Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 2

À renvoyer au plus tard le vendredi 14 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « junior » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Peut-on numéroter les arêtes d'un cube de 1 à 12 en sorte que la somme des nombres sur les arêtes entrant dans un sommet du cube soit la même pour tous les sommets ?

Exercice 2. Les sept dixièmes de la surface de la Terre sont couverts par l'océan. Montrer qu'il existe un diamètre de la Terre dont les deux extrémités baignent dans l'océan.

Exercice 3. Trouver cent entiers positifs distincts $n_1, \ldots, n_{100}$ tels que

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_{100}}.$$

Exercices Communs

Exercice 4. Ruby a effectué une série de mouvements avec son Rubik's cube. (Par exemple, elle peut tourner la face du haut dans le sens des aiguilles d'une montre, puis la face de fond de 180 degrés, puis la face de droite dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ou n'importe quelle autre série de rotations de faces.) Ensuite elle répète inlassablement la même série de mouvements. Montrer qu'au bout d'un certain nombre de répétitions elle retrouvera la configuration de départ.

Exercice 5. Devant l'entrée de la grotte aux trésors se trouve un tonneau avec quatre trous indistinguables disposés aux sommets d'un carré sur le couvercle. À l'intérieur de chaque trou se trouve un hareng qui peut être placé soit la tête en bas soit la tête en haut. En insérant les mains dans deux trous Ali-Baba peut déterminer la position des deux harengs qui s'y trouvent. Il peut également en retourner un ou deux comme il le souhaite ou n'en retourner aucun. La porte de la grotte s'ouvre lorsque les quatre harengs sont soit tous la tête en bas soit tous la tête en haut. Le problème c'est que lorsque Ali-Baba sort ses mains des trous le tonneau commence à tourner sur lui-même à une grande vitesse, si bien que, lorsqu'il s'arrête de nouveau, il est impossible pour Ali-Baba de savoir dans quels trous il avait mis les mains la fois précédente. Aidez Ali-Baba à ouvrir la grotte en un nombre fini d'opérations.

Exercice 6. Trois sauterelles se trouvent aux points $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ d'une feuille quadrillée. Chaque minute une sauterelle saute sur un autre point de la grille d'une telle façon que son saut soit parallèle à la droite passant par les deux autres sauterelles. Est-il possible qu'au bout d'un certain temps les sauterelles se retrouvent aux points $(-1, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$?

Exercices Olympiques

Exercice 7. Chacun des 400 députés d'un parlement a giflé exactement un autre député. Montrer qu'on peut créer une commission parlementaire de 134 députés telle qu'aucun membre de la commission n'ait giflé aucun autre membre.

Exercice 8. Un digicode s'ouvre dès qu'on fait l'unique combinaison correcte de 4 chiffres (qui peut éventuellement contenir des répétitions). Par exemple, si l'on tape la suite des chiffres 000125 le digicode s'ouvrira si le code est soit 0001, soit 0012, soit 0125. Petit Pierre ne connaît pas le code. Combien de chiffres au minimum doit-il taper pour ouvrir le digicode à coup sûr ?

Exercice 9. On dispose de 500 emplacements à billes numérotés de 1 à 500 de gauche à droite. Des billes numérotées de 1 à 500 sont posées dans ces emplacements dans le désordre : leurs numéros ne coïncident pas nécessairement avec les numéros des emplacements. (Dans chaque emplacement il y a exactement une bille.) On dit que l'ordre des billes est plutôt croissant si la plus longue sous-suite décroissante des numéros des billes qu'on peut extraire de cet ordre ne dépasse pas 5 éléments. Montrer qu'il existe au plus 5^{1000} ordres plutôt croissants.

Fin