Olympiades Françaises de Mathématiques
2012-2013

Envoi Numéro 2 – Corrigé

Exercices Juniors

Exercice 1. Peut-on numéroter les arêtes d'un cube de 1 à 12 en sorte que la somme des nombres sur les arêtes entrant dans un sommet du cube soit la même pour tous les sommets ?

Solution.

Nous allons prouver par l'absurde que la réponse à la question est négative.

Supposons qu'une telle numérotation existe et notons k la somme dans chaque sommet. Sur chaque arête, écrivons son numéro deux fois : une fois à un bout de l'arête et l'autre fois à l'autre bout. Maintenant, calculons la somme des numéros ainsi écrits de deux manières différentes.

Première manière : on additionne les numéros arête par arête. On trouve alors $2(1+2+\cdots+12)$, car chaque numéro de 1 à 12 est écrit deux fois.

Deuxième manière : on additionne les numéros sommet par sommet. Par hypothèse, la somme vaut k dans chaque sommet. Au total, on trouve donc $8k$.

Conclusion :

$$8k = 2(1+2+\ldots+12) = 12 \times 13 = 4 \times 39$$

d'où k = 39/2, ce qui est impossible. ■

Exercice 2. Les sept dixièmes de la surface de la Terre sont couverts par l'océan. Montrer qu'il existe un diamètre de la Terre dont les deux extrémités baignent dans l'océan.

Solution. Soit S la surface couverte par l'océan et S' son symétrique par rapport au centre de la Terre. Si les surfaces S et S' étaient disjointes, elles occuperaient ensemble les $14/10$ de la surface de la Terre, ce qui est impossible, car $14/10 > 1$. Donc S et S' ont au moins un point d'intersection, qu'on appellera P. Soit P' le symétrique de P par rapport au centre de la Terre. On a donc $P \in S$ et $P \in S'$, autrement dit $P \in S$ et $P' \in S$. Par conséquent, les deux bouts du diamètre PP' baignent dans l'océan. ■

Exercice 3. Trouver cent entiers positifs distincts $n_1, ..., n_{100}$ tels que

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_{100}}.$$

Solution. Nous montrerons par récurrence la propriété suivante :

Pour tout entier $k \geqslant 3$ on peut trouver k entiers positifs $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tels que

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

et que n_k soit pair.

Pour $k = 3$, il suffit de prendre $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 6$. On a bien

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

et 6 est bien pair.

Pour passer de k à $k+1$, nous allons garder tels quels les nombres $n_1, \ldots, n_{k-1}$ et remplacer n_k par $n'_k = 3n_k/2$ (qui est entier car n_k est pair) et $n'_{k+1} = 3n_k$ (qui est pair car n_k l'est). Les nombres

$$n_1, \ldots, n_{k-1}, \frac{3n_k}{2}, 3n_k$$

sont toujours rangés dans l'ordre croissant ; le nombre le plus grand est toujours pair ; et la somme des inverses n'a pas changé car

$$\frac{1}{n'_k} + \frac{1}{n'_{k+1}} = \frac{2}{3n_k} + \frac{1}{3n_k} = \frac{3}{3n_k} = \frac{1}{n_k}.$$

Ainsi, si la propriété est vraie pour k, elle est aussi vraie pour $k+1$.

Maintenant, en prenant $k = 100$, nous obtenons l'affirmation demandée par l'exercice. ■

Exercices Communs

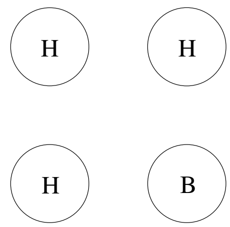
Exercice 4. Ruby a effectué une série de mouvements avec son Rubik's cube. (Par exemple, elle peut tourner la face du haut dans le sens des aiguilles d'une montre, puis la face de fond de 180 degrés, puis la face de droite dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ou n'importe quelle autre série de rotations de faces.) Ensuite elle répète inlassablement la même série de mouvements. Montrer qu'au bout d'un certain nombre de répétitions elle retrouvera la configuration de départ.

Solution. Notons x_0 la configuration de départ et x_n la configuration après n répétitions de la série de Ruby. Comme le nombre total de configurations d'un Rubik's cube est fini, à un moment une configuration va se répéter : $x_n = x_m$ avec $n < m$. Demandons maintenant à Ruby d'inverser sa série de mouvements, autrement dit d'exécuter les rotations dans l'ordre inverse et dans le sens inverse par rapport à sa série de mouvements initiale. En appliquant cette série inversée à la configuration x_n nous obtenons x_{n-1}. De même, en l'appliquant à x_m nous obtenons x_{m-1}. Comme $x_n = x_m$, on en déduit que $x_{n-1} = x_{m-1}$. En continuant à appliquer la série inversée, nous allons arriver au bout de n répétitions à l'égalité $x_0 = x_{m-n}$.

