OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE SÉLECTION

SAMEDI 10 MARS ET DIMANCHE 11 MARS 2012

Exercice 1

Soient n et k deux entiers strictement positifs. On considère une assemblée de k personnes telle que, pour tout groupe de n personnes, il y en ait une $(n+1)$-ième qui les connaisse toutes (si A connaît B alors B connaît A).

1) Si $k = 2n+1$, prouver qu'il existe une personne qui connaît toutes les autres.
2) Si $k = 2n+2$, donner un exemple d'une telle assemblée dans laquelle personne ne connaît tous les autres.

Solution.

1) On commence par construire, par récurrence, un groupe de $n+1$ personnes qui se connaissent deux à deux : il est clair que l'on peut trouver deux personnes qui se connaissent. Supposons que pour $p \in \{2, ..., n\}$ fixé, on ait réussi à trouver un groupe de p personnes qui se connaîssent deux à deux. En complétant ce groupe par $n-p$ personnes quelconques, on forme un groupe de n personnes dont on sait qu'il en existe une $(n+1)^{ième}$ qui les connaît toutes. En ajoutant cette personne à notre groupe de p personnes, on forme ainsi un groupe de $p+1$ personnes qui se connaissent deux à deux.

   On considère donc un groupe G de $n+1$ personnes qui se connaissent deux à deux. Puisque $k = 2n+1$, il reste donc n personnes qui forment un groupe G' disjoint du précédent. Pour ce groupe G', on sait qu'il existe une personne appartenant nécessairement à G qui en connaît tous les membres. Cette personne connaît alors tout le monde.

2) On divise les personnes en $n+1$ paires disjointes, et on suppose que chaque personne connaît toutes les autres sauf celle qui est dans la même paire qu'elle. Ainsi, personne ne connaît tout le monde.

   Soit G un groupe de n personnes de cette assemblée. Puisqu'il y a $n+1$ paires, c'est donc qu'il existe une paire, disons $\{A, B\}$, dont aucun des deux membres n'est dans G. Par suite, A connaît tous les membres de G, et les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

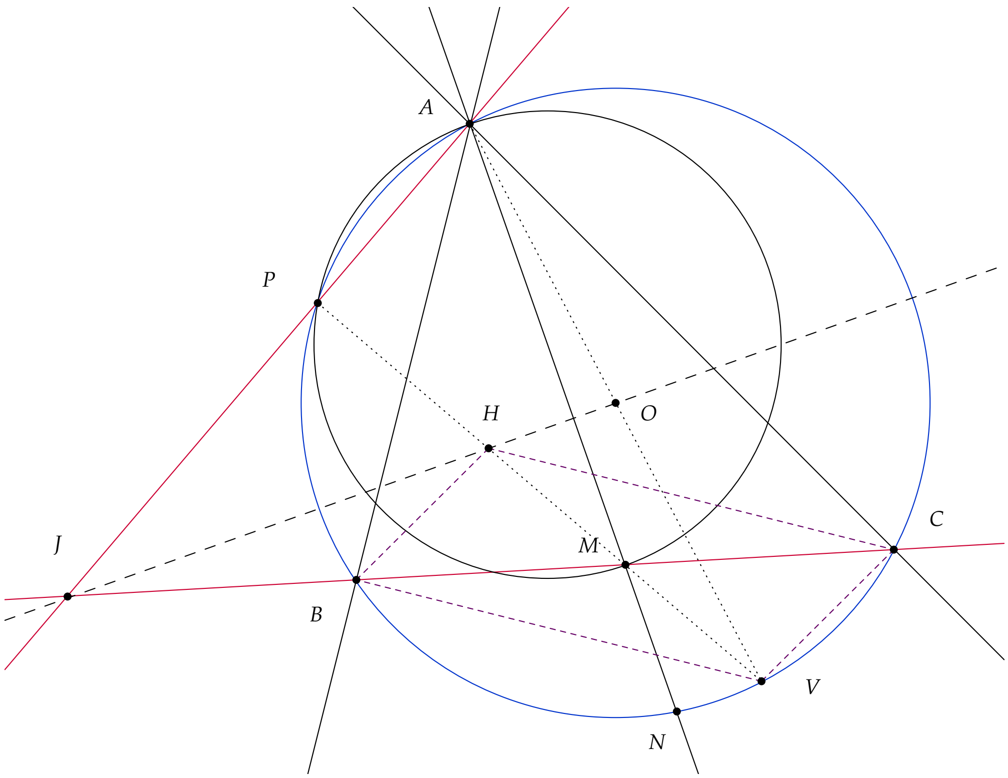
■

Exercice 2

Soit ABC un triangle acutangle avec $AB \neq AC$. On note Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et O le centre de Γ. Soit M le milieu de $[BC]$. La droite (AM) recoupe Γ en N et le cercle de diamètre $[AM]$ recoupe Γ en P.

