Stage Animath Juillet 2002
Stratégies de base

1 Le principe des tiroirs

Le principe des tiroirs a un énoncé simple : si on dispose plus de $k+1$ objets parmi k tiroirs, alors un tiroir contient au moins deux objets. On peut en donner une version plus évoluée. On note $\lceil a/b \rceil$ le résultat de la division de a par b arrondi à l'entier supérieur. Alors :

Principe des tiroirs – Si on dispose n objets parmi k tiroirs, alors un tiroir contient au moins $\lceil n/k \rceil$ objets.

L'arrondi à l'entier supérieur fait bien sûr toute la force de la chose, surtout si $n = k+1$...

Exercice 1 – Paris compte deux millions d'habitants. Un être humain a, au plus, 600 000 cheveux sur la tête. Au vu de ces données (et sachant cela seulement), combien de Parisiens peut-on trouver qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ?

Exercice 2 – On a jeté de la peinture noire sur le sol blanc d'une pièce carrée de 2 mètres sur 2, n'importe comment. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur dont la distance est exactement un mètre.

Exercice 3 – Démontrez que, parmi les stagiaires d'un stage Animath, il en existe deux qui connaissent exactement le même nombre d'autres stagiaires (pas forcément les mêmes stagiaires, mais seulement le même nombre). [On suppose que la relation « se connaître » est réciproque : si a connaît b, alors b connaît a.]

Exercice 4 – (Difficile.) Un maître d'échecs joue au moins une partie par jour, mais au plus dix parties par semaine. Montrer que, s'il joue assez longtemps, on peut trouver une série de jours consécutifs durant lesquels il a joué exactement 23 parties. (Indication : soit a_i le nombre total de parties jouées jusqu'au jour i, on cherche i et j tels que $a_j = a_i + 23$.)

2 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est la version mathématique du raisonnement « de proche en proche ». Il s'énonce comme suit :

Principe de récurrence – Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n \ldots$ des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un n quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition par récurrence : si on définit un objet x_0 puis si, pour tout entier n, on donne une manière de définir l'objet x_{n+1} à partir de l'objet x_n, alors les objets x_n sont bien définis pour tout n.

Une démonstration par récurrence contient donc toujours deux étapes :

- L'initialisation : c'est la vérification de P_0. Il ne faut jamais l'oublier, sinon on raisonne sur du vide !

– La récurrence proprement dite : on suppose que la propriété P_n est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer P_{n+1} à partir d'elle.

Exercice 5 – On se donne deux nombres r et a. On pose $S_0 = a$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on définit $S_{n+1} = S_n + r$. Proposez une formule simple pour S_n et démontrez-la par récurrence.

Exercice 6 – On définit $T_0 = 0$ et, pour tout n, on pose $T_n = T_{n-1} + n$. Les nombres T_n sont appelés nombres triangulaires (pourquoi ?). Montrer que, pour tout n, on a $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On n'est pas obligé de commencer à 0. La récurrence peut très bien, par exemple, commencer à 2 ou à 3, si les premiers termes sont des exceptions...

Exercice 7 – On définit $S_1 = 1/2$ et pour tout $n \geqslant 2$, on pose $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Donner une formule simple pour S_n.

Les raisonnements par récurrence peuvent présenter des pièges, en particulier lorsque la récurrence est mal initialisée. Que pensez-vous de la démonstration suivante : on va montrer que, dans tout groupe de n personnes, s'il y a au moins une femme alors il n'y a que des femmes. Cette propriété est bien sûr vraie pour $n = 1$: si dans un groupe d'une seule personne il y a une femme, alors il n'y a que des femmes. Supposons donc que la propriété est vraie pour tout groupe de n personnes. On va montrer qu'alors elle est vraie pour tout groupe de $n + 1$ personnes. Soit donc un groupe de $n + 1$ personnes contenant une femme. Retirons l'une des personnes qui ne soit pas la femme, on a un groupe à n personnes. Ce groupe contient une femme. Par hypothèse de récurrence, ce groupe ne contient que des femmes. Rajoutons la personne qu'on avait enlevée : si c'est une femme on a terminé. Sinon, enlevons du groupe une des n autres femmes. On obtient alors un nouveau groupe de n personnes contenant au moins une femme, et par hypothèse de récurrence il ne contient que des femmes. On a donc prouvé qu'il n'y a que des femmes. Où est l'erreur ?

