# Olympiades Françaises de Mathématiques

# 2012-2013

## Envoi Numéro 1 – Corrigé

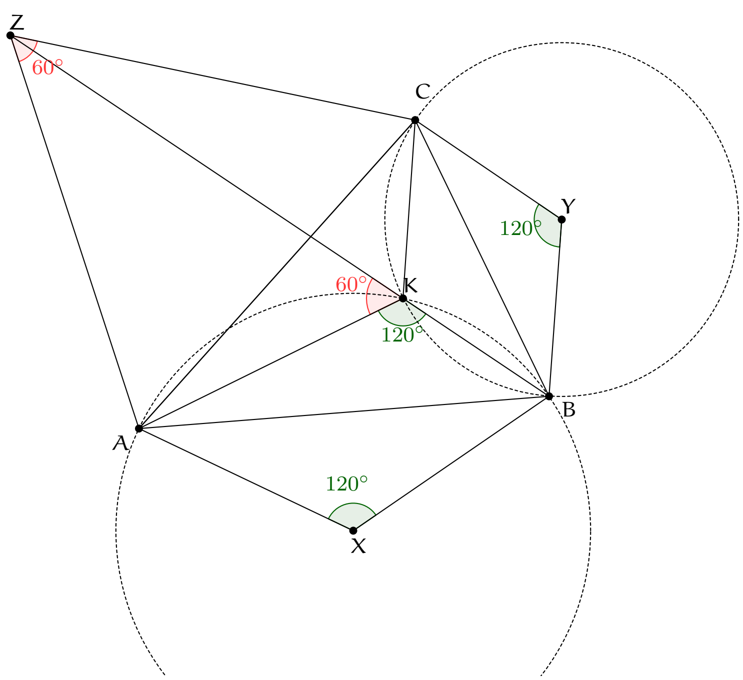
# Exercices Juniors

*Exercice 1.* $ABC$ est un triangle dont tous les angles sont aigus. À l'extérieur de ce triangle on construit les trois points X, Y et Z vérifiant :

- Le triangle $AXB$ est isocèle de base $AB$ et l'angle $\widehat{AXB}$ vaut $120°$,
- Le triangle $BYC$ est isocèle de base $BC$ et l'angle $\widehat{BYC}$ vaut $120°$,
- Le triangle $CZA$ est isocèle de base $CA$ et l'angle $\widehat{CZA}$ vaut $60°$.

Montrer que les droites $(XY)$ et $(BZ)$ sont perpendiculaires.

*Solution.* Traçons le cercle de centre $X$ qui passe par $A$ et $B$ et celui de centre $Y$ qui passe par $B$ et $C$ et notons $K$ leur autre point d'intersection :

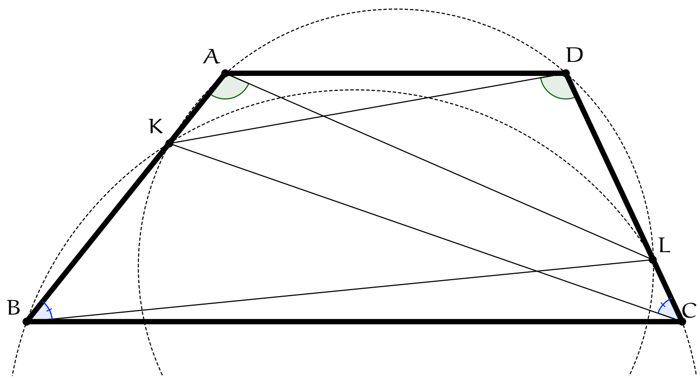



L'angle $\widehat{AKB}$ vaut la moitié de l'angle au centre, et l'angle au centre est le complémentaire de $120°$, donc $\widehat{AKB}$ vaut $\frac{240}{2} = 120°$. De même, $\widehat{BKC} = 120°$ et par conséquent, l'angle restant $\widehat{CKA} = 120°$. Mais alors, comme $\widehat{CKA} + \widehat{AZC} = 120 + 60 = 180°$, donc les points $A, Z, C, K$ sont cocycliques. Comme $AZ = ZC$, les arcs que ces deux cordes délimitent sont égaux et les angles inscrits sont égaux. Ainsi, $\widehat{AKZ} = \widehat{ZKC} = 60°$.

