OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES
2011-2012

ÉPREUVE EN TEMPS LIMITÉ DE JANVIER - CORRIGÉ

Exercice 1

Dans le plan on se donne 2011 points deux à deux distincts colorés soit en bleu, soit en rouge.

(i) On suppose que pour tout point bleu le disque de centre ce point et de rayon 1 contienne exactement deux points rouges. Quel est le plus grand nombre possible de points bleus ?

(ii) On suppose que pour tout point bleu le cercle de centre ce point et de rayon 1 contienne exactement deux points rouges. Quel est le plus grand nombre possible de points bleus ?

Solution.

(i) S'il existe un point bleu, il doit exister au moins deux points rouges donc il ne peut y avoir plus de 2009 points bleus.

Réciproquement, si l'on considère 2009 disques de rayon 1 ayant un intérieur commun à tous qui soit non vide, il suffit de marquer deux points rouges dans cette partie commune et de marquer en bleu les centres de ces 2009 disques pour obtenir une configuration à 2009 points bleus qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Le maximum cherché est donc 2009.

(ii) Considérons une configuration de r points rouges et b points bleus vérifiant les conditions de l'énoncé, avec $r + b = 2011$. Comme ci-dessus, on a $r \geq 2$.

Si R_1 et R_2 sont deux points rouges distincts, on note $n(R_1, R_2)$ le nombre de points bleus qui sont centres de cercles de rayon 1 passant par R_1 et R_2.

Puisque tout cercle de rayon 1 et centré en un point bleu passe par exactement deux points rouges, cela assure que :

- tout point bleu est compté au moins une fois dans un certain $n(R_1, R_2)$,
- si $\{R_1, R_2\}$ et $\{R'_1, R'_2\}$ sont deux paires distinctes de points rouges, alors les points bleus comptés dans $n(R_1, R_2)$ sont deux à deux distincts des points bleus comptés dans $n(R'_1, R'_2)$.

Ainsi, chaque point bleu est compté une et une seule fois dans un certain $n(R_1, R_2)$. En sommant sur les paires de points rouges, il vient

$$\sum_{\{R_1,R_2\}} n(R_1, R_2) = b.$$

D'autre part, pour toute paire de points du plan, il n'existe qu'au plus deux cercles de rayon 1 qui passent par ces deux points, on a donc $n(R_1, R_2) \leq 2$ pour toute paire R_1, R_2 de points rouges. Comme il y a $r(r-1)/2$ paires de points rouges, on a alors :

$$b = \sum_{\{R_1,R_2\}} n(R_1, R_2) \leq \sum_{\{R_1,R_2\}} 2 = r(r-1),$$

et donc $r(r-1) \geq 2011 - r$, ou encore $r^2 \geq 2011$. On en déduit facilement que $r \geq 45$, et donc que $b \leq 1966$.

Réciproquement, considérons 45 points rouges, tous situés sur un même segment de longueur 1. Deux quelconques de ces points rouges appartiennent alors toujours à deux cercles de rayon 1. On trace seulement 1966 de ces cercles (on pourrait en tracer $1980 = 45 \times 44$), et on marque en bleu les centres de ces cercles. Il est facile de vérifier que l'on obtient ainsi une configuration à 2011 points colorés qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Le maximum cherché est donc 1966. ■

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(ab) = f(a+b)$ pour tous nombres irrationnels a et b.

Solution. Il est clair que les fonctions constantes conviennent. Montrons que ce sont les seules. Soit u un nombre irrationnel positif. Alors $\sqrt{u}$ est irrationnel. En prenant $(a,b) = (\sqrt{u}, -\sqrt{u})$, il vient $f(-u) = f(0)$. En prenant $(a,b) = (-\sqrt{u}, -\sqrt{u})$, il vient $f(u) = f(-2\sqrt{u}) = f(0)$ car $-2\sqrt{u}$ est un nombre irrationnel négatif. Ainsi, on a $f(u) = f(0)$ pour $u \notin \mathbb{Q}$.

Maintenant soit $r \in \mathbb{Q}$ non nul, et écrivons $r = \sqrt{2} + (r - \sqrt{2})$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, il est clair que $\sqrt{2}, r - \sqrt{2}, \sqrt{2}(r - \sqrt{2})$ sont tous irrationnels. Alors :

