Olympiades Françaises de Mathématiques
2012-2013

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le mardi 15 janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. On appelle diviseur propre d'un entier n un diviseur positif de n qui est différent de 1 et de n.
Existe-t-il un entier n dont le produit des diviseurs propres est égal à 2013 ?

Exercice 2. Chaque nombre rationnel strictement positif est colorié soit en rouge, soit en noir, de telle sorte que :
- les nombres x et $x+1$ sont de couleurs différentes ;
- les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur ;
- le nombre 1 est colorié en rouge.

Quelle est la couleur de $\frac{2012}{2013}$?
(On ne demande pas de démontrer l'existence d'un tel coloriage.)

Exercice 3. La suite de Fibonacci est construite ainsi : chaque terme est la somme des deux précédents. Ses premiers termes valent :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Montrer que la suite de Fibonacci contient un multiple de 1000.

Exercice 4. Montrer que l'équation

$$x(x+2) = y(y+1)$$

n'a pas de solution en nombres entiers strictement positifs.

Exercices Communs

Exercice 5. Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que $5^m + 5^n$ s'écrit comme une somme de deux carrés si et seulement si n et m ont même parité.

Exercice 6. Existe-t-il des nombres rationnels positifs ou nuls x, y et z tels que :

$$x^5 + 2y^5 + 5z^5 = 11.$$

Exercices Olympiques

Exercice 7. Prouver qu'il existe une unique manière de colorier chaque nombre rationnel strictement positif soit en rouge, soit en bleu, de sorte que :

– les nombres x et $x+1$ sont de couleurs différentes ;
– les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur ;
– le nombre 1 est colorié en rouge.

Exercice 8. Trouver tous les entiers naturels $k > 0$ tels que l'équation en x et y :

$$x(x+k) = y(y+1)$$

ait une solution en entiers strictement positifs.

Exercice 9. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer que 1 et 5 sont les seuls diviseurs positifs de $2^p + 3^p$ qui soient inférieurs ou égaux à p.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 5$ un entier. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers dans $\{1, \ldots, 2n\}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe des indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ tels que

$$\text{PPCM}(a_i, a_j) \leqslant 6\left(E\left(\tfrac{n}{2}\right) + 1\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x.

Fin