OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE EN TEMPS LIMITÉ

JANVIER 2011

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

▷ On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.

Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes.** Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Chacun des quatre problèmes est noté sur 7. Il est possible de les traiter dans n'importe quel ordre.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Énoncés

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercice 1

Dans le plan on se donne 2011 points deux à deux distincts colorés soit en bleu, soit en rouge.

(i) On suppose que pour tout point bleu le disque de centre ce point et de rayon 1 contienne exactement deux points rouges. Quel est le plus grand nombre possible de points bleus ?

(ii) On suppose que pour tout point bleu le cercle de centre ce point et de rayon 1 contienne exactement deux points rouges. Quel est le plus grand nombre possible de points bleus ?

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(ab) = f(a+b)$ pour tous nombres irrationnels a et b.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. On note Δ_1 et Δ_2 les images de la droite (AB) par les symétries dont les axes sont respectivement les bissectrices intérieures de $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$. Soit P l'intersection de Δ_1 et Δ_2.

Prouver que (OP) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 4

Soit a, b, c, d des entiers naturels tels que $0 < |ad - bc| < \min(c, d)$.

Prouver que pour tous entiers $x, y > 1$ premiers entre eux, le nombre $x^a + y^b$ n'est pas divisible par $x^c + y^d$.

* * *

fin