Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 1

À renvoyer au plus tard le jeudi 15 novembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « junior » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. ABC est un triangle dont tous les angles sont aigus. À l'extérieur de ce triangle on construit les trois points X, Y et Z vérifiant :

- Le triangle AXB est isocèle de base AB et l'angle $\widehat{AXB}$ vaut $120°$,
- Le triangle BYC est isocèle de base BC et l'angle $\widehat{BYC}$ vaut $120°$,
- Le triangle CZA est isocèle de base CA et l'angle $\widehat{CZA}$ vaut $60°$.

Montrer que les droites (XY) et (BZ) sont perpendiculaires.

Exercice 2. $ABCD$ est un trapèze dans lequel les côtés AD et BC sont parallèles, K est un point du côté AB et L un point du côté CD. Montrer que si les angles $\widehat{BAL}$ et $\widehat{CDK}$ sont égaux alors les angles $\widehat{BLA}$ et $\widehat{CKD}$ le sont aussi.

Exercice 3. ABC est un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit respectivement H le pied de la hauteur de ce triangle issue de C et K le milieu du côté AC. On suppose que $BK = CH$ et que les angles $\widehat{KBC}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercices Communs

Exercice 4. $ABCD$ est un rectangle et M un point intérieur à ce rectangle. Montrer que l'aire de ce rectangle est inférieure ou égale à la somme $AM \times CM + BM \times DM$ ($AM \times CM$ désigne le produit des longueurs des segments AM et CM, de même pour $BM \times DM$)

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les côtés AB et CD sont parallèles. On considère un point P de la droite (AC) tel que C soit intérieur au segment $[AP]$ et on désigne respectivement par X et Y les milieux des côtés AB et CD. La droite (PX) rencontre la droite (BC) en N et la droite (PY) rencontre la droite (AD) en M. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (AB).

Exercice 6. Soit ABC un triangle et O un point intérieur à ce triangle. D et E sont respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les droites (BC) et (AC) et F est le milieu du segment AB. Montrer que si $DF = EF$ alors les angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{OAE}$ sont égaux.

Exercices Olympiques

Exercice 7. Dans le triangle ABC les bissectrices des angles en A et C rencontrent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en A_0 et C_0. La droite passant par I, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et parallèle à la droite (AC) rencontre la droite A_0C_0 en P.
Montrer que la droite (PB) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 8. Soit ABC un triangle non isocèle en A ; I et O sont respectivement le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit de ce triangle ABC et le cercle inscrit touche le côté BC en D. La bissectrice intérieure de l'angle en A dans le triangle ABC rencontre le cercle circonscrit au point M et la droite (DM) rencontre à nouveau le cercle circonscrit en P.
Montrer que l'angle $\widehat{API}$ est un angle droit.

Exercice 9. On considère un cercle de centre O et quatre points $ABCD$ de ce cercle tels que le point d'intersection P, autre que O, des cercles circonscrits aux triangles ABO et CDO soit intérieur au triangle OAD. On choisit un point Q de la demi-droite $[OP)$ à l'extérieur du segment $[OP]$ et on choisit un point R de la demi-droite $[PO)$ à l'extérieur du segment $[OP]$. Montrer que les angles $\widehat{QAP}$ et $\widehat{OBR}$ sont égaux si et seulement si les angles $\widehat{PDQ}$ et $\widehat{RCO}$ sont égaux.

Fin