[=[

STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2016

Cachan, 20 au 24 octobre 2016

Avant-propos

Le stage olympique junior de toussaint a été organisé à Cachan par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler des élèves de seconde et de collège,
sélectionnés entre autres d'après leur participation à diverses compétitions
comme le concours Kangourou
et aux précédentes activités olympiques d'Animath,
notamment la coupe Animath du 31 mai 2016,
et de leur donner les bases nécessaires
pour participer aux compétitions internationales.
Presque tous les stagiaires ont passé, le 5 octobre 2016,
le test de l'Olympiade Française de Mathématiques,
mais celui-ci était trop tardif pour être pris en compte dans notre sélection.
Cela dit, certains de nos stagiaires seront ainsi préparés
à plusieurs compétitions internationales de 2017,
dont la liste reste à préciser en fonction des possibilités d'Animath.

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.

Les Animatheux


Pierre Bornsztein


Guillaume Conchon-Kerjan


Colin Davalo


Linda Gutsche


Saeed Hadikhanloo

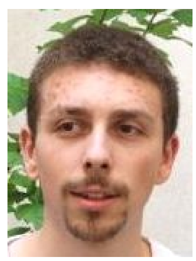

Vincent Jugé


Nathalie Kesler


Igor Kortchemski


Matthieu Lequesne


François Lo Jacomo


Antoine Martin


Gabriel Pallier

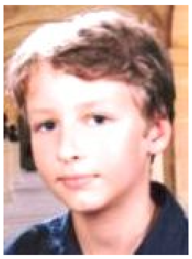

Eva Philippe


Matthieu Piquerez

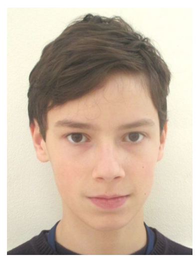

Alexander Semenov


Jean-Louis Tu

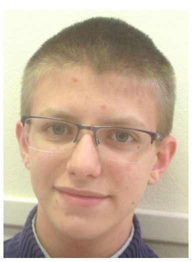
Les élèves

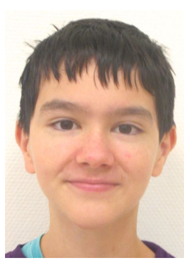

Sacha Arrouès-Paykin


Etienne Azerad


Hector Bouton

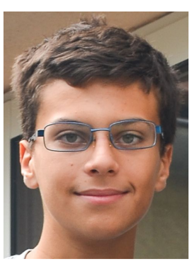

Justin Cahuzac


Clément Chapot


Loïc Chevalier


Mathis Degryse


Yaël Dilliès


Leonardo Finocchiaro


Aurélien Fourré


Barbara Francisco


Blanche Gatty-Marignac


Mouhammed Goddi

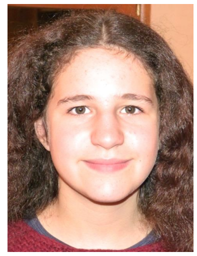

Romain Gross


Lucien Hua

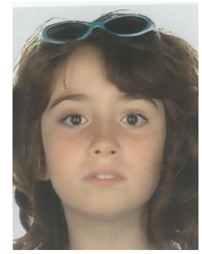

Cédric Jossart


Isaline Jouve


Léonie Kittel


Alexandra Kortchemski

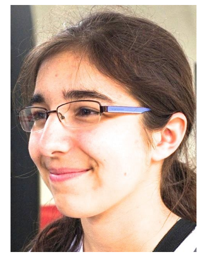

Evelyne Le Bezvoët


Emma Lesot


Charles Liu

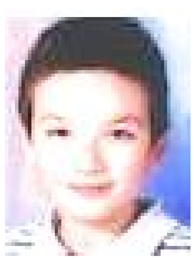

Anna Luchnikova


Marie Maignant


Auriane Martel


Etienne Massart

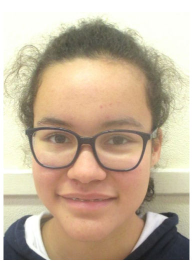

Tom Nahon


Edouard Nakatani


Roméo Nazaret


Julien Ouyang


Marie Peeters


Enora Petry

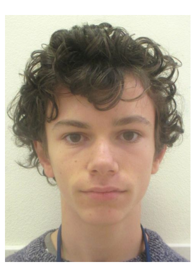

Xavier Pigé

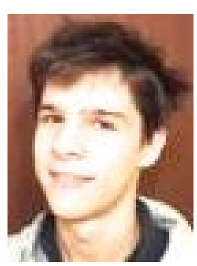

Adam Qrichi-Aniba


Michaela Rosinska


Lucas Toury


Kévin Verhaeghe


Mathis Wetterwald


Jean Zablocki


Emilie Zheng


Ilan Zysman

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour ce huitième stage olympique junior, nous avons accepté les élèves de seconde quel que soit leur âge, troisième et quatrième, et même un élève de cinquième. Parmi plus de soixante candidatures, nous avons ainsi admis 41 stagiaires, dont 18 de seconde, 16 de troisième, 5 de quatrième et 1 de cinquième (âge moyen 14,2 ans), venus de 13 Académies dont les Académies de Paris (7 élèves), Versailles (10 élèves), Grenoble (3 élèves), Lyon (3 élèves) et Montpellier (4 élèves) - et deux élèves de Belgique. La diversification géographique évolue curieusement, avec plus de Paris / Versailles (41%), moins de Lyon / Grenoble / Montpellier (24%), et pour la première fois, nous avions 14 filles, soit plus de 34% (1 de quatrième, 8 de troisième et 5 de seconde). C'est un record qui mérite d'être signalé !