Maintenant regardons les points B, K et Z : $\widehat{BKZ} = 120+60 = 180°$, donc les trois points sont alignés, la droite $(BZ)$ est la droite qui passe par les deux points d'intersection des cercles, elle est perpendiculaire au segment qui relie les deux centres, *ie* $[XY]$. ■

*Exercice 2.* $ABCD$ est un trapèze dans lequel les côtés $AD$ et $BC$ sont parallèles, $K$ est un point du côté $AB$ et $L$ un point du côté $CD$. Montrer que si les angles $\widehat{BAL}$ et $\widehat{CDK}$ sont égaux alors les angles $\widehat{BLA}$ et $\widehat{CKD}$ le sont aussi.

*Solution.* On suppose les angles $\widehat{BAL}$ et $\widehat{CDK}$ ont la même valeur. Nous allons montrer que les angles $\widehat{KBL}$ et $\widehat{KCL}$ sont égaux (ceci impliquera que les triangles $KDC$ et $BAL$ ont deux angles identiques, et donc que $\widehat{BLA} = \widehat{KCL}$).

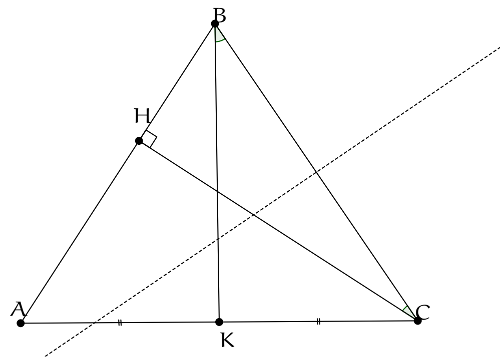



Je vais d'abord montrer un point amusant sur les trapèzes : si on place des points $K$ et $L$ sur les côtés $AB$ et $CD$ tels que $A, D, K, L$ soient cocycliques, alors les points $B, C, K, L$ sont aussi cocycliques. Il suffit d'utiliser la propriété qu'un quadrilatère est inscrit dans un cercles ssi la somme des angles opposés vaut $180°$, et aussi que comme $AD$ et $BC$ sont parallèles, $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D} = 180°$.

L'hypothèse $\widehat{BAL} = \widehat{CDK}$ revient à dire que $A, D, K, L$ cocycliques par le théorème des angles inscrits, donc par le résultat précédent $B, C, K, L$ sont aussi cocycliques et les angles bleus sont égaux. ■

*Exercice 3.* $ABC$ est un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit respectivement $H$ le pied de la hauteur de ce triangle issue de $C$ et $K$ le milieu du côté $AC$. On suppose que $BK = CH$ et que les angles $\widehat{KBC}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux. Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.

*Solution.* Voici la figure :



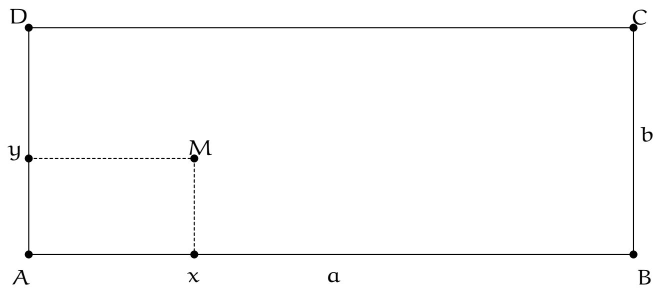

Maintenant considérons la médiatrice de $[BC]$ (dessinée en pointillés sur la figure) et la symétrie par rapport à cet axe. Il est évident que par cette symétrie $B$ devient $C$ et vice-versa. Appelons $A'$ l'image de $A$ par la symétrie. Les hypothèses que tous les angles sont aigus, $BK = CH$ et $\widehat{KBC} = \widehat{HCB}$ impliquent que $K$ est l'image de $H$ par la symétrie. Mais comme $A$ est l'intersection de $BH$ et $CK$, $A'$ est l'intersection de l'image de $BH$ (c-à-d $CK$) et de l'image de $CK$ (c-à-d $BH$), donc $A' = A$, $A$ est sur la médiatrice de $BC$ et le triangle est isocèle en $A$.