Prouver que les droites $(AP), (BC), (OH)$ sont concourantes si, et seulement si, $AH = HN$.

Solution.



Montrons d'abord que P, H, M sont alignés. À cet effet, introduisons V, le point diamétralement opposé à A sur Γ. Alors $(VC) \perp (AC)$ et donc $(BH) \parallel (VC)$. De même on voit que $(CH) \parallel (VB)$. Il s'ensuit que $BHCV$ est un parallélogramme de centre M. Les points H, M, V sont donc alignés. Si on note U la deuxième intersection de (HV) avec Γ, par cocyclicité on obtient $\widehat{AUV} = \widehat{ABV} = 90°$. Comme $\widehat{APV} = \widehat{APM} = 90°$, on conclut que $U = P$ et donc que P, H, M sont alignés.

Soit J l'intersection de (AP) et de (BC). Comme (AH) et (MP) sont des hauteurs du triangle AJM, H est aussi l'orthocentre de AJM. Ainsi, (OH) passe par J si, et seulement si, $(OH) \perp (AN)$. Or $OA = ON$, ce qui implique que $(OH) \perp (AN)$ si, et seulement si (OH) est la médiatrice de de $[AN]$, c'est-à-dire si, et seulement si, $HA = HN$. ■

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $a, b, c \geq 1$ tels que :

$$a^p + b^p = p^c.$$

Solution. La réponse est :

(i) $p = 2$ et $(a, b, c) = (2^u, 2^u, 2u+1)$ pour un entier $u \geq 0$

(ii) $p = 3$ et $(a, b, c) = (2 \cdot 3^u, 3^u, 2+3u)$ ou $(a, b, c) = (3^u, 2 \cdot 3^u, 2+3u)$ pour un entier $u \geq 0$.

Pour un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p on note $v_p(n)$ le plus grand entier $k \geq 0$ tel que p^k divise n. On montre d'abord trois lemmes.

Lemme 1

Soit p un nombre premier. Alors, pour $1 \leq j \leq p-1$, $\binom{p}{j}$ est divisible par p.

Démonstration : On a $j!(p-j)!\binom{p}{j} = p!$. Comme $1 \leq j < p$ et $1 \leq p-j < p$, j et $p-j$ sont premiert avec p de sorte que p divise $\binom{p}{j}$. ■

Lemme 2

Soit p un nombre premier impair et soient a, j des entiers strictement positifs avec $2 \leq j \leq p$. On pose $u = v_p(a)$et on considère un entier $k > u$. Alors :

$$v_p\left(\binom{p}{j} p^{jk} a^{p-j}\right) \geq k + u(p-1) + 2.$$

Démonstration : D'après le lemme 1, pour $2 \leq j \leq p-1$, on a $v_p\left(\binom{p}{j} p^{jk} a^{p-j}\right) \geq 1 + jk + u(p-j)$. Il suffit donc de prouver que $1 + jk + u(p-j) \geq k + u(p-1) + 2$, ce qui est équivalent au fait que $(j-1)(k-u) \geq 1$, ce qui est clairement vérifié. Pour $j = p$, on a $v_p\left(\binom{p}{j} p^{jk} a^{p-j}\right) = pk$, qui est supérieur ou égal à $k + u(p-1) + 2$ car l'inégalité $pk \geq k + u(p-1) + 2$ est équivalente à $(p-1)(k-u) \geq 2$, qui est clairement vraie. ■

Lemme 3

On a $(2n)^{\frac{1}{n-1}} < 2$ pour tout entier $n \geq 5$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 5$, on a clairement $10 < 2^4$. On suppose que $2n < 2^{n-1}$. Alors $2(n+1) = 2n + 2 \leq 2^{n-1} + 1 < 2^n$ car $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} > 1$. Ceci clôt la preuve. ■