Exercice 8 – Montrer que la somme des angles d'un polygone non croisé à n côtés ($n \geqslant 3$) vaut $(n-2)\pi$.

Dans une récurrence, pour montrer que P_{n+1} est vraie, il arrive que P_n ne suffise pas mais qu'on ait besoin, par exemple, de connaître P_n et P_{n-1}, ou encore de savoir que toutes les propositions $P_1, \ldots, P_n$ sont vraies pour en déduire P_{n+1}. Cette situation est appelée récurrence forte.

Principe de récurrence forte – Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n \ldots$ des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un n quelconque, si toutes les propositions $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont vraies, alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Cela donne immédiatement une variante de la définition par récurrence : si on a défini un objet x_0 et que, connaissant les objets $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on sait définir l'objet suivant x_{n+1}, alors tous les objets x_n sont bien définis.

Exercice 9 – Sur une île déserte vit, à l'année 0, un couple de lapins. Chaque année, les couples de lapins âgés d'au moins deux ans se reproduisent et engendrent un nouveau couple de lapins. Ainsi, l'année 0 il y a un couple ; l'année 1, un couple ; l'année 2, deux couples (le premier s'est reproduit) ; l'année 3, trois couples (encore à cause du premier) ; l'année 4, cinq couples (les deux premiers couples se sont reproduits), etc.

– On note F_n le nombre de couples l'année n. Donner une formule simple pour définir F_n par récurrence à partir de F_{n-1} et F_{n-2}. La suite de nombres ainsi définie est très connue et s'appelle la suite de Fibonacci.

- Montrer que, pour tout n, on a la relation $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$.
- On se trouve face à un escalier à n marches, et on a des jambes assez grandes pour monter les marches par une ou par deux, mais pas par trois. Montrer que le nombre de manières différentes qu'on a de monter l'escalier est égal à F_n. (Par exemple, on peut monter un escalier à trois marches de trois manières : une par une, ou une marche puis deux, ou deux marches puis une.)

Parfois, il peut être utile de ne pas essayer de prouver directement la propriété demandée, mais d'en prouver une qui soit un peu plus forte...

Exercice 10 – Montrer que, pour tout n, on a l'inégalité

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

(Indication : montrer la propriété en remplaçant 2 par $2 - 1/n$ dans le terme de droite.)

3 La descente infinie

La descente infinie est le principe selon lequelle il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs. Ce principe est redoutable pour prouver qu'il n'existe pas de solution à certains problèmes faisant intervenir des nombres entiers : si à partir d'une solution, on sait en fabriquer une autre strictement plus petite mais toujours en nombres entiers, et qu'on peut recommencer indéfiniment, alors le problème initial n'a pas de solution...

Exercice 11 – Résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$. (Indication : remarquer que x est pair.)

Autre formulation du même principe : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. De manière générale, c'est toujours une bonne stratégie, face à un ensemble de possibilités, de commencer par examiner la plus petite : « soit x la plus petite solution », ou encore « soit p le plus petit facteur premier de n »... sont de bons départ dans des problèmes d'arithmétique.

4 Les invariants et symétries

Le principe des invariants est assez vague, c'est plutôt une méthode qu'un énoncé mathématique précis.

Principe des invariants – Si une quantité est conservée par une certaine classe de transformations, alors il est impossible de passer d'une situation à une autre où la quantité est différente en utilisant seulement des transformations de cette classe.