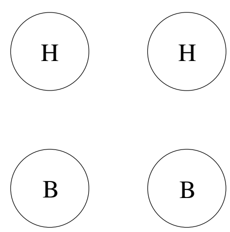
Nous avons donc prouvé que la configuration de départ réapparaîtra au bout $m - n$ répétitions de la série de Ruby. ■

Exercice 5. Devant l'entrée de la grotte aux trésors se trouve un tonneau avec quatre trous indistinguables disposés aux sommets d'un carré sur le couvercle. À l'intérieur de chaque trou se trouve un hareng qui peut être placé soit la tête en bas soit la tête en haut. En insérant les mains dans deux trous Ali-Baba peut déterminer la position des deux harengs qui s'y trouvent. Il peut également en retourner un ou deux comme il le souhaite ou n'en retourner aucun. La porte de la grotte s'ouvre lorsque les quatre harengs sont soit tous la tête en bas soit tous la tête en haut. Le problème c'est que lorsque Ali-Baba sort ses mains des trous le tonneau commence à tourner sur lui-même à une grande vitesse, si bien que, lorsqu'il s'arrête de nouveau, il est impossible pour Ali-Baba de savoir dans quels trous il avait mis les mains la fois précédente. Aidez Ali-Baba à ouvrir la grotte en un nombre fini d'opérations.

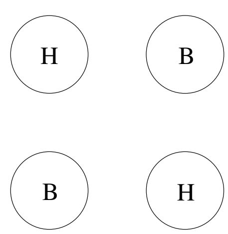
Solution. En insérant les mains d'abord dans deux trous adjacents, puis dans deux trous en diagonale, on peut placer 3 harengs sur 4 la tête en haut. Si la porte ne s'ouvre pas, cela veut dire que le dernier hareng est placé la tête en bas.



Insérons maintenant les mains en diagonale. Si l'on trouve un hareng la tête en bas, on le retourne et c'est gagné. Sinon, on retourne un des harengs au hasard pour obtenir deux harengs adjacents la tête en bas et deux autres adjacents la tête en haut.



Insérons maintenant les mains dans deux trous adjacents et retournons les deux harengs. Soit la porte s'ouvre, soit les harengs sont maintenant en alternance.



Il suffit alors d'insérer les mains en diagonale une dernière fois et de retourner les deux harengs pour qu'ils soient tous placés de la même manière. ■

Exercice 6. Trois sauterelles se trouvent aux points $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ d'une feuille quadrillée. Chaque minute une sauterelle saute sur un autre point de la grille d'une telle façon que son saut soit parallèle à la droite passant par les deux autres sauterelles. Est-il possible qu'au bout d'un certain temps les sauterelles se retrouvent aux points $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$?

Solution. Si AB et CD sont deux droites parallèles, alors l'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABD, car ces deux triangles ont la même base $[AB]$ et la même hauteur. Il découle de cette remarque que l'aire du triangle formé par les trois sauterelles ne change pas lors de leurs sauts. Or l'aire du triangle de départ vaut $1/2$, tandis que celle du triangle qu'on souhaite obtenir à la fin vaut 1. Il est donc impossible de passer de l'un à l'autre. ■

Exercices Olympiques

Exercice 7. Chacun des 400 députés d'un parlement a giflé exactement un autre député. Montrer qu'on peut créer une commission parlementaire de 134 députés telle qu'aucun membre de la commission n'ait giflé aucun autre membre.

Solution. Appellons deux députés *ennemis* si l'un d'eux a giflé l'autre. Nous allons résoudre par récurrence un exercice plus général :

Dans un parlement d'au moins $3n - 2$ députés, chaque député a giflé 0 ou 1 autre député. Il est alors toujours possible de créer une commission parlementaire de n députés qui ne contienne aucun couple ennemi.

Pour $n = 1$ la propriété est évidente : on peut toujours former une commission à un député car un député n'est jamais son propre ennemi.

Montrons maintenant comment passer de n à $n + 1$. Considérons un parlement avec au moins

$$3(n + 1) - 2 = 3n + 1$$

députés. Comme le nombre total de gifles est inférieur ou égal au nombre de députés, il existe, par le principe des tiroirs, un député qui a été giflé au plus une fois et qui a donc au plus deux ennemis. Mettons ce député dans la commission d'office et écartons son ou ses deux ennemis. Il nous reste au moins 3n-2 députés parmi lesquels il n'y a aucun ennemi du député selectionné. Par hypothèse de récurrence, on peut compléter la commission en choisissant encore n députés parmi ceux qui restent sans qu'il y ait aucun couple ennemi parmi eux. ∎

Exercice 8. Un digicode s'ouvre dès qu'on fait l'unique combinaison correcte de 4 chiffres (qui peut éventuellement contenir des répétitions). Par exemple, si l'on tape la suite des chiffres 000125 le digicode s'ouvrira si le code est soit 0001, soit 0012, soit 0125. Petit Pierre ne connaît pas le code. Combien de chiffres au minimum doit-il taper pour ouvrir le digicode à coup sûr ?

