# *Olympiades Françaises de Mathématiques*

# *2012-2013*

## *Envoi Numéro 3 – Corrigé*

# Exercices Juniors

*Exercice 1.* On appelle diviseur propre d'un entier $n$ un diviseur positif de $n$ qui est différent de $1$ et de $n$.

Existe-t-il un entier $n$ dont le produit des diviseurs propres est égal à $2013$ ?

*Solution.*

La décomposition en facteurs premiers de $2013$ est $3 \times 11 \times 61$. Ainsi, si le produit des diviseurs stricts d'un entier $n$ vaut $2013$, cela implique que $n$ est lui même divisible par $3$, $11$ et $61$. Or, dans ce cas, il compte parmi ses diviseurs stricts au moins les nombres suivants :

$$3,\ 11,\ 61,\ 33,\ 671$$

dont le produit surpasse $2013$ (il vaut $2013 \times 33 \times 671 = 44\,573\,859$). Ainsi, un tel entier $n$ n'existe pas.

*Exercice 2.* Chaque nombre rationnel strictement positif est colorié soit en rouge, soit en noir, de telle sorte que :

– les nombres $x$ et $x+1$ sont de couleurs différentes ;
– les nombres $x$ et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur ;
– le nombre $1$ est colorié en rouge.

Quelle est la couleur de $\frac{2012}{2013}$ ?

(On ne demande pas de démontrer l'existence d'un tel coloriage.)

*Solution.*

On remarque que $\frac{2012}{2013}$ s'écrit :

$$\frac{2012}{2013} = \frac{1}{1+\frac{1}{2012}}.$$

Ainsi, d'après les règles de l'énoncé, il a la couleur inverse de $2012$. Or, ce dernier s'obtient en ajoutant $2011$ fois $1$ à $1$ ; il a donc la couleur inverse de $1$ (puisqu'on inverse $2011$ fois la couleur), c'est-à-dire noir. Ainsi $\frac{2012}{2013}$ est rouge.

*Exercice 3.* La suite de Fibonacci est construite ainsi : chaque terme est la somme des deux précédents. Ses premiers termes valent :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Montrer que la suite de Fibonacci contient un multiple de $1000$.

*Solution.*

Notons $F_n$ le $n$-ième terme de la suite de Fibonacci ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, etc.) et notons $u_n$ le reste de la division euclidienne de $F_n$ par $1000$ ($u_n$ est donc le nombre formé par les trois derniers chiffres de $F_n$). Comme il n'y a qu'un nombre fini de couples $(x, y)$ d'entiers compris entre $0$ et $999$ (il y en a exactement $1000^2 = 1\,000\,000$), il existe des entiers $n$ et $N$ tels que $N > 0$ et

$$u_n = u_{n+N} \quad ; \quad u_{n+1} = u_{n+1+N}. \tag{1}$$

Or, $u_{n-1}$ (resp. $u_{n-1+N}$) s'obtient à partir de $u_n$ et $u_{n+1}$ (resp. $u_{n+N}$ et $u_{n+1+N}$) comme le reste de la division euclidienne de $u_{n+1} - u_n$ (resp. $u_{n+1+N} - u_{n+N}$) par $1000$. Ainsi, des égalités (1), on déduit que $u_{n-1} = u_{n-1+N}$. En continuant ainsi, on obtient $u_{N+1} = u_1 = 1$ et $u_{N+2} = u_2 = 1$, d'où il résulte enfin $u_N = 0$. L'entier $F_N$ est donc multiple de $1000$.

*Exercice 4.* Montrer que l'équation

$$x(x+2) = y(y+1)$$

n'a pas de solution en nombres entiers strictement positifs.

*Solution.*

Si le couple $(x, y)$ est solution, on a $x(x+1) < x(x+2) = y(y+1)$ et donc $x < y$. Mais de même, en supposant toujours $(x, y)$ solution, on peut écrire $(x+1)(x+2) > x(x+2) = y(y+1)$, d'où on déduit $x+1 > y$. Ainsi, une solution $(x, y)$ hypothétique devrait donc vérifier $x < y < x+1$, ce qui ne peut se produire. On en déduit que l'équation proposée n'a pas de solution en nombres entiers strictement positifs.