$$f(r) = f(\sqrt{2}(r - \sqrt{2})) = f(0)$$

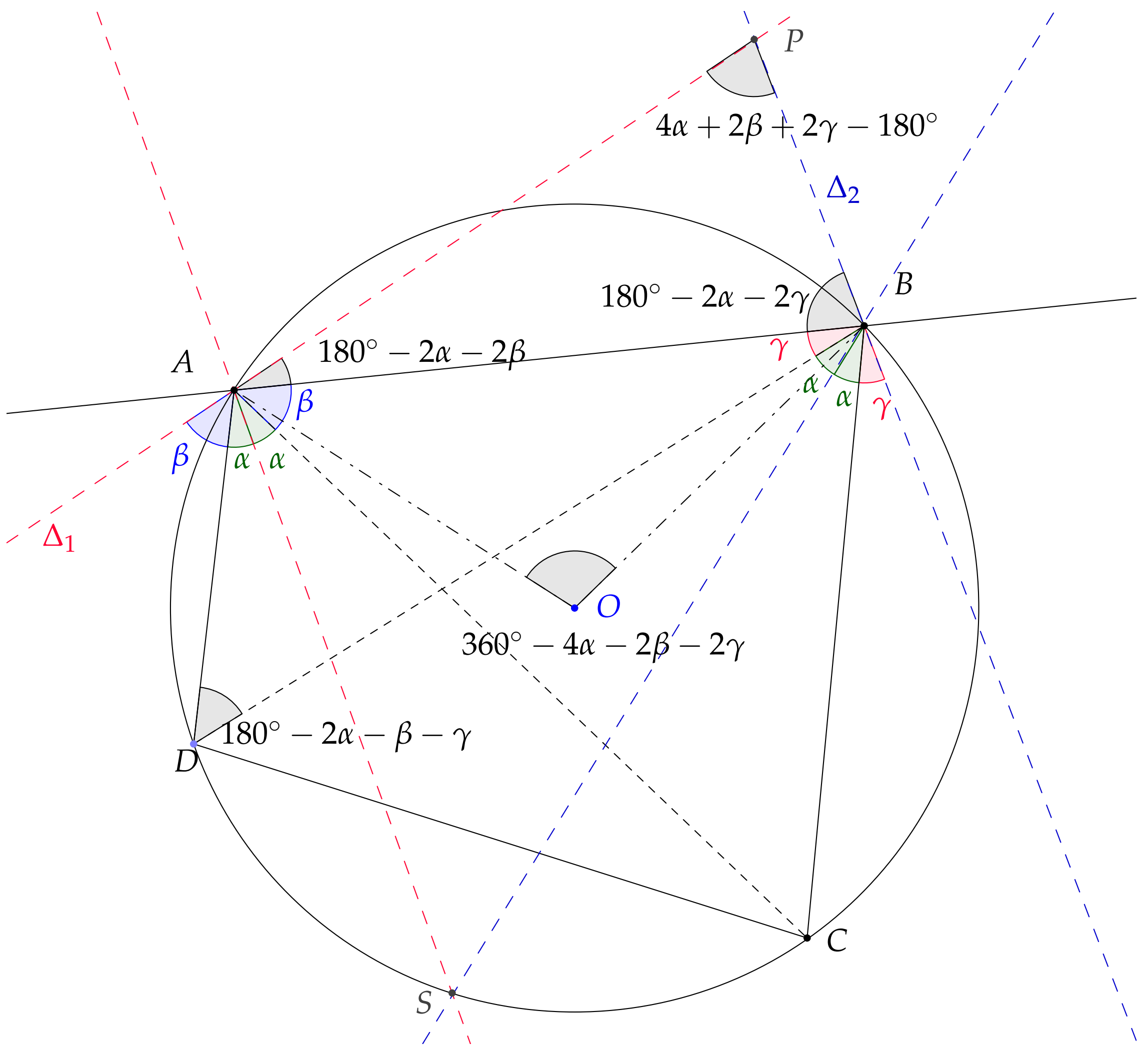
d'après ce qui précède. Donc f est constante. ■

Exercice 3

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O. On note Δ_1 et Δ_2 les images de la droite (AB) par les symétries dont les axes sont respectivement les bissectrices intérieures de $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$. Soit P l'intersection de Δ_1 et Δ_2.

Prouver que (OP) et (CD) sont perpendiculaires.

<u>*Solution.*</u> On traite uniquement le cas où O est à l'intérieur de $ABCD$ (les autres cas étant similaires). D'après les propriétés de l'angle inscrit, les deux bissectrices considérées s'intersectent en un point du cercle noté S, qui est le milieu de l'arc CD. En particulier, (OS) et (CD) sont perpendiculaires. Il suffit donc de montrer que P, O, S sont alignés.



Une chasse aux angles (voir figure) fournit $\widehat{APB} + \widehat{AOB} = 180°$. Ainsi, A, P, B, O sont cocycliques. Alors $\widehat{POB} = \widehat{PAB} = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Comme A, B, C, D sont cocycliques, on a $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\beta$ et $\widehat{COS} = 2\widehat{SBC} = 2\alpha$. Ainsi, $\widehat{POB} + \widehat{BOC} + \widehat{COS} = 180°$. Les points P, O, S sont donc alignés, ce qui conclut. ■

Exercice 4

Soit a, b, c, d des entiers naturels tels que $0 < |ad - bc| < \min(c, d)$.

Prouver que pour tous entiers $x, y > 1$ premiers entre eux, le nombre $x^a + y^b$ n'est pas divisible par $x^c + y^d$.

Solution. Par l'absurde : on suppose que les entiers $x, y > 1$ sont premiers entre eux et que $s = x^c + y^d$ divise $x^a + y^b$. On a alors :

$$x^c = -y^d \mod s \qquad \text{et} \qquad x^a = -y^b \mod s.$$

D'où

$$x^{ad} = (-1)^d y^{bd} \mod s \qquad \text{et} \qquad x^{bc} = (-1)^c y^{bd} \mod s.$$

Ainsi $x^{ad} = (-1)^{b-d} x^{bc} \mod s$.

Or, puisque $c > 0$ et que x et y sont premiers entre eux, on a clairement x et s premiers entre eux. On peut donc diviser par $x^{\min(ad,bc)}$ dans la congruence ci-dessus, et il vient $x^{|ad-bc|} = (-1)^{b-d} \mod s$. De même, on a $y^{|ad-bc|} = (-1)^{a-c} \mod s$.

On en déduit que :

$$x^{|ad-bc|} + y^{|ad-bc|} \text{ ou } x^{|ad-bc|} - y^{|ad-bc|} \text{ est divisible par } s. \tag{1}$$

Mais on a $x^{|ad-bc|} - y^{|ad-bc|} \neq 0$ car x et y sont premiers entre eux, supérieurs à 1, et $|ad - bc| > 0$. De plus $|ad - bc| < \min(c, d)$ donc on a les inégalités

$$0 < |x^{|ad-bc|} - y^{|ad-bc|}| < x^{|ad-bc|} + y^{|ad-bc|} < x^c + y^d = s,$$

ce qui contredit (1). ■