Résolvons maintenant l'exercice. On considère en un premier temps le cas $p = 2$. Si $c < 2$, la seule solution est $a = b = c = 1$. Si $c \geq 2$ et $a^2 + b^2 = 2^c$, en raisonnant modulo 4, on voit que a et b doivent être pairs. Soit $u = \min(v_2(a), v_2(b))$. Alors $(a/2^u)^2 + (b/2^u)^2 = 2^{c-2u}$. Si $c - 2u \geq 2$, alors $a/2^u$ et $b/2^u$ sont des entiers pairs, ce qui contredit la définition de u. Donc $c - 2u = 1$ et $a = b = 2^u$. Pour conclure, on vérifie aisément que pour tout entier $u \geq 0$:

$$(2^u)^2 + (2^u)^2 = 2^{2u+1}.$$

On suppose maintenant que $p > 2$. Soient $a, b, c \geq 1$ des entiers tels que $a^p + b^p = p^c$. Sans perte de généralité, supposons $a \geq b$. Comme $a + b$ divise $a^p + b^p$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$a + b = p^k. \tag{1}$$

Soit $u = v_p(a)$. En particulier, (5) implique que $a < p^k$ de sorte que $u < k$. Alors, en utilisant le fait que p est impair

$$a^p + b^p = a^p + \left(p^k - a\right)^p = \sum_{j=2}^{p} (-1)^{j+1} u_j + u_1, \qquad \text{où} \quad u_j = \binom{p}{j} p^{jk} a^{p-j}.$$

D'après le Lemme 2, on a $v_p(u_j) \geq k + u(p-1) + 2$ pour $2 \leq j \leq p$. De plus, comme $v_p(u_1) = i + k + u(p-1)$, il en découle que $v_p(a^n + b^n) = 1 + k + u(p-1)$. Comme $a^p + b^p$ est une puissance de p, on conclut que :

$$a^p + b^p = p^{1+k+u(p-1)} = p(a+b)p^{u(p-1)},$$

où l'on a utilisé le fait que $a + b = p^k$ pour la dernière égalité. Puisque $a \geq b$, ceci impose $a^p \leq 2pap^{u(p-1)}$. Ainsi :

$$a \leq (2p)^{\frac{1}{p-1}} p^u.$$

Mais par définition $u = v_p(a)$, de sorte que $a \geq p^u$. De plus, $a > p^u$ implique $a \geq 2p^u$ D'après le Lemme 3, comme $(2p)^{\frac{1}{p-1}} < 2$ pour $p \geq 5$, on en déduit que $p \geq 5$ implique $a = p^u$, et que $p = 3$ implique $a = 3^u$ ou $a = 2 \cdot 3^u$ (le cas $p = 2$ est exclu car p est impair).

On étudie d'abord le cas $a = p^u$. On a alors :

$$b^p = p^{up}\left(p^{c-up} - 1\right),$$

de sorte que $v_p(b) = p^u$. Comme $a \geq b$ et $a = p^u$, ceci implique $a = b$, et donc 2 divise p, ce qui est exclu car p est impair.

On a donc prouvé que (p est impair) :

$$a^p + b^p = p^c \text{ et } a \geq b \qquad \Longrightarrow \qquad p = 3, \quad a = 2 \cdot 3^u.$$

Dans la suite on suppose donc que $p = 3$ et $a = 2 \cdot 3^u$. Alors $b^3 = 3^{3u}\left(3^{c-3u} - 8\right)$. Donc 3^u divise b. Par suite $3^u \leq b \leq a = 2 \cdot 3^u$. Si $b = a$, alors 2 divise p^c, ce qui contredit le fait que p est impair. Donc $b = 3^u$, ce qui implique $(3^u)^3 + (2 \cdot 3^u)^3 = 3^{3u+2} = 3^c$. Finalement, $c = 3u + 2$ et on vérifie aisément que pour tout entier $u \geq 0$:

$$(2 \cdot 3^u)^3 + (3^u)^3 = 3^{2+3u}.$$

Ainsi $p = 3$, $a = 2 \cdot 3^u$, $b = 3^u$, $c = 2 + 3u$ pour un certain entier $u \geq 0$.

■

Remarque. Il est possible d'utiliser le lemme dit LTE (voir poly sur le site d'Animath) pour aborder l'exercice : si p est un nombre premier impair tel que p ne divise pas a et ne divise pas b, alors :

$$v_p(a^p + b^p) = 1 + v_p(a + b).$$

Exercice 4

Soit $k > 1$ un entier. Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est dite *k-tastrophique* lorsque pour tout entier $n > 0$, on a $f_k(n) = n^k$ où f_k est la k-ième itérée de f :

$$f_k(n) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(n).$$

Pour quels k existe-t-il une fonction k-tastrophique ?