Le premier jour, les stagiaires sont arrivés entre 9 h 30 et 12 h 45 : les cinq derniers ont raté la séance de présentation du stage. Nous avions prévu un accueil gare de Lyon par Eva Philippe pour trois élèves, un gare du Nord et gare de l'Est par Colin Davalo, facilité par le fait que tous les stagiaires et animateurs avaient envoyé d'avance leur photo pour le trombinoscope, ce qui permettait notamment de mieux les repérer à la gare. Malheureusement, ces photos nous sont parvenues dans des formats très différents, ce qui a quelque peu compliqué leur insertion dans le polycopié. 12 élèves ont dû être rephotographiés sur place. Pour en revenir à l'arrivée, d'autres stagiaires arrivaient dans d'autres gares (y inclus Massy et Marne la Vallée) et étaient accompagnés de parents. Après les formalités d'accueil par Nathalie Kesler et François Lo Jacomo, présentation du stage à 12 h. Nous accueillions une toute jeune animatrice, Linda Gutsche, qui avait été stagiaire l'an passé. Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial pour aider à répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe. Comme nous l'avions expérimenté lors du stage d'été, nous commencions par demander aux élèves dans quel groupe ils souhaitaient être et s'ils connaissaient les notions que nous comptions enseigner aux débutants, avant de vérifier leur acquis au moyen d'un exercice de géométrie et deux de stratégies de base, globalement faciles. Bon nombre d'élèves ont terminé avant l'heure, mais sans pour autant mériter la note maximale Nous avions également sous la main les performances des stagiaires à la coupe Animath de juin 2016, au test de l'OFM du 5 octobre 2016 ainsi qu'aux stages olympiques de Montpellier (août 2016) et Cachan (octobre 2015 et octobre 2014). La répartition dans les groupes fut terminée juste avant le dîner, vers 19 h, et c'est juste après dîner, à 20 h, que Vincent Jugé et Linda Gutsche ont présenté aux élèves la correction des exercices du test.

Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer, mais à 23 h, extinction des feux. Avec les 27 garçons, deux ou trois par chambre, nous occupions exactement toute l'aile Cachan pendant que les 14 filles, Linda et Vincent le premier soir, Eva les autres soirs, occupaient la moitié la plus éloignée de l'aile Bagneux. Nous n'avons pas utilisé la grande chambre avec ses quatre douches.

Vendredi soir, Cécile Gachet est venue spécialement pour présenter, succinctement, les olympiades et la préparation olympiques qui sont l'aboutissement logique du présent stage. Samedi, Gabriel Pallier a fait une conférence intitulée : comment jouer au morpion sur différentes surfaces ? Nous avons eu quelques difficultés avec le vidéo-projecteur, mais cela s'est finalement résolu. Et la dernière soirée, dimanche, était traditionnellement libre. Comme le stage commençait par un test (non noté), nous n'avons organisé qu'un second test le lundi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois journées de cours : géométrie le matin, stratégies de base (débutants) et combinatoire (avancés) l'après-midi (nous avions déjà expérimenté à Montpellier, avec le groupe A, l'alternance de chapitres, nous l'avons reprise systématiquement avec les deux groupes). Les énoncés du test n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants, et ils ont été confectionnés tardivement mais à temps. Lundi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié... et Antoine Martin venait pour quelques formalités administratives, remise des attestations et des factures, informations sur Animath... la fin du stage était prévue vers 16 h, mais un élève devait partir un peu avant.