Mais nous n'avons pas fini, comme $CH \mapsto BK$ et $BA \mapsto CA$, l'angle droit est conservé, et $BK$ est à la fois une hauteur et une médiane. Donc le triangle est aussi isocèle en $B$, il est donc équilatéral. ∎

## Exercices Communs

*Exercice 4.* $ABCD$ est un rectangle et $M$ un point intérieur à ce rectangle. Montrer que l'aire de ce rectangle est inférieure ou égale à la somme $AM \times CM + BM \times DM$ ($AM \times CM$ désigne le produit des longueurs des segments $AM$ et $CM$, de même pour $BM \times DM$)

*Solution.*Nous allons travailler en analytique et tout passer aux coordonnées : $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$, $D(0,b)$, $M(x,y)$.




On veut montrer que l'aire du rectangle est inférieure ou égale à $AM \times CM + BM \times DM$, c'est-à-dire :

$$\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} + \sqrt{(a-x)^2+y^2} \times \sqrt{x^2+(b-y)^2} \geqslant ab.$$

Nous allons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

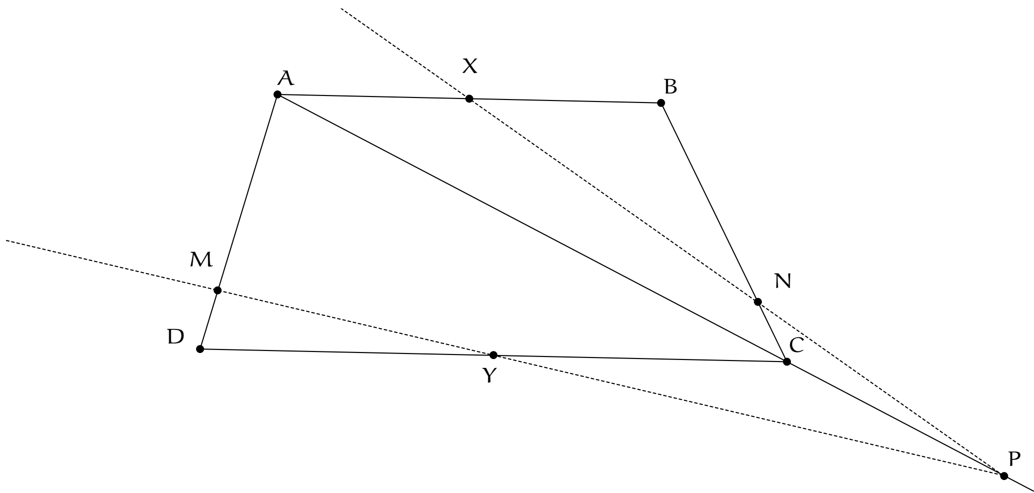
$$\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{(b-y)^2+(a-x)^2} \geqslant x(b-y)+y(a-x),$$

$$\sqrt{(a-x)^2+y^2} \times \sqrt{(b-y)^2+x^2} \geqslant (a-x)(b-y)+yx.$$

Et on finit en remarquant que $x(b-y)+y(a-x)+(a-x)(b-y)+yx = ab$. ■

*Exercice 5.* Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les côtés $AB$ et $CD$ sont parallèles. On considère un point $P$ de la droite $(AC)$ tel que $C$ soit intérieur au segment $[AP]$ et on désigne respectivement par $X$ et $Y$ les milieux des côtés $AB$ et $CD$. La droite $(PX)$ rencontre la droite $(BC)$ en $N$ et la droite $(PY)$ rencontre la droite $(AD)$ en $M$. Montrer que la droite $(MN)$ est parallèle à la droite $(AB)$.