## Exercices Communs

*Exercice 5.* Soient $n$ et $m$ deux entiers strictement positifs. Montrer que $5^m + 5^n$ s'écrit comme une somme de deux carrés si et seulement si $n$ et $m$ ont même parité.

*Solution.*

Supposons pour commencer que $n$ et $m$ n'ont pas même parité. On étudie alors la quantité $5^n + 5^m$ modulo $8$. Par récurrence, on démontre facilement que $5^k$ est congru à $1$ (resp. $5$) modulo $8$ si $k$ est pair (resp. impair). Ainsi, d'après notre hypothèse, on a toujours $5^n + 5^m \equiv 6 \pmod 8$. Or, par ailleurs, un carré est toujours congru à $0$, $1$ ou $4$ modulo $8$. Comme il n'y a aucune manière d'écrire $6$ comme somme de deux de ces trois nombres, on en déduit que $5^n + 5^m$ ne peut s'écrire comme somme de deux carrés.

Supposons maintenant que $n$ et $m$ ont même parité. Quitte à échanger $n$ et $m$, on peut supposer en outre que $m \geqslant n$. Ainsi, il existe un entier $k$ positif ou nul tel que $m = n + 2k$. On a alors $5^m + 5^n = 5^n(5^{2k} + 1)$. Comme, manifestement $5 = 2^2 + 1^2$ et $5^{2k} + 1$ s'écrivent comme sommes de deux carrés, il suffit pour conclure de montrer que, si $x$ et $y$ s'écrivent comme somme de deux carrés, alors il en va de même du produit $xy$. Ceci résulte directement de la formule :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2.$$

*Exercice 6.* Existe-t-il des nombres rationnels positifs ou nuls $x$, $y$ et $z$ tels que :

$$x^5 + 2y^5 + 5z^5 = 11.$$

*Solution.*

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de tels rationnels $x$, $y$, $z$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il en existe. Soit $d$ le plus petit dénominateur commun de $x$, $y$ et $z$. On peut alors écrire $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$ et $z = \frac{c}{d}$ pour certains entiers $a$, $b$ et $c$. L'équation que l'on cherche à résoudre devient alors :

$$a^5 + 2b^5 + 5c^5 = 11d^5.$$

Étudions cette équation modulo $11$. Une recherche exhaustive (ou l'utilisation du petit théorème de Fermat) montre qu'une puissance $5$-ième est congrue à $0$, $1$ ou $-1$ modulo $11$. On en déduit que la congruence $a^5 + 2b^5 + 5c^5 \equiv 0 \pmod{11}$ implique que $a$, $b$ et $c$ sont tous les trois multiples de $11$. Ainsi, $a^5 + 2b^5 + 5c^5$ est divisible par $11^5$, d'où on déduit que $d$ est lui aussi divisible par $11$. Les fractions $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ et $\frac{c}{d}$ peuvent donc, toutes les trois, être simplifiées par $11$. Ceci contredit la minimalité de $d$ et termine la démonstration.

# Exercices Olympiques

*Exercice 7.* Prouver qu'il existe une unique manière de colorier chaque nombre rationnel strictement positif soit en rouge, soit en bleu, de sorte que :

- les nombres $x$ et $x+1$ sont de couleurs différentes ;
- les nombres $x$ et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur ;
- le nombre $1$ est colorié en rouge.

*Solution.*

Montrons tout d'abord qu'un tel coloriage est nécessairement unique. Pour cela, nous allons démontrer par récurrence sur $\max(a, b)$ que la couleur de la fraction $\frac{a}{b}$ (supposée écrite sous forme irréductible) est entièrement déterminée. La conclusion est vraie lorsque $\max(a, b) = 1$ puisque cela impose $a = b = 1$ et que l'on sait, par hypothèse, que la couleur de $1$ est rouge. Considérons maintenant une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ et supposons que l'on ait déjà démontré que la couleur de toute fraction irréductible $\frac{a'}{b'}$ avec $\max(a', b') < \max(a, b)$ soit déterminée. Quitte à remplacer $\frac{a}{b}$ par son inverse $\frac{b}{a}$ (ce qui ne modifie ni $\max(a, b)$, ni la couleur de la fraction), on peut supposer que $a > b$. Par hypothèse, $\frac{a}{b}$ a la couleur inverse de $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$. De plus, $\max(a - b, b) < \max(a, b) = a$. Ainsi, la fraction $\frac{a-b}{b}$ relève de l'hypothèse de récurrence ; sa couleur est donc entièrement déterminée et, par suite, celle de $\frac{a}{b}$ l'est également.