I. DÉROULEMENT DU STAGE

		Débutants	Avancés
Jeudi	10h-12h	Arrivée et installation	
	12h-12h30	Présentation du stage	
	14h-16h	**Test initial**	
	20h	Correction du test initial	
Vendredi	Matin	Géométrie (François Lo Jacomo)	Géométrie (Vincent Jugé)
	Après-midi	stratégies de base (Colin Davalo)	combinatoire (Igor Kortchemski)
	20h30	**Les Olympiades ... (Cécile Gachet)**	
Samedi	Matin	Géométrie (Linda Gutsche)	Géométrie (Guillaume Conchon-Kerjan)
	Après-midi	Stratégies de base (Gabriel Pallier)	Combinatoire (Matthieu Piquerez)
	20h	**Comment jouer au morpion ... (Gabriel Pallier)**	
Dimanche	Matin	Géométrie (Aleksander Semenov)	Géométrie (François Lo Jacomo)
	Après-midi	Stratégies de base (Matthieu Lequesne)	Algèbre (Pierre Bornsztein)
Lundi	9h-12h	**Test final**	
	14h30	Correction du test final - clôture du stage	

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :
— Le site d'Animath : `www.animath.fr`
— Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Jeudi : Test initial

Vous allez être répartis en deux groupes : débutants et avancés. La répartition prendra en compte des informations que nous connaissons déjà (comme le test du 5 octobre, la coupe Animath du 31 mai), les informations que tu nous as données dans la "fiche récapitulative", mais aussi les réponses au questionnaire ci-dessous. Les deux groupes seront autant que possible équilibrés.

Vendredi, samedi et dimanche, deux chapitres seront présentés en alternance : géométrie le matin, combinatoire l'après-midi. En géométrie, le groupe débutant sera initié notamment à la "chasse aux angles", que les avancés devront avoir déjà abordée. En combinatoire, le groupe des débutants travaillera sur les stratégies de base : principe des tiroirs, récurrence, ... Les questions ci-dessous visent à vérifier si tu as déjà connaissance de ce qui sera étudié dans le groupe des débutants.

N'oublie pas d'écrire ton nom et ton prénom sur chacune des feuilles que tu rends. Utilise de préférence une feuille différente pour chaque exercice.

Souhaites-tu être dans le groupe des avancés ? OUI NON *(raye la mention inutile)*

Géométrie

Connais-tu le théorème de l'angle inscrit ? OUI NON

Essaie de résoudre (sur une feuille à part) l'exercice suivant :

Exercice 1 : Soient $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ deux cercles qui se coupent en A et B. Soit (d_A) une droite passant par A et (d_B) une droite passant par B. On suppose que ni (d_A) ni (d_B) n'est tangente à l'un des cercles. (d_A) recoupe donc $(\mathcal{C}_1)$ en M et $(\mathcal{C}_2)$ en P, et (d_B) recoupe $(\mathcal{C}_1)$ en N en $(\mathcal{C}_2)$ en Q. Montrer que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

Stratégies de base

— Connais-tu le principe des tiroirs ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$

— Sais-tu ce qu'est une démonstration par récurrence ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$

Essaie de résoudre (sur une feuille à part) les exercices suivants :

Exercice 2 : Prouver que dans un groupe de n personnes, il y en a au moins deux qui connaissent le même nombre de personnes du groupe (et, comme dit un proverbe, on ne se connait pas soi-même).

Exercice 3 : Les n villes d'un pays sont toutes reliées les unes aux autres. Entre deux d'entre elles, la liaison (qui est dans les deux sens) est soit aérienne, soit ferroviaire. Prouver qu'il existe un moyen de transport permettant d'aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