*Solution.* Faisons une figure appropriée :




Tout d'abord considérez le cas où on prend $P$ "à l'infini", c'est au lieu de prendre $PX$ et $PY$ on prend les droites parallèles à $AC$ passant par $X$ et $Y$. Dans ce cas, par Thalès les points $M$ et $N$ sont les milieux respectifs de $AD$ et $BC$ , et par conséquent $(MN) \| (AB)$.

Revenons au cas général. Nous allons essayer de montrer que $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD}$, et ainsi nous aurons bien $(MN) \| (AB)$ (je laisse en exercice la démo de ce résultat pour ceux qui ont des doutes). Comme nous avons beaucoup de points alignés et que nous voulons calculer des quotients de longueur, le théorème de Menelaus vient à l'esprit. Dans le triangle $ABC$, les points $X, N, P$ sont alignés, donc :

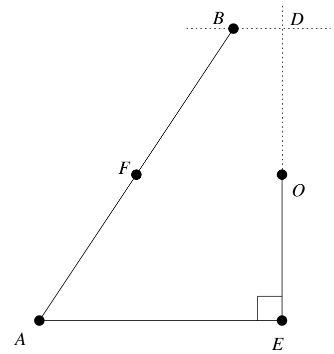
$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = -1$$

Mais comme $X$ est le milieu de $AB$, $\frac{AX}{XB} = 1$, donc $\frac{BN}{NC} = -\frac{CP}{PA}$. Ensuite, en utilisant Menelaus dans le triangle $ADC$, on obtient $\frac{AM}{MD} = -\frac{CP}{PA}$, et les deux quotients sont égaux. Ensuite il n'est pas très dur de vérifier que l'on arrive bien au résultat attendu, $(MN) \| (AB)$. ■

*Exercice 6.* Soit $ABC$ un triangle et $O$ un point intérieur à ce triangle. $D$ et $E$ sont respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées de $O$ sur les droites $(BC)$ et $(AC)$ et $F$ est le milieu du segment $AB$. Montrer que si $DF = EF$ alors les angles $\widehat{OBD}$ et $\widehat{OAE}$ sont égaux.

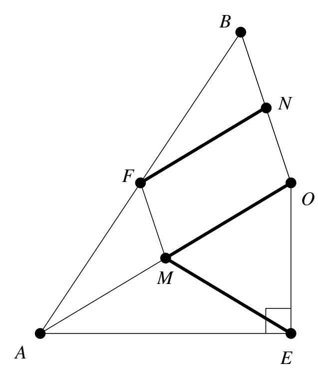
*Solution.* Dans cet exercice il y a une hypothèse superflue, à savoir que le point $O$ est à l'intérieur du triangle $ABC$. Nous allons résoure l'exercice sans cette hypothèse.

Commençons par tracer un angle droit $AEO$ et un segment $AB$ et plaçons $F$ au milieu du segment $AB$. Notre but maintenant est de trouver un point $D$ tel que l'angle $BDO$ soit droit et que l'on ait $FD = FE$.



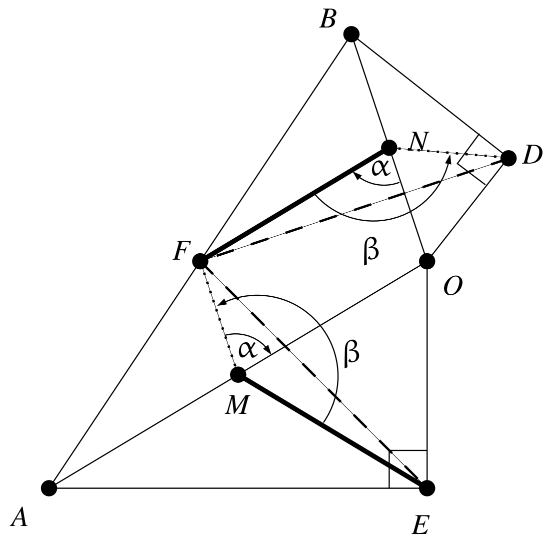

Comme la figure ci-dessus l'indique, il exite toujours une façon évidente de placer le point $D$ : il suffit de tracer la droite parallèle à $AE$ passant par $B$ et de prendre le point d'intersection de cette droite avec la droite $EO$. L'angle $BDO$ est alors droit par construction et on a bien $FD = FE$, car $F$ est équidistant des deux droites parallèles. Une telle position du point $D$ ne peut pas apparaître dans l'exercice (et cela va nous servir par la suite) : en effet, l'exercice parle d'un triangle $ABC$, or ici les droites $AE$ et $BD$ ne se coupent pas et il n'y a donc pas de point $C$.

