Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 4 octobre 2017

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les exercices pour le collège sont ceux de 1 à 5, et ceux pour le lycée sont ceux de 4 à 8.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
olymp@animath.fr

Énoncés des exercices

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collège

Exercice 1. On peut écrire 225 comme la somme de 3 nombres entiers consécutifs : $225 = 74 + 75 + 76$.
a) Peut-on l'écrire comme la somme de 5 nombres entiers consécutifs ?
b) Peut-on l'écrire comme la somme de 4 nombres entiers consécutifs ?

Exercice 2. Pour tout entier n strictement positif, on définit a_n comme étant le dernier chiffre de la somme des chiffres du nombre 20052005...2005, (on écrit n fois "2005" d'affilée). Par exemple, $a_1 = 7$ et $a_2 = 4$.
a) Quels sont les entiers strictement positifs n tels que $a_n = 0$?
b) Calculer $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2005}$.

Exercice 3. Le foot à trois personnes se joue en phases successives : un joueur est gardien pendant que les deux autres, appelés "joueurs de champ", tentent de marquer un but. Dès qu'un joueur marque, la phase se termine et il devient gardien pour la phase suivante. Amandine, Bobby et Charles jouent à ce jeu. La partie terminée, ils se souviennent qu'Amandine était 12 fois joueuse de champ, Bobby 21 fois joueur de champ, et Charles 8 fois gardien.
a) Combien y a-t-il eu de phases au total ?
b) Qui a marqué le sixième but ?

Énoncés communs

Exercice 4. a) Trouver un entier n strictement positif tel que si on écrit n^2 et on en retire les deux derniers chiffres, le nombre obtenu est encore le carré d'un nombre entier.
b) Trouver tous les entiers n strictement positifs et non multiples de 10 tels qu'en écrivant n^2 et en supprimant les deux derniers chiffres, on obtienne encore le carré d'un nombre entier (on considère qu'un nombre à zéro chiffres vaut zéro).

Exercice 5. On construit la figure suivante : on trace un triangle ABC isocèle en A, puis la droite (d) perpendiculaire à (BC) passant par C. On choisit un point D sur (d). On place E de sorte que $AEDB$ soit un parallélogramme. Enfin, M est le point d'intersection de (AE) et (d). Prouver que M est le milieu de $[AE]$.

Énoncés lycée

Exercice 6. Les entiers strictement positifs x, y et z vérifient les deux équations suivantes : $x + 2y = z$ et $x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$. Trouver toutes les valeurs que peut prendre le produit xyz.

Exercice 7. Sur un cercle, on écrit 2012 nombres. Chacun d'entre eux vaut 1 ou -1. Soit S leur somme. On suppose qu'il n'existe pas 10 nombres consécutifs sur le cercle tels que leur somme fasse 0. Quelles sont les valeurs que peut prendre S à cette condition ?

Exercice 8. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > BC$. Soit E le projeté orthogonal de B sur (AC), Γ le cercle passant par A et E et dont le centre se trouve sur (AD). Soit F le point d'intersection de Γ et $[CD]$. Prouver que (BF) est la bissectrice de $\widehat{AFC}$.