution.
Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 > 1$. Alors, par hypothèse,
- les ensembles $E \cap]-\infty, \frac{1}{x_0}[$ et $E \cap]x_0, +\infty[$ ont des cardinaux de même parité,
- les ensembles $E \cap]-\infty, x_0[$ et $E \cap]\frac{1}{x_0}, +\infty[$ ont des cardinaux de même parité.

Par conséquent, les deux ensembles

$$\begin{aligned} E \cap]\frac{1}{x_0}, x_0] &= \left(E \cap]\frac{1}{x_0}, +\infty[\right) \setminus (E \cap]x_0, +\infty[), \\ E \cap [\frac{1}{x_0}, x_0[&= (E \cap]-\infty, x_0[) \setminus \left(E \cap]-\infty, \frac{1}{x_0}[\right) \end{aligned}$$

ont des cardinaux de même parité. Or, ils sont composés des mêmes éléments, sauf éventuellement x_0 et $\frac{1}{x_0}$, le premier ensemble contient x_0 mais pas $\frac{1}{x_0}$: ainsi, le second ensemble contient un et un seul élément de $\{\frac{1}{x_0}, x_0\}$ mais ne peut contenir x_0 : il contient donc $\frac{1}{x_0}$.
On a ainsi établi que si $x_0 \in E$, alors $\frac{1}{x_0} \in E$. Le produit de tous les éléments de E donne donc 1.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit $x, y, z > 0$ tels que $xyz = 8$. Montrer que

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1} \leqslant 0.$$

Solution.
Commençons par remarquer que $a - 2 = a + 1 - 3$ pour tout réel a donc

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1} = 3 - 3\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right).$$

L'inégalité à établir se réécrit donc

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geqslant 1.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient

$$3 + 2(x+y+z) + xy + yz + zx \geqslant 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz,$$

soit

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant 2.$$

Or, cette dernière égalité est simplement l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y,

$$f(xy) \leqslant xf(y).$$

Solution.

▷ Avec $(x, y) = (0, 0)$, on obtient $f(0) \leqslant 0$ et avec $(x, y) = (2, 0)$, $f(0) \geqslant 0$. Par conséquent, $f(0) = 0$.

▷ Si $x > 0$ et $y > 0$, alors

$$f(x) = f(\frac{x}{y}y) \leqslant \frac{x}{y}f(y)$$

D'où

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(y)}{y}$$

et donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ (par symétrie des rôles de x et y).

▷ De même, si $x < 0$ et $y < 0$, alors

$$f(x) = f(\frac{x}{y}y) \leqslant \frac{x}{y}f(y)$$

D'où

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(y)}{y}$$

et donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ (par symétrie des rôles de x et y).

▷ Notons $\alpha = f(1)$ et $\beta = -f(-1)$ les constantes exhibées aux points précédents. Avec $(x, y) = (-1, -1)$, l'inéquation donne $\alpha = f((-1)^2) \leqslant -f(-1) = \beta$.

▷ On a obtenu qu'une solution est de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \alpha x & \text{si } x > 0, \\ \beta x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

avec $\alpha \leqslant \beta$. On vérifie que ces fonctions conviennent.

Exercice 6. Soient un entier n et des réels $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ tels que

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \ldots + \frac{1}{u_n^2}.$$

Montrer que, pour tout entier k inférieur ou égal à n, il existe k réels parmi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dont la somme est supérieure ou égale à k.

Solution.
▷ Commençons par montrer le résultat pour $k = n$. Notons $a = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$ et $g = (u_1 \ldots u_n)^{\frac{1}{n}}$ les moyennes arithmétique et géométrique de $u_1, \ldots, u_n$. Alors, l'inégalité classique entre moyenne arithmétique-géométrique-harmonique donne

$$a = \frac{\frac{1}{u_1^2} + \ldots + \frac{1}{u_n^2}}{n} \geqslant \frac{1}{g^2} \geqslant \frac{1}{a^2}.$$

Ainsi, $a \geqslant 1$ et, donc, $u_1 + \ldots + u_n \geqslant n$.
▷ Soit $k < n$. Supposons que $u_1 + \ldots + u_k < k$, $u_2 + \ldots + u_{k+1} < k$, $\ldots$, $u_n + \ldots + u_{k-1} < k$. Alors, en additionnant toutes ces inégalités, on obtient

$$n(u_1 + \ldots + u_n) < nk,$$

ce qui contredit le point précédent. Ainsi, l'une des sommes $u_1 + \ldots + u_k$, $u_2 + \ldots + u_{k+1}$, $\ldots$, $u_n + \ldots + u_{k-1}$ est supérieure ou égale à k.