<u>*Solution.*</u> On va prouver que, pour tout entier $k \geq 1$, il existe une fonction k-tastrophique. Clairement, la fonction $f : n \longmapsto n$ est 1-tastrophique. On suppose donc que $k \geq 2$.

On procède maintenant de la façon suivante. On pose $f(1) = 1$, et si n est le plus petit entier pour lequel $f(n)$ n'est pas encore défini, alors :
- si $n = a^k$ pour un certain entier $a \geq 2$, on pose :

$$f(n) = f(a)^k. \tag{2}$$

- si n n'est pas la puissance $k^{ième}$ d'un entier, on note $n_1 = n, n_2, ..., n_k$ les k plus petits entiers (dans l'ordre) qui ne sont pas des puissances $k^{ièmes}$ d'entiers et pour lesquels f n'est pas définie, et on pose :

$$f(n_1) = n_2, f(n_2) = n_3, ..., , f(n_{k-1}) = n_k, \text{ et } f(n_k) = n_1^k = n^k. \tag{3}$$

Il est clair que l'on définit ainsi une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Il reste à vérifier qu'elle est k-tastrophique. Soit $a \geq 2$ un entier. On commence par noter que, d'après (1), on a :

$$f_2(a^k) = f(f(a^k)) = f(f(a)^k) = [f(f(a))]^k = [f_2(a)]^k$$

et, par une récurrence immédiate, on a

$$f_p(a^k) = [f_p(a)]^k \text{ pour tout entier } p \geq 1. \tag{4}$$

On prouve alors que f est k-tastrophique par récurrence (forte) : On a évidemment $f_k(1) = 1 = 1^k$. Supposons que $n \geq 2$ soit un entier et que $f_k(m) = m^k$ pour tout entier naturel $m \leq n - 1$.
- Si $n = a^k$ pour un certain entier $a \geq 2$. Alors $a \leq n - 1$ et on a

$$\begin{aligned} f_k(n) &= f_k(a^k) = [f_k(a)]^k \qquad \text{d'après (4)} \\ &= (a^k)^k \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= n^k \end{aligned}$$

- Si n n'est pas la puissance $k^{ième}$ d'un entier, on sait qu'il existe des entiers $n_1, n_2, ..., n_k$ pour lesquels on a (3) et avec $n = n_i$ pour un certain $i \in \{1, ..., k\}$. Alors, d'après (3) et (4), il vient

$$\begin{aligned} f_k(n) &= f_k(n_i) = f_{k+i-1}(n_1) = f_{i-1}(f_k(n_1)) \\ &= f_{i-1}(f(n_k)) = f_{i-1}(n_1^k) = [f_{i-1}(n_1)]^k = {n_i}^k = n^k. \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a $f_k(n) = n^k$. Ce qui achève la récurrence, et la démonstration.

∎

Exercice 5

Déterminer tous les polynômes $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, non constants et à coefficients entiers, dont les racines sont exactement les nombres $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ (avec multiplicité).

<u>*Solution.*</u> Soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ un polynôme à coefficients entiers. Alors $P(X)$ est une solution du problème ssi

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \tag{5}$$

Supposons tout d'abord que $a_n = 0$. Soit alors i minimal tel que $a_{n-i} \neq 0$. On a donc $P(X) = X^i(X^{n-i} + a_1 X^{n-i-1} + \cdots + a_{n-i-1})$ et ainsi (5) est vérifiée si et seulement si $Q(X) = X^{n-i} + a_1 X^{n-i-1} + \cdots + a_{n-i-1}$ est constant ou est lui-même une solution du problème. Le premier cas correspond à $P(X) = X^n$, qui convient bien.

On supposera donc dans ce qui suit que $P(X)$ est une solution avec $a_n \neq 0$. Dans ces conditions, on en déduit tout de suite que l'on ne peut avoir $X + a_1 = X - a_1$ et donc qu'il n'y a pas de polynôme de degré 1 qui soit solution. On suppose donc que $n \geq 2$. De $P(0) = a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i$, on déduit alors que

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{n-1} a_i = 1 \tag{6}$$

Et, puisque les a_i sont des entiers, on a $a_i = 1$ ou $a_i = -1$ pour tout $i \leq n-1$. On note k le nombre d'entre eux qui valent -1 (et donc $0 \leq k \leq n-1$). On peut noter que (6) montre alors que k et n ont la même parité. Les relations entre coefficients et racines conduisent à

$$-a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + (n-1-k) - k,$$

d'où

$$a_n = 2k - n \qquad \text{ou} \qquad a_n = 2k - n + 2 \tag{7}$$

Pour $n = 2$, puisque $a_2 \neq 0$ et que k doit être pair et ne pas dépasser 1, la seule possibilité est $k = 0, a_1 = 1, a_2 = -2$, et donc $P(X) = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$, qui est bien solution.