Rajoutons à notre figure le milieu $M$ du segment $AO$ et le milieu $N$ du segment $BO$.




On a alors trois segments égaux représentés en gras sur la figure. En effet, $ME = MO$, car le triangle $AEO$ est rectangle en $E$ ; et $MO = FN$, car $FNOM$ est un parallélogramme, les lignes des mileux étant parallèles aux côtés du triangle $AOB$.

Revenons maintenant à l'exercice.




Nous venons de montrer que $ME = FN$ et on a de même $ND = FM$. Comme on a de plus $FD = FE$ par hypothèse, on conclut que les triangles $NDF$ et $MFE$ sont égaux. Il est important de distinguer deux cas : celui où ces triangles sont directement isométriques, comme sur la figure, et celui où ils sont indirectement isométrique (distinction qui n'a pas été faite correctement dans la solution initialement proposée).

Nous allons utiliser les angles orientés.

**1er cas : triangles directement isométriques.** Soit

$$\alpha = (MF, MO) = (NO, NF), \qquad \beta = (ME, MF) = (NF, ND).$$

Dans le triangle rectangle $AEO$ on a

$$(AE, AO) = \frac{1}{2}(ME, MO) \bmod 180°.$$

(L'égalité n'est vraie que modulo $180°$ à cause de la division par 2.) On trouve donc, modulo $180°$,

$$(AE, AO) = \frac{1}{2}(ME, MO) = \frac{1}{2}[(ME, MF) + (MF, MO)] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

De la même manière

$$(BO, BD) = \frac{1}{2}(NO, ND) = \frac{1}{2}[(NO, NF) + (NF, ND)] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

On a donc $(AE, AO) = (BO, BD) \bmod 180°$. Or les deux angles font partie de triangles rectangles et sont donc aigus, ce qui implique qu'ils sont géométriquement égaux.

**2ème cas : triangles indirectement isométriques.** Les calculs sont exacement les mêmes que dans le cas précédent, sauf que cette fois-ci on a $(NF, ND) = -\beta$. On trouve donc

$$(AE, AO) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \qquad (BO, BD) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

modulo $180°$. Ainsi ces angles ne sont pas égaux entre eux. Avons-nous trouvé une erreur dans l'exercice ? Non : en fait nous allons prouver que dans ce cas les droites $AE$ et $BD$ sont parallèles et nous sommes donc dans la configuration interdite mentionnée au début de la solution.