III. Débutants

1 Le matin : Géométrie

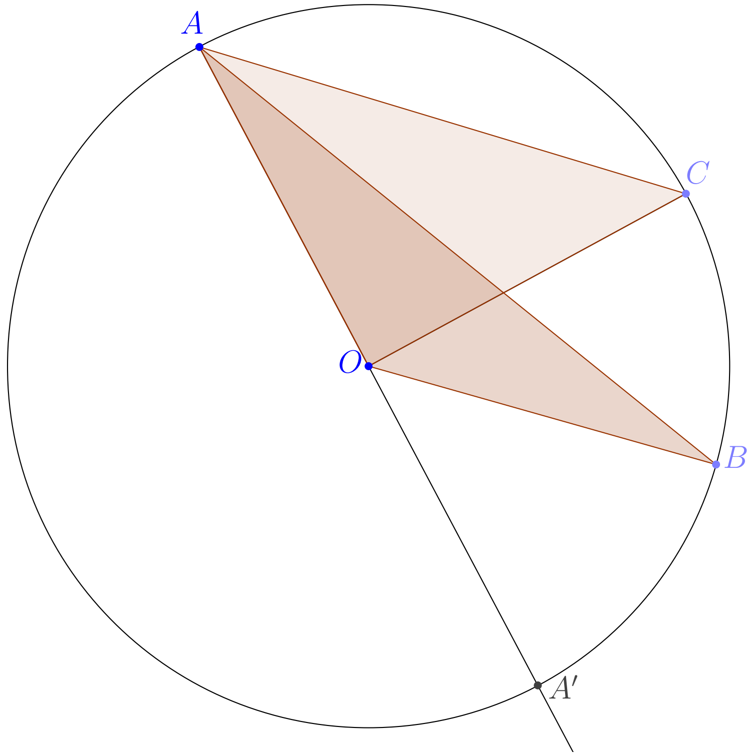
1 vendredi matin : François Lo Jacomo

Nous commencerons par le théorème de l'angle inscrit, essentiel pour une multitude d'exercices, avant de dire quelques mots de l'orthocentre du triangle.

Angles inscrits

Si B et C sont deux points fixes d'un cercle, et qu'on fait varier un troisième point A sur ce même cercle, l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ ne dépend pas de la position du point A.

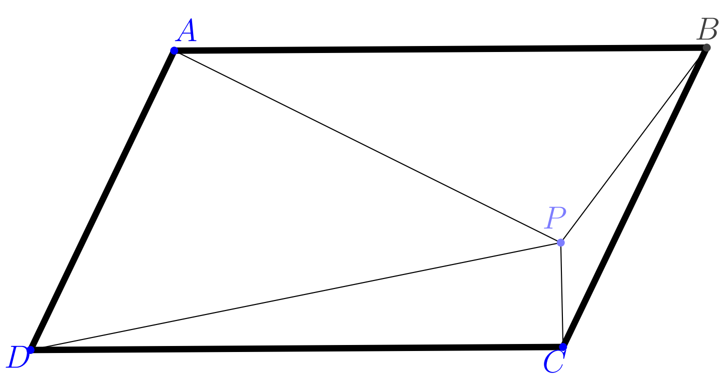
Il existe plusieurs manières d'énoncer ce théorème : si quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux si A et D sont du même côté de la droite (BC), supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de (BC). Réciproquement, quatre points quelconques du plan, A, B, C, D vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ si A et D du même côté de (BC) ou $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^o$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) sont "cocycliques", c'est-à-dire sur un même cercle. La démonstration doit envisager tous les cas de figure, mais l'idée essentielle est que si A et B sont sur un cercle de centre O, le triangle AOB est isocèle. Si la droite (AO) recoupe le cercle en A', comme la somme des trois angles du triangle AOB est égale à 180^o, $\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 2.\widehat{BAO}$, d'où l'on déduit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$, qui ne dépend pas de A, est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.



Si l'on veut un théorème qui ne dépende pas des cas de figures, il faut introduire les angles de droites : l'angle (AB, AC) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AB) pour la faire coïncider avec (AC). Donc $(AB, AC) = -(AC, AB)$ et plus généralement : $(AB, AC) + (AC, AD) = (AB, AD)$ (relation de Chasles) quels que soient les points A, B, C et D. En utilisant ces angles de droites, le théorème de l'angle inscrit s'écrit : quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