L'existence se démontre de la même façon : en reprenant les arguments précédents, on construit le coloriage par récurrence sur $\max(a, b)$ en vérifiant que chaque identité entre couleurs est utilisée une et une seule fois lorsqu'on construit le coloriage avec cette méthode.

*Remarque.* Si $a$ et $b$ sont deux entiers premiers entre eux, notons $q_1(a, b), \dots, q_n(a, b)$ la suite (finie) des quotients successifs obtenus lorsque l'on effectue l'algorithme d'Euclide à partir de $a$ et $b$. On peut alors montrer que l'unique coloriage satisfaisant aux conditions de l'énoncé est celui qui attribue la couleur rouge (resp. bleue) à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ lorsque $\sum_i q_i(a, b)$ est impair (resp. pair).

*Exercice 8.* Trouver tous les entiers naturels $k > 0$ tels que l'équation en $x$ et $y$ :

$$x(x+k) = y(y+1)$$

ait une solution en entiers strictement positifs.

*Solution.*

L'équation de l'énoncé s'écrit encore $(x+\frac{k}{2})^2 = (y+\frac{1}{2})^2 + \frac{k^2-1}{4}$, soit, en factorisant :

$$\left(x - y + \frac{k-1}{2}\right) \cdot \left(x + y + \frac{k+1}{2}\right) = \frac{k^2-1}{4}. \qquad (2)$$

Distinguons deux cas selon la parité de $k$. Si $k$ est impair, on écrit $k = 2a+1$ et l'équation précédente devient $(x-y+a)(x+y+a+1) = a(a+1)$. En écrivant que le premier facteur vaut $1$ et le second $a(a+1)$, on obtient $x = \frac{a(a-1)}{2}$ et $y = x + (a-1) = \frac{(a-1)(a+2)}{2}$. Étant donné que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair, les valeurs que l'on vient d'obtenir forment une solution dès que $a > 1$. Pour $a = 1$ (*i.e.* $k = 3$), au contraire, il n'y a pas de solution, car l'égalité $(x-y+1)(x+y+2) = 2$ ne peut être satisfaite étant donné que le deuxième facteur est toujours $> 2$ lorsque $x$ et $y$ sont strictement positifs. Pour $a = 0$, enfin, on a $k = 1$ et, clairement, tous les couples $(x, y)$ conviennent.

On raisonne de manière analogue dans le cas où $k$ est pair. On pose $k = 2a$ et l'équation (2) devient $(2x - 2y + 2a - 1)(2x + 2y + 2a + 1) = 4a^2 - 1$. Comme précédemment, en demandant que le premier facteur vaille $1$, on obtient un système en $x$ et $y$ dont les solutions sont $x = a(a-1)$ et $y = (a+1)(a-1)$. Cette solution est acceptable dès que $a > 1$. Pour $a = 1$, l'équation à résoudre devient $(2x - 2y + 1)(2x + 2y + 3) = 3$ et elle n'a pas de solution avec $x, y > 0$ étant donné que cette dernière condition implique que le deuxième facteur est $> 3$.

En résumé, les entiers $k$ convenables sont $k = 1$ et tous les entiers $k \geqslant 4$.

*Exercice 9.* Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer que $1$ et $5$ sont les seuls diviseurs positifs de $2^p + 3^p$ qui soient inférieurs ou égaux à $p$.

*Solution.*

La factorisation

$$2^p + 3^p = 5 \cdot \sum_{i=0}^{p-1} 2^i (-3)^{p-1-i} \tag{3}$$

montre que $5$ est bien un diviseur de $2^p + 3^p$.