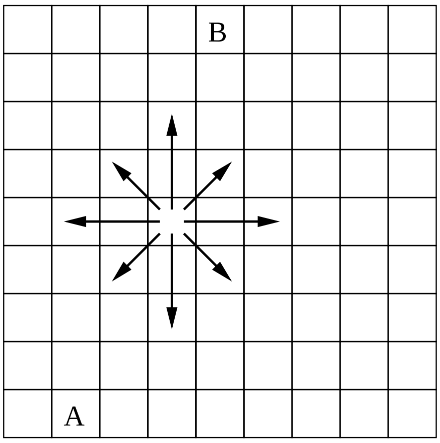
Ce sont souvent les seuls moyens qu'on a pour prouver que certaines choses sont impossibles. (Prouver que quelque chose est possible est souvent plus facile : il suffit de donner un exemple.)

La parité est souvent l'un des meilleurs invariants que l'on puisse trouver...

Exercice 12 – Peut-on recouvrir un échiquier 9×9 avec des dominos 1×2 ?

Exercice 13 – Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en trois parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de cent parties ?

Exercice 14 – Une grenouille domestique a été placée par son maître dans une salle de bains carrelée où sont installés un abri (A) et une baignoire (B). La grenouille saute de carreau en carreau à la recherche de l'entrée la baignoire pleine d'eau. Elle ne sait sauter que des manières indiquées par les flèches sur le dessin :



Arrivera-t-elle à passer de son abri à la baignoire ?

Exercice 15 – Est-il possible de répartir les entiers $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun, de sorte que dans chaque groupe l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 16 – 22 arbres sont mis en rond ; sur chaque arbre se pose un corbeau. Toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible pour les corbeaux, après un certain nombre de minutes, de se rassembler tous sur le même arbre ?

Les symétries sont un cas particulier d'invariant :

Principe de symétrie – Si une situation est symétrique et qu'on ne peut la transformer qu'en utilisant des transformations symétriques, alors on ne peut pas arriver à une situation non symétrique.

Exercice 17 – Un jeton est posé sur chaque case d'un damier 7×7. Les cases du damier sont repérées de la manière suivante : la case centrale a les coordonnées $(x = 0, y = 0)$; la coordonnée x augmente de 1 vers la droite et la coordonnée y augmente de 1 vers le haut. Ainsi la case en bas à gauche est la case $(x = -3, y = -3)$ et la case en haut à droite, $(x = 3, y = 3)$. Deux joueurs prennent, tour à tour, des jetons en respectant la règle suivante :

- si le premier joueur prend un jeton situé sur la case $(x = a, y = b)$, il doit aussi prendre les jetons des cases $(x = -b, y = a)$, $(x = -a, y = -b)$ et $(x = b, y = -a)$;
- si le deuxième joueur prend un jeton situé sur la case $(x = a, y = b)$, il doit aussi prendre les jetons des cases $(x = -a, y = b)$, $(x = -a, y = -b)$ et $(x = a, y = -b)$.

Le joueur qui a gagné est le premier qui arrive à atteindre la situation où il reste un seul jeton, situé sur la case $(x = 1, y = 0)$. Un des deux joueurs peut-il gagner ?

Les invariants peuvent aussi être de véritables quantités numériques définies à partir des données.

Exercice 18 – À partir d'un triplet (a, b, c) on peut effectuer l'opération suivante :

- on choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y ;
- on remplace x par $(x-y)/\sqrt{2}$ et y par $(x+y)/\sqrt{2}$, en laissant le troisième nombre inchangé.

Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

La parité revient à diviser les nombres entiers en deux couleurs alternativement : les multiples de 2 d'une couleur, les multiples de 2 plus 1 d'une autre couleur. On peut faire la même chose avec 3 : on colorie successivement les entiers en trois couleurs, à savoir d'un côté les multiples de 3, d'un autre côté les multiples de 3 plus 1, d'un troisième côté les multiples de 3 plus 2. Si deux nombres a et b sont de la même couleur, on dit que a est congru à b modulo 3. On peut aussi définir des congruences modulo 4, ou modulo n'importe quel nombre.