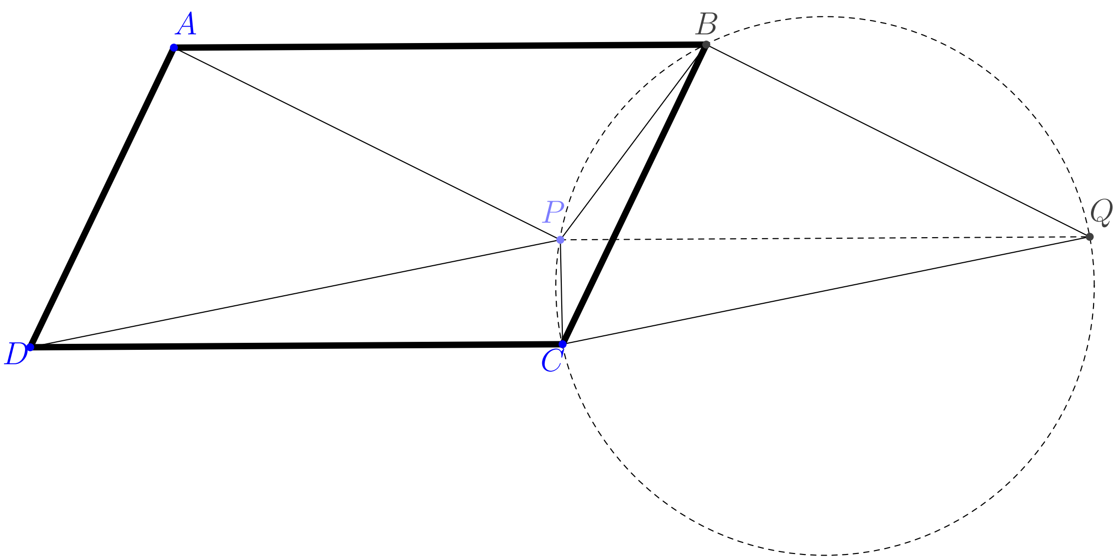
Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P un point intérieur au parallélogramme vérifiant : $\widehat{APD} + \widehat{CPB} = 180^o$. Montrer que $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$.



<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Nous avons deux angles supplémentaires, ce qui fait penser au théorème de l'angle inscrit si ce n'est qu'ils ne sont pas bien positionnés : il faudrait qu'ils soient tous deux de même base BC et de part et d'autre de (BC). Translatons le triangle APD vers la droite de la figure, c'est-à-dire introduisons un point Q tel que AB, PQ, DC soient tous trois parallèles et de même longueur. Les triangles APD et BQC sont isométriques, leurs côtés et leurs angles sont égaux. En particulier, l'angle $\widehat{BQC}$ égal à $\widehat{APD}$ est supplémentaire de $\widehat{CPB}$. Là nous avons deux angles supplémentaires et positionnés de sorte que l'on peut affirmer : les quatre points B, Q, C, P sont cocycliques. Mais comme ces points sont cocycliques, d'autres angles inscrits apparaissent, notamment : $\widehat{QCB} = \widehat{QPB}$. Or $\widehat{QCB} = \widehat{PDA}$ car les triangles QCB et CDA sont isométriques, et $\widehat{QPB} = \widehat{PBA}$ car ils sont alternes - internes, ce qui achève la démonstration.



Exercice 2

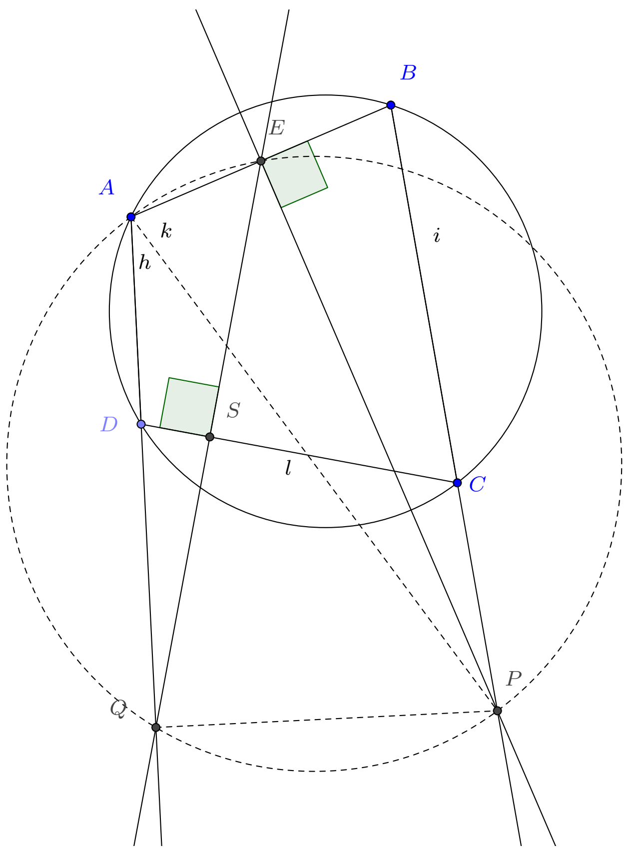
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible. On supposera que l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu. Soit E le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (AB) passant par E coupe (BC) en P. La perpendiculaire à (CD) passant par E coupe (AD) en Q. Montrer que (PQ) est perpendiculaire à (AD).

