OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE SÉLECTION

SAMEDI 10 MARS 2012

DURÉE : 4 HEURES 30 MINUTES

Instructions

- ▷ On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.

  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes.** Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.

- ▷ Chacun des trois problèmes est noté sur 7. Il est possible de les traiter dans n'importe quel ordre.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Énoncés

Exercice 1

Soient n et k deux entiers strictement positifs. On considère une assemblée de k personnes telle que, pour tout groupe de n personnes, il y en ait une $(n+1)$-ième qui les connaisse toutes (si A connaît B alors B connaît A).

1) Si $k = 2n+1$, prouver qu'il existe une personne qui connaît toutes les autres.
2) Si $k = 2n+2$, donner un exemple d'une telle assemblée dans laquelle personne ne connaît tous les autres.

Exercice 2

Soit ABC un triangle acutangle avec $AB \neq AC$. On note Γ son cercle circonscrit, H son orthocentre et O le centre de Γ. Soit M le milieu de $[BC]$. La droite (AM) recoupe Γ en N et le cercle de diamètre $[AM]$ recoupe Γ en P.

Prouver que les droites $(AP), (BC), (OH)$ sont concourantes si, et seulement si, $AH = HN$.

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $a, b, c \geq 1$ tels que :

$$a^p + b^p = p^c.$$

* * *

fin