Pour cela il suffit de prouver que $(AE, AB) + (BA, BD) = 0 \bmod 180°$. On a

$$(AE, AB) + (BA, BD) = (AE, AO) + (AO, AB) + (BA, BO) + (BO, BD).$$

Nous savons déjà que, modulo $180°$,

$$(AE, AO) + (BO, BD) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha.$$

De plus, dans le triangle $AOB$, on a

$$(AO, AB) + (BA, BO) = (OA, OB) \bmod 180°.$$

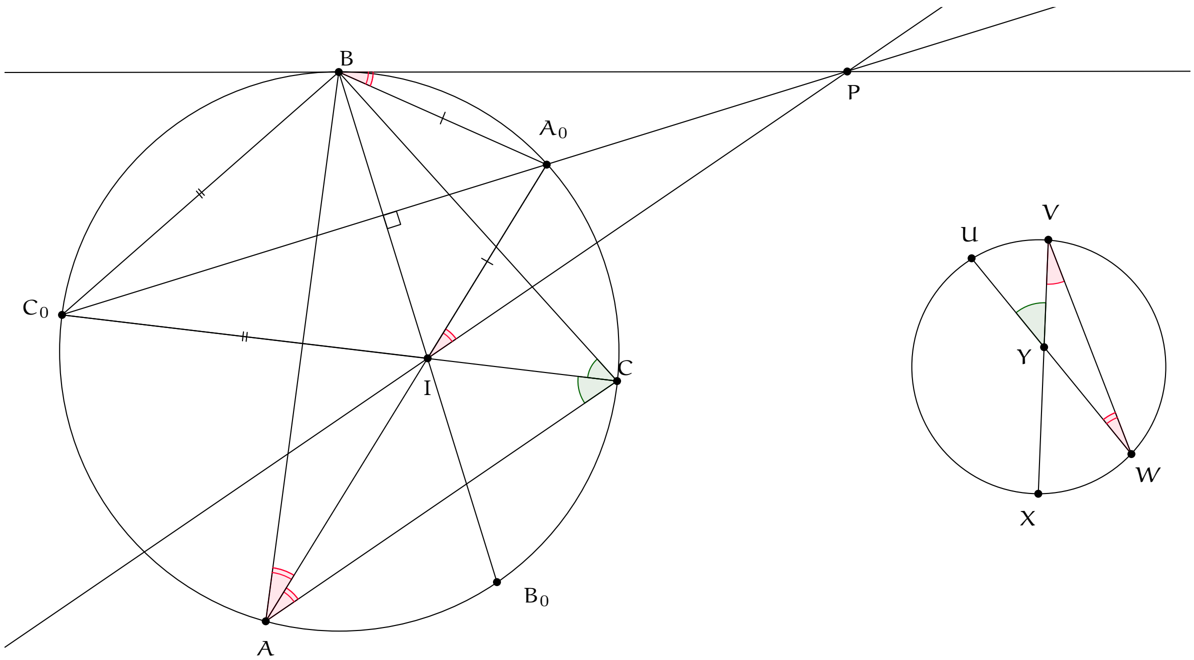
Ce dernier angle vaut $180° - \alpha = -\alpha \bmod 180°$. On trouve donc bien que $(AE, AB) + (BA, BD) = \alpha - \alpha = 0 \bmod 180°$. Par conséquent $AE$ et $BD$ sont parallèles. Le cas de triangles indirectement isométrique ne peut donc pas apparaître dans un triangle $ABC$. ■

# Exercices Olympiques

*Exercice 7.* Dans le triangle $ABC$ les bissectrices des angles en $A$ et $C$ rencontrent le cercle circonscrit au triangle $ABC$ respectivement en $A_0$ et $C_0$. La droite passant par $I$, centre du cercle inscrit dans le triangle $ABC$, et parallèle à la droite $(AC)$ rencontre la droite $(A_0C_0)$ en $P$.

Montrer que la droite $(PB)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $ABC$.

*Solution.* Sur la figure on va rajouter $B_0$ le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{ABC}$ avec le cercle :




Avant de commencer, je veux démontrer un petit résultat sur les arcs. Regardez la figure de droite (je vais noter $\widehat{UV}$ l'arc délimité par $U$ et $V$ en radians) :

$$\widehat{UYV} = \widehat{YVW} + \widehat{YXW} = \frac{1}{2}\widehat{WX} + \frac{1}{2}\widehat{UV}.$$

Revenons à nos moutons. Grâce à la formule précédente, on peut calculer :

$$\widehat{BIC_0} = \frac{1}{2}\widehat{BC_0} + \frac{1}{2}\widehat{B_0C} = \frac{1}{2}\widehat{C_0A} + \frac{1}{2}\widehat{AB_0} = \widehat{C_0BI}.$$

Donc le triangle $BIC_0$ est isocèle en $C_0$. On prouve de même que $A_0BI$ est isocèle en $A_0$, donc $(A_0C_0)$ est la médiatrice du segment $BI$.