On suppose maintenant que $n \geq 3$. Alors

$$a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-1-k)(n-2-k)}{2} - k(n-1-k)$$

et donc

$$2a_2 = 2a_n(n-1-2k) + n^2 + 4k^2 - 4kn - 3n + 4k + 2 \tag{8}$$

Compte-tenu de (7), deux cas se présentent :

- Si $a_n = 2k - n$: De (8), on tire $(n-2k)^2 + n = 2 - 2a_2$, avec $a_2 = 1$ ou $a_2 = -1$. Donc $a_2 = -1$ et, puisque $n - 2k = -a_n \neq 0$, la seule possibilité est $n = 3$ et $(n-2k)^2 = 1$. De $k \leq n-1$ et de même parité que n, on déduit que $k = 1$, puis que $a_1 = 1$ et $a_3 = -1$, d'où $P(X) = X^3 + X^2 - X - X = (X+1)^2(X-1)$, qui est bien solution.
- Si $a_n = 2k - n + 2$: Comme ci-dessus, on obtient cette fois

  $$(n-2k-2)^2 + n = 2 - 2a_2,$$

  et donc $a_2 = -1, n = 3, k = 1, a_1 = 1, a_3 = 1$, d'où $P(X) = X^3 + X^2 - X + 1 \neq (X-1)^2(X+1)$, qui n'est pas solution.

En définitive, les solutions du problème sont les polynômes $P(X) = X^n$ pour $n \geq 1$, $P(X) = X^n(X^2 + X - 2)$ ou $P(X) = X^n(X^3 + X^2 - X - X)$ pour $n \geq 0$.