Très souvent, dans des problèmes, une certaine quantité reste invariante modulo n pour un certain n ; cela veut dire qu'elle ne change que par des multiples de n. Chercher un n tel que certaines quantités ne changent que par des multiples de n fournit très souvent de bons invariants. La valeur de n à tester peut parfois être devinée par l'énoncé (y a-t-il 5 sortes d'objets ? regardez modulo 5, peut-être modulo 4 ou 6...).

Exercice 19 – Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur il ne se passe rien. Au bout d'un an tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ? (Il faut non seulement déterminer la couleur, mais aussi prouver que c'est la seule possible.)

Exercice 20 – On dispose d'une pile de 1001 jetons. On utilise les règles suivantes :
- au premier coup, on choisit un jeton que l'on élimine du jeu, et on sépare la pile en deux piles arbitraires ;
- puis, à chaque coup, on choisit un jeton que l'on élimine du jeu, et on sépare une pile (pas forcément celle dont on a extrait le jeton) en deux piles arbitraires.

Peut-on se débrouiller pour qu'à un moment donné on n'ait que des piles de trois jetons ? (Attention : si une pile ne comporte qu'un jeton et qu'on retire ce jeton, on considère qu'on a désormais une pile à 0 jeton, et non que la pile a disparu.)

Un autre truc : dès qu'il est question de somme des chiffres, il faut penser à regarder modulo 9 : en effet, un nombre et la somme de ses chiffres sont toujours dans la même classe modulo 9 (c'est ce qui fait marcher la « preuve par 9 »).

Exercice 21 – On écrit successivement tous les nombres de 1 à un million. Puis, on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres. Puis on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des nombres à un chiffre. Quel chiffre apparaît le plus souvent ?

5 Comptage et inclusion-exclusion

Le principe d'inclusion-exclusion permet de compter le nombre d'objets qui vérifient la propriété A ou la propriété B, sachant que ces propriétés ne sont pas exclusives et peuvent être réalisées en même temps : il faut additionner le nombre d'objets ayant A et le nombre d'objets ayant B, puis retirer le nombre d'objets ayant à la fois A et B (ces objets ont été comptés deux fois).

On note $|A|$ le nombre d'éléments d'un ensemble A. Si A et B sont des ensembles, on note $A \cup B$ leur réunion (l'ensemble des objets appartenant à A ou à B — ou aux deux), et $A \cap B$ leur intersection (l'ensemble des objets appartenant à A et à B).

Principe d'inclusion-exclusion – On note $|A|$ le nombre d'objets d'un ensemble A. Si A, B, C sont des ensembles, alors on a :

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Exercice 22 – Démontrez ces relations (faites un dessin !), puis généralisez à la réunion de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$.

Exercice 23 – Combien y a-t-il de nombres à moins de quatre chiffres (de 0 à 9999) qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ? (Réponse : 4571.)

Exercice 24 – Un cube $20 \times 20 \times 20$ est divisé en 8000 cubes unités. On écrit un nombre dans chaque cube unité. Dans chaque ligne et dans chaque colonne de 20 petits cubes, parallèle à une des arêtes du cube, la somme des nombres fait 1. Dans un des petits cubes, le nombre écrit est 10. Par ce petit cube passent trois couches $1 \times 20 \times 20$ parallèles aux faces du cube. Trouver la somme de tous les nombres en-dehors de ces trois couches.

Moralité

Quelle que soit la situation, on gagne toujours à tester l'énoncé sur de petites valeurs des paramètres, à faire des essais. Cela peut donner une idée d'une formule de récurrence, ou bien permettre de distinguer ce qui différencie les cas qui marchent des cas qui ne marchent pas. Expérimentez !