Soit à présent $d \in \{2, \dots, p\}$ un diviseur de $2^p + 3^p$. On souhaite démontrer que $d = 5$. On considère pour cela $q$ un diviseur premier de $d$. Alors, manifestement, $q$ est aussi un diviseur de $2^p + 3^p$ qui est $\leqslant p$. De plus, il est clair que l'on ne peut pas avoir $q = 2$. Ainsi $q$ est impair et de la congruence $2^p + 3^p \equiv 0 \pmod q$, on déduit que $a^p \equiv 1 \pmod q$ où $a$ un entier est tel que $2a \equiv -3 \pmod q$ (un tel entier existe bien car $q$ est impair). Par ailleurs, par le petit théorème de Fermat, on sait également que $a^q \equiv a \pmod q$ et donc $a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ (puisque $a$ n'est pas un multiple de $q$). On en déduit que $a^n \equiv 1 \pmod q$ avec $n = \text{PGCD}(p, q-1)$. Or, comme $q < p$ et $p$ est un premier, les entiers $p$ et $q - 1$ sont nécessairement premiers entre eux. Autrement dit $n = 1$ et, par suite, $a \equiv 1 \pmod q$. En revenant à la définition de $a$, on obtient $2 \equiv -3 \pmod q$, ce qui ne peut se produire que pour $q = 5$.

On a ainsi démontré que l'unique diviseur premier de $d$ est $5$. Il suffit donc pour conclure de démontrer que $d$ n'est pas divisible par $25$. Cela est évident si $p \leqslant 25$. Supposant maintenant $p > 25$, nous allons démontrer que $2^p + 3^p$ n'est, lui-même, pas divisible par $25$ (ce qui suffira à conclure). D'après l'équation (3), cela revient à prouver que $\sum_{i=0}^{p-1} 2^i (-3)^{p-1-i}$ n'est pas divisible par $5$. Or, un calcul modulo $5$ montre que cette somme est congrue modulo $5$ à

$$(-3)^{p-1} \cdot \sum_{i=0}^{p-1} 1 = (-3)^{p-1} \cdot p.$$

Or, $(-3)^{p-1}$ est premier avec $5$ et, comme $p > 25$ est un nombre premier, les entiers $p$ et $5$ sont premiers entre eux. On a ainsi bien démontré ce que l'on souhaitait.

*Exercice 10.* Soit $n \geqslant 5$ un entier. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers dans $\{1, \dots, 2n\}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe des indices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$ tels que

$$\text{PPCM}(a_i, a_j) \leqslant 6\big(E(\tfrac{n}{2}) + 1\big)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre $x$.

*Solution.*

Supposons, pour commencer, qu'il existe un indice $i$ tel que $a_i \leqslant n$. S'il existe $j$ tel que $a_j = 2a_i$, on a alors

$$\text{PPCM}(a_i, a_j) = a_j \leqslant 2n \leqslant 6 \cdot \big(E(\tfrac{n}{2}) + 1\big)$$

et on a trouvé un couple $(i, j)$ convenable. Si, au contraire, l'entier $2a_i$ n'apparaît pas parmi les $a_j$, définissons les entiers $b_1, \dots, b_n$ en posant $b_i = 2a_i$ et $b_j = a_j$ pour $j \neq i$. Les $b_j$ sont encore deux à deux distincts et compris entre $1$ et $2n$. De plus, on vérifie immédiatement que $\text{PPCM}(b_i, b_j) \geqslant \text{PPCM}(a_i, a_j)$. Ainsi, il suffit de démontrer la propriété de l'énoncé pour la suite des $b_j$.

En appliquant à nouveau le raisonnement précédent — éventuellement plusieurs fois — on en vient à supposer que tous les $a_j$ sont strictement supérieurs à $n$. Autrement dit, l'ensemble des $a_j$ n'est autre que $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. Posons $k = E(\frac{n}{2}) + 1$. Comme on a supposé $n \geqslant 5$, il est facile de vérifier que l'un des $a_j$ vaut $2k$ et un autre vaut $3k$. On conclut en remarquant que le PPCM de ces deux nombres est égal à $6k$.

*Fin*