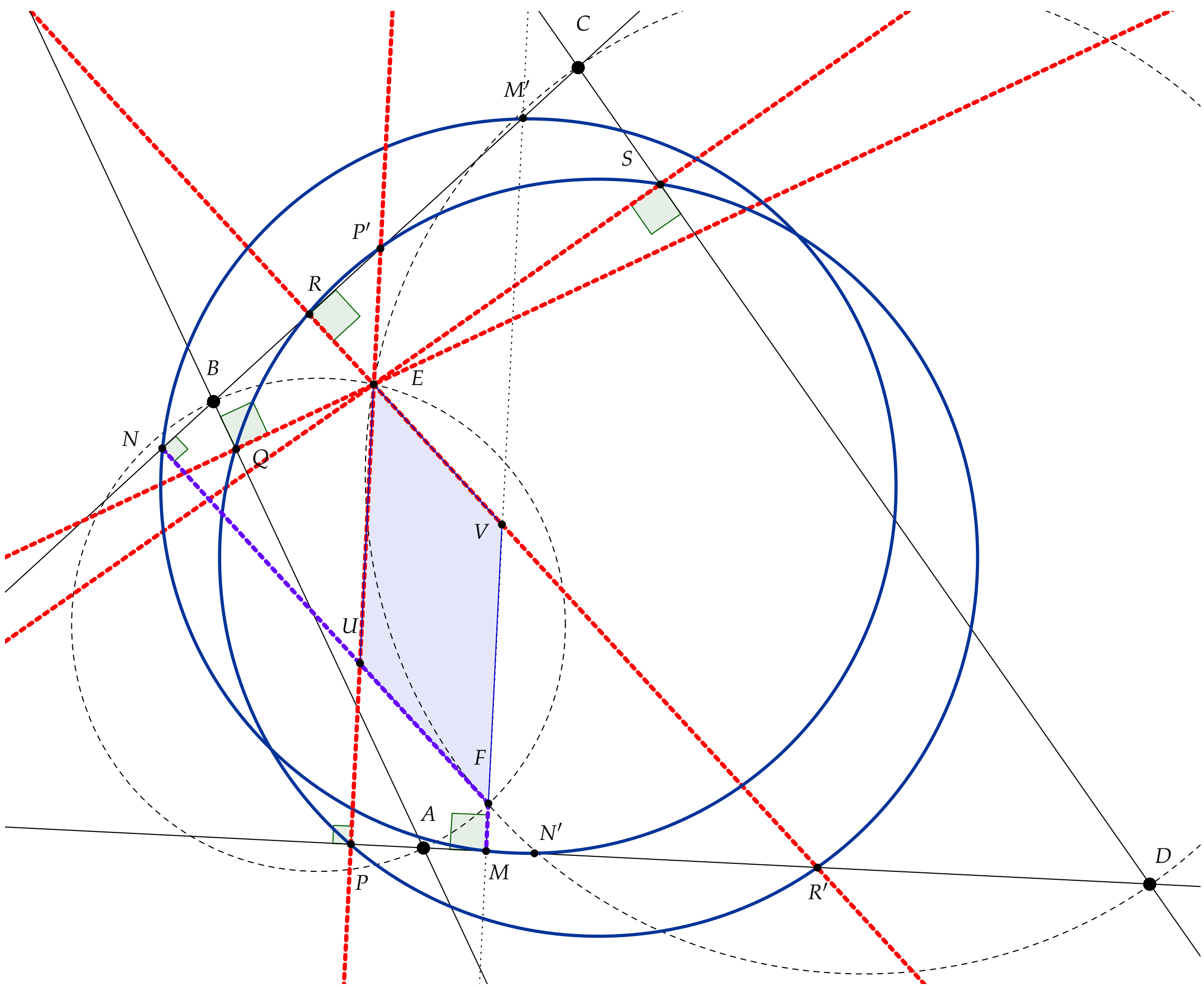
■

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. On suppose que les cercles de diamètre $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en deux points E et F situés à l'intérieur de $ABCD$. Soit Γ_E le cercle qui passe par les projetés orthogonaux de E sur (AB), (BC) et (CD), et Γ_F le cercle qui passe par les projetés orthogonaux de F sur (CD), (DA) et (AB).

Prouver que le milieu de $[EF]$ appartient à la droite passant par les deux points d'intersection de Γ_E et Γ_F.

Solution.



Soient P, Q, R, S les projections de E sur les droites $(DA), (AB), (BC), (CD)$. Les points P et Q appartiennent au cercle de diamètre $[AE]$ de sorte que $\widehat{QPE} = \widehat{QAE}$. De même, $\widehat{QRE} = \widehat{QBE}$. Ainsi :

$$\widehat{QPE} + \widehat{QRE} = \widehat{QAE} + \widehat{QBE} = 90^\circ.$$

De même, on montre que $\widehat{QPS} + \widehat{QRS} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Ainsi, les points P, Q, R, S appartiennent à Γ_E. De même, les projetés orthogonaux de F sur les côtés de $ABCD$ sont sur Γ_F.

Soit K le point d'intersection de (AD) et (BC). Sans perte de généralité, on suppose que $A \in [DK]$. On voit facilement que $\widehat{CKD} < 90^\circ$ (sinon le cercle de diamètre $[CD]$ couvre entièrement $ABCD$). Les droites (EP) et (BC) s'intersectent donc en un point P' et les droites (ER) et (AD) en un point R'. Montrons que P' et R' sont sur Γ_E. Par cocyclicité des points R, E, Q, B :

$$\widehat{QRK} = \widehat{QEB} = 90^\circ - \widehat{QBE} = \widehat{QAE} = \widehat{QPE}.$$

Donc $\widehat{QRK} = \widehat{QPP'}$, ce qui implique que $P' \in \Gamma_E$. De même, $R' \in \Gamma_E$.

De même, soient M et N les projections respectives de F sur (AD) et (BC), et soient M' le point d'intersection de (FM) et (BC) et N' le point d'intersection de (FN) et (AD). En utilisant les mêmes arguments que précédemment on voit que M' et N' sont sur Γ_F.

Soient finalement U l'intersection de (NN') avec (PP') et V l'intersection de (MM') avec (RR'). Comme les angles en N et P sont droits, N, N', P, P' sont cocycliques. La puissance de U par rapport au cercle passant par ces points vaut donc :

$$UN \cdot UN' = UP \cdot UP'.$$

Ainsi, U appartient à l'axe radical de Γ_E et Γ_F. De même V appartient à cet axe radical. Or $EUFV$ est un parallelogramme, ce qui implique que (UV) coupe $[EF]$ en son milieu.

$\blacksquare$