Solution. Il est clair qu'il faut au moins 10003 chiffres, car il faut essayer toutes les 10000 combinaisons. Montrons que ce nombre est aussi suffisant.

Dessinons 1000 points correspondant à toutes les suites de 3 chiffres. Dessinons une flèche entre deux points si les deux derniers chiffres de la première combinaison coincident avec les deux premiers chiffres de la deuxième combinaison (et vont dans le même ordre). Par exemple, il y aura une flèche allant du point 200 vers le point 009 et une autre allant du point 201 vers le point 017 ; entre les points 303 et 030 il y aura deux flèches allant dans les deux sens ; sur le point 777 il y aura une flèche en forme de boucle qui revient vers son point de départ. Ainsi, chaque flèche correspond à un unique code possible.

On voit facilement qu'il y a 10 flèches entrantes et 10 flèches sortantes dans chaque point. En effet, pour obtenir une flèche sortante, par exemple, il faut choisir un chiffre de 0 à 9 à rajouter aux derniers chiffres du numéro du point, ce qui fait exactement 10 choix.

Il est facile à voir également que le graphe formé par les points et les flèches est connexe. En effet, on passe d'un point abc au point def en trois flèches $abc \to bcd \to cde \to def$.

Le théorème d'Euler bien connu (voir, par exemple, "Graphe Eulérien" dans wikipédia) assure alors qu'on peut parcourir toutes les flèches du graphe sans passer deux fois par la même flèche. Ce parcours donnera la suite de 10003 chiffres recherchée : il faudra taper les 3 chiffres du point de départ et ensuite juste le dernier chiffre de chaque point du parcours. Le fait qu'on passe une et une seule fois par chaque flèche du graphe signifie exactement que chaque code possible de 4 chiffres sera essayé une et une seule fois. ■

Exercice 9. On dispose de 500 emplacements à billes numérotés de 1 à 500 de gauche à droite. Des billes numérotées de 1 à 500 sont posées dans ces emplacements dans le désordre : leurs numéros ne coïncident pas nécessairement avec les numéros des emplacements. (Dans chaque emplacement il y a exactement une bille.) On dit que l'ordre des billes est plutôt croissant si la plus longue sous-suite décroissante des numéros des billes qu'on peut extraire de cet ordre ne dépasse pas 5 éléments. Montrer qu'il existe au plus 5^{1000} ordres plutôt croissants.

Solution. Montrons d'abord que si les billes sont disposées dans un ordre plutôt croissant alors on peut les colorier en 5 couleurs de telle sorte que la suite des billes de chaque couleur soit croissante. Pour cela nous allons ordonner les 5 couleurs dans un certain ordre et colorier les billes une par une de gauche à droite en utilisant à chaque fois la première couleur disponible, c'est à dire la première couleur telle que la précédente bille de cette couleur ait un numéro plus petit que celle que nous sommes en train de colorier. Montrons qu'avec cette méthode nous arriverons en effet à colorier toutes les billes. Supposons par l'absure que nous sommes arrivés à une bille pour laquelle aucune des 5 couleurs n'est disponible. En particulier cela veut dire qu'on a déjà utilisé la couleur numéro 5 pour colorier une bille dont le numéro était plus grand. Si pour cette bille-là nous avions choisi la couleur numéro 5, c'est que, d'après notre règle, la couleur numéro 4 n'était pas disponible. Autrement dit il y avait une bille encore plus tôt dans la suite qui avait un numéro encore plus grand et qu'on avait coloriée en couleur 4. En remontant de la même manière jusqu'à la couleur numéro 1 on découvrira une suite de 6 billes dont les numéros vont dans l'ordre décroissant. Ceci contredit l'hypothèse que notre ordre était plutôt croissant.

Considérons maintenant un ordre plutôt croissant et colorions les billes selon la règle ci-dissus. Colorions également chaque emplacement de la même couleur que la bille qu'il contient (il suffira de mettre beaucoup de peinture sur chaque bille, de sorte qu'elle coule aussi dans l'emplacement). Il est facile à voir que l'ordre des billes se rétablit d'une manière inambiguë si l'on connaît la couleur de toutes les billes et de tous les emplacements. En effet, les billes d'une couleur donnée vont dans les emplacements de cette même couleur et y sont rangées dans l'ordre croissant.

Or il y a 5^{500} coloriages possibles des billes et 5^{500} coloriages possibles des emplacements en 5 couleurs. Donc le nombre d'ordres plutôt croissants est au plus 5^{1000}. ■

Remarque : d'après la formule de Stirling le nombre de permutations de 500 éléments, qui vaut $500!$, peut être estimé à $(500/e)^{500}$. Comme $500/e > 25$, notre estimation montre que les ordres plutôt croissants sont beaucoup moins nombreux que tous les ordres possibles.

Fin