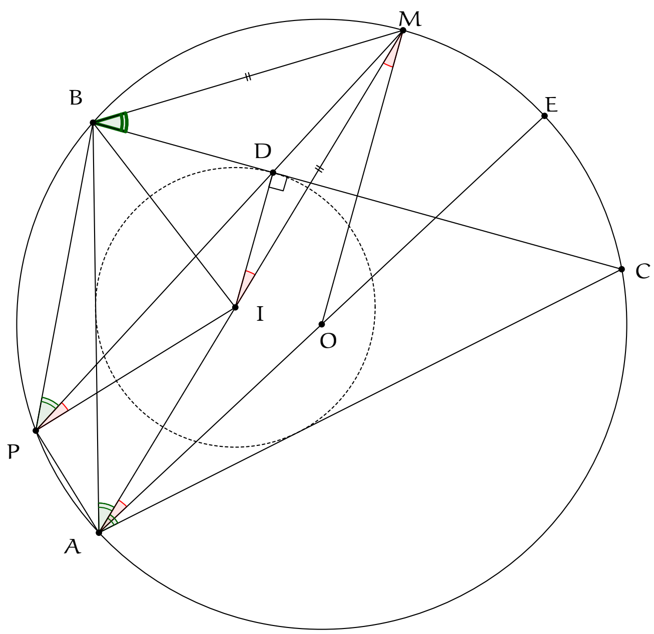
Par symétrie, $\widehat{A_0BP} = \widehat{A_0IP}$, et comme $(IP)$ et $(AC)$ sont parallèles, $\widehat{A_0IP} = \widehat{A_OAC} = \widehat{BAA_0}$. Comme $\widehat{A_0BP} = \widehat{BAA_0}$, on se retrouve avec le cas extrême du théorème de l'angle inscrit, et par la réciproque du théorème $(BP)$ est tangente au cercle.

■

*Exercice 8.* Soit $ABC$ un triangle non isocèle en $A$ ; $I$ et $O$ sont respectivement le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit de ce triangle $ABC$ et le cercle inscrit touche le côté $BC$ en $D$. La bissectrice intérieure de l'angle en $A$ dans le triangle $ABC$ rencontre le cercle circonscrit au point $M$ et la droite $(DM)$ rencontre à nouveau le cercle circonscrit en $P$.

Montrer que l'angle $\widehat{API}$ est un angle droit.

*Solution.* On va placer $E$ le point diamétralement opposé à $A$ sur le cercle circonscrit. Si on arrive à prouver que les points $P$, $I$ et $E$ sont alignés, alors l'angle $\widehat{API}$ sera droit.




Tout d'abord, ramenez-vous au début de la preuve de l'exo 7 pour démontrer que $MI = MB$. Ensuite, $\widehat{MPB} = \widehat{CBM}$ puisque $M$ est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. Les triangles $MPB$ et $MBD$ sont semblables (ils ont l'angle $\widehat{M}$ en commun et ont un deuxième angle égal). Donc

$$\frac{MP}{MB} = \frac{MB}{MD} \implies MP \cdot MD = MB^2 = MI^2.$$

Le cercle passant par les points $P$, $I$ et $D$ admet donc la droite $MI$ comme tangente (par la théorie de la puissance d'un point part rapport à un cercle). On en déduit grâce au cas extrème du théorème de l'angle inscrit que

$$\widehat{DPI} = \widehat{DIM}.$$

Le point $M$ est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$, donc la droite $OM$ est la médiatrice de $[BC]$, et les droites $OM$ et $ID$ sont parallèles. De plus le triangle $AOM$ est isocèle en $O$. Ainsi

