OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE SÉLECTION

DIMANCHE 11 MARS 2012

DURÉE : 4 HEURES 30 MINUTES

Instructions

- ▷ On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.

  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes.** Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.

- ▷ Chacun des trois problèmes est noté sur 7. Il est possible de les traiter dans n'importe quel ordre.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Énoncés

Exercice 4

Soit $k > 1$ un entier. Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est dite *k-tastrophique* lorsque pour tout entier $n > 0$, on a $f_k(n) = n^k$ où f_k est la k-ième itérée de f :

$$f_k(n) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(n).$$

Pour quels k existe-t-il une fonction k-tastrophique ?

Exercice 5

Déterminer tous les polynômes $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, non constants et à coefficients entiers, dont les racines sont exactement les nombres $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ (avec multiplicité).

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. On suppose que les cercles de diamètre $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en deux points E et F situés à l'intérieur de $ABCD$. Soit Γ_E le cercle qui passe par les projetés orthogonaux de E sur $(AB), (BC)$ et (CD), et Γ_F le cercle qui passe par les projetés orthogonaux de F sur $(CD), (DA)$ et (AB).

Prouver que le milieu de $[EF]$ appartient à la droite passant par les deux points d'intersection de Γ_E et Γ_F.

* * *

fin