Exercices Olympiques

Exercice 7. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Solution.
Soit f une solution.
▷ Commençons par remarquer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ est aussi une solution de l'équation fonctionnelle.
▷ Pour tous réels x et y,

$$g(x+y) = g\left(\frac{3x+3y}{3}\right) = \frac{g(3x)+g(3y)}{2}.$$

Or, pour tout réel a,

$$g(3a) = 2.\frac{g(3a)+g(0)}{2} = 2g\left(\frac{3a+0}{3}\right) = 2g(a).$$

En conclusion, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
▷ On a montré que, pour tout x, $g(2x) = 2g(x)$. Or, l'équation fonctionnelle avec $y = 2x$ donne

$$g\left(\frac{x+2x}{3}\right) = \frac{g(x)+g(2x)}{2},$$

soit $g(2x) = g(x)$. En combinant ces deux résultats, on obtient que g est nulle donc f est constante. La réciproque est évidente.

Exercice 8. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que

$$x+y+z \geqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Montrer que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}.$$

Solution.
En mettant au même dénominateur, l'inégalité recherchée se réécrit

$$x^2z+y^2x+z^2y \geqslant x+y+z.$$

Montrons celle-ci en utilisant successivement l'hypothèse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} x+y+z &\leqslant \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \\ &\leqslant \frac{\left(x\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}+y\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+z\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \\ &\leqslant x^2z+y^2x+z^2y. \end{aligned}$$

Exercice 9. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a^2+b^2>c^2, \qquad b^2+c^2>a^2, \qquad c^2+a^2>b^2.$$

Montrer que

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}+2\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}\geqslant 3.$$

Solution.
Notons

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} \\ B &= \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}. \end{aligned}$$

On doit montrer que $A+2B\geqslant 3$. Tout d'abord, on remarque que $a+b>c$ car $c^2<a^2+b^2<(a+b)^2$. On a de même $b+c>a$ et $c+a>b$, donc a,b,c sont les côtés d'un triangle dont on notera α,β,γ les angles. Le fait que $a^2+b^2>c^2$, etc. signifie que le triangle est acutangle.
D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $\frac{A+2B}{3}\geqslant\sqrt[3]{AB^2}$, donc il suffit de montrer que $AB^2\geqslant 1$, autrement dit que

$$\frac{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}\geqslant 1.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos\alpha.$$

D'autre part,

$$(c+a-b)(b+c-a)=c^2-a^2-b^2+2ab=2ab(1-\cos\alpha)$$

donc $\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$. En multipliant par les deux expressions similaires, l'inégalité à démontrer devient

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\geqslant 1.$$

Traitons d'abord le cas particulier $\alpha=\beta$. Alors $\gamma=\pi-2\alpha$. Comme $\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$, on a $\alpha\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.
Comme $\frac{1-\cos\gamma}{\cos\gamma}=\frac{1+\cos 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} &= \frac{(1-\cos\alpha)^2(2\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1-2\cos^2\alpha)} \\ &= \frac{2(1-\cos\alpha)^2}{1-2\cos^2\alpha}. \end{aligned}$$

Cette expression est minorée par 1 si et seulement si $2(1-\cos\alpha)^2\geqslant 1-2\cos^2\alpha$. On développe et on passe tout dans le membre de gauche. L'inégalité devient $(2\cos\alpha-1)^2\geqslant 0$, ce qui est vrai.

Traitons maintenant le cas général. On suppose par symétrie que $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$.

Posons $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$ et $g(x) = \log f(x)$. On veut montrer que

$$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \geqslant 1,$$

ou encore que $\dfrac{g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)}{3} \geqslant 0 = g(\frac{\pi}{3}) = g\Big(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Big)$. La difficulté est que g n'est pas convexe. En effet, on calcule que

$$g''(x) = \frac{(1-\cos x)(-\cos^2 x - \cos x + 1)}{\cos^2 x(1-\cos x)^2}$$

est positif sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$ et négatif sur $[0, x_0]$, où x_0 satisfait l'équation $\cos x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On remarque que $x_0 < \dfrac{\pi}{3}$ puisque $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\alpha \geqslant x_0$. En effet, dans le cas contraire on aurait $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 3\alpha \leqslant 3x_0 < \pi$, ce qui est faux.

<u>Premier cas :</u> $\beta \geqslant x_0$. Alors $g(\alpha)+g(\beta) \geqslant 2g\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)$ par convexité de g sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$ donc on se ramène au cas particulier $\alpha = \beta$ traité plus haut.

<u>Deuxième cas :</u> $\beta < x_0$. Notons que $\gamma > x_0 - \beta$. En effet, dans le cas contraire on aurait $\alpha+\beta+\gamma \leqslant \frac{\pi}{2} + \beta + (x_0 - \beta) = \frac{\pi}{2} + x_0 < \pi$, ce qui est faux.
Posons $\varphi(t) = g(\beta+t) + g(\gamma-t)$. Pour tout $t \in [0, x_0-\beta]$, on a

$$\varphi'(t) = g'(\beta+t) - g'(\gamma-t) \leqslant 0$$

puisque $0 < \gamma - t \leqslant \beta + t \leqslant x_0$. Donc $\varphi(0) \geqslant \varphi(x_0-\beta)$, ce qui s'écrit $g(\beta)+g(\gamma) \geqslant g(\beta')+g(\gamma')$ où $\beta' = x_0$ et $\gamma' = \gamma - (x_0 - \beta)$. On est ainsi ramenés au premier cas.

Fin