$$\widehat{DIM} = \widehat{IMO} = \widehat{MAE} = \widehat{MPE}$$

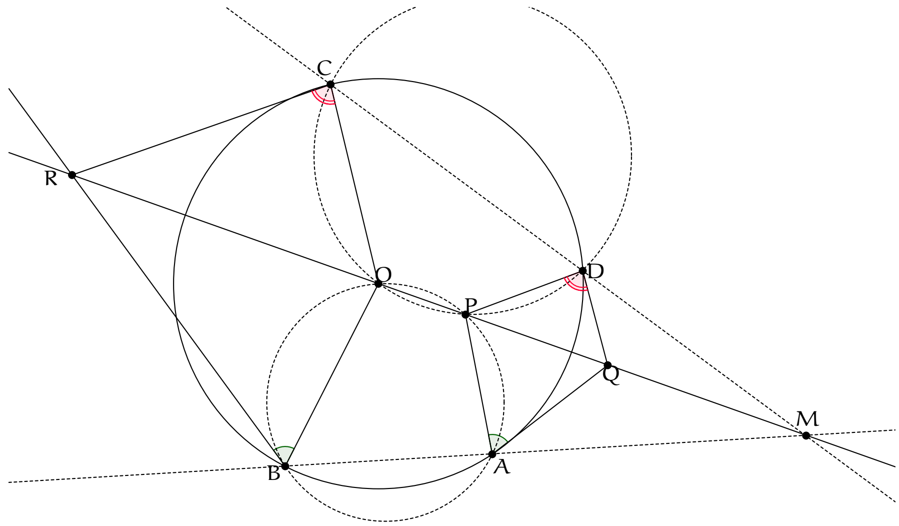
où la dernière égalité est simplement l'angle inscrit. On a montré que :

$$\widehat{MPI} = \widehat{MPE},$$

les points $P$, $I$, $E$ sont bien alignés, la démonstration est achevée. ■

*Exercice 9.* On considère un cercle de centre $O$ et quatre points $ABCD$ de ce cercle tels que le point d'intersection $P$, autre que $O$, des cercles circonscrits aux triangles $ABO$ et $CDO$ soit intérieur au triangle $OAD$. On choisit un point $Q$ de la demi-droite $[OP)$ à l'extérieur du segment $[OP]$ et on choisit un point $R$ de la demi-droite $[PO)$ à l'extérieur du segment $[OP]$. Montrer que les angles $\widehat{QAP}$ et $\widehat{OBR}$ sont égaux si et seulement si les angles $\widehat{PDQ}$ et $\widehat{RCO}$ sont égaux.

*Solution.* Tout d'abord on remarque que les droites $AB$, $CD$ et $OP$ sont concourantes, puisque ce sont les trois axes radicaux des cercles de la figure pris deux ̀deux. Notons $M$ leur point d'intersection.




Comme $M$ est l'intersection des axes radicaux, on a

$$MO \cdot MP = MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

Nous allons travailler dans les complexes. On notera $z_A$ l'affixe du point $A$ etc. On peut supposer que $M$ est l'origine, que la droite $(OM)$ est l'axe des réels et que $z_O z_P = 1$. Considérons l'inversion de centre $M$ qui échange $O$ et $P$, qui sera d'équation : $A \leftrightarrow A'$ ssi $z_A \overline{z_{A'}} = 1$. Grâce à la relation d'au dessus, cette inversion transforme $A$ en $B$ et $C$ en $D$. Plaçons un point $Q$ sur la droite $OP$ et notons $R$ son image par l'inversion. Nous allons montrer que $\widehat{QAP} = \widehat{OBR}$. Gardez en tête que $z_O, z_P, z_Q, z_R$ sont tous réels :

$$\widehat{QAP} = \arg\left(\frac{z_Q - z_A}{z_P - z_A}\right) = \arg\left(\frac{\frac{1}{z_R} - \frac{1}{\overline{z_B}}}{\frac{1}{z_O} - \frac{1}{\overline{z_B}}}\right) = \arg\left(\frac{z_O}{z_R}\frac{\overline{z_B} - z_R}{\overline{z_B} - z_O}\right).$$

Comme $z_O/z_R$ est réel, son argument vaut $0$ à $\pi$ près. Ensuite on utilise la formule $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ pour finir le calcul :

$$\widehat{QAP} = -\arg\left(\frac{z_B - z_R}{z_B - z_O}\right) = \widehat{OBR}.$$

De même on montre que $\widehat{PDQ} = \widehat{RCO}$. Ainsi, la seule façon de placer le point R telle que $\widehat{QAP} = \widehat{OBR}$ est de le mettre sur l'image de Q par l'inversion, et on a dans ce cas $\widehat{PDQ} = \widehat{RCO}$. ■

*Fin*