Solution de l'exercice 2

Exercice typique où grâce à des égalités d'angles on trouve des points cocycliques, et ces points cocycliques nous fournissent de nouvelles égalités d'angles... dont celle cherchée !

Posons $\alpha = \widehat{BPE}$. Comme $\widehat{PEB}$ est droit, $\widehat{EBP} = 90^o - \alpha$. Or $\widehat{EBP} = \widehat{ABC}$ est supplémentaire de $\widehat{CDA}$ d'après le théorème de l'angle inscrit, donc $\widehat{CDA} = 90^o + \alpha$, et si l'on nomme S l'intersection de (CD) et (AQ), $\widehat{SDQ} = 90^o - \alpha$. Comme par hypothèse $\widehat{QSD} = 90^o$, $\widehat{DQS} = \widehat{AQE} = \alpha$. Pour avoir des points cocycliques, il faudrait par exemple que $\widehat{APE} = \alpha$, mais c'est le cas, car P est sur la médiatrice de

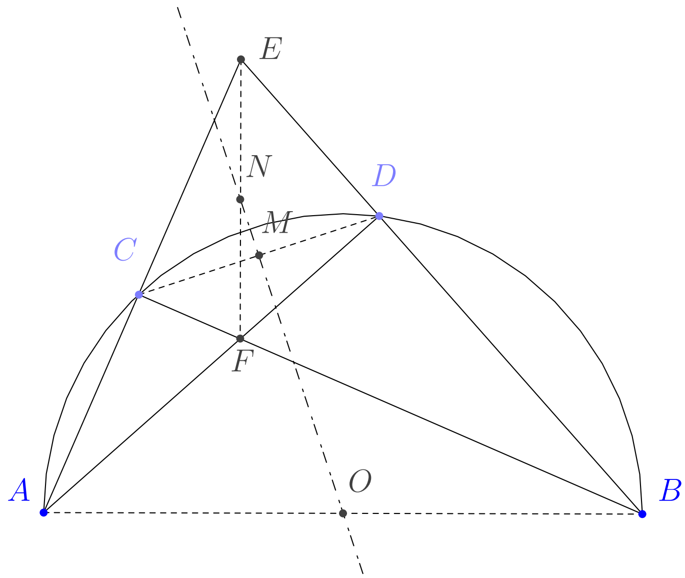
$[AB]$, donc le triangle APB est isocèle, et (AE) est la bissectrice de $\widehat{APB}$. Dès lors, $\widehat{APE} = \widehat{BPE} = \alpha$, les quatre points A, E, P, Q sont cocycliques, donc les deux angles $\widehat{AEP}$ et $\widehat{AQP}$ sont supplémentaires ; Comme $\widehat{AEP}$ est droit par hypothèse, $\widehat{AQP}$ est lui aussi droit, ce qui signifie que (PQ) est orthogonal à (AD).



Un cas particulier important du théorème de l'angle inscrit est le cas de l'angle droit : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si A est situé sur le cercle de diamètre $[BC]$ (donc l'angle au centre est plat). En voici une illustration typique :

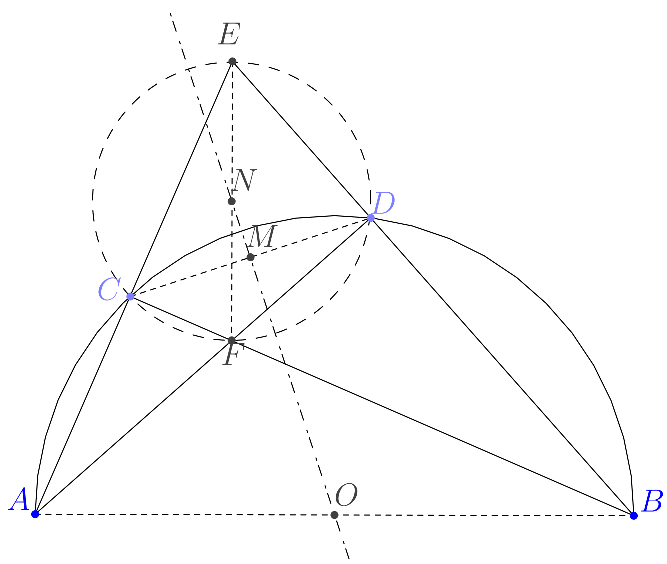
Exercice 3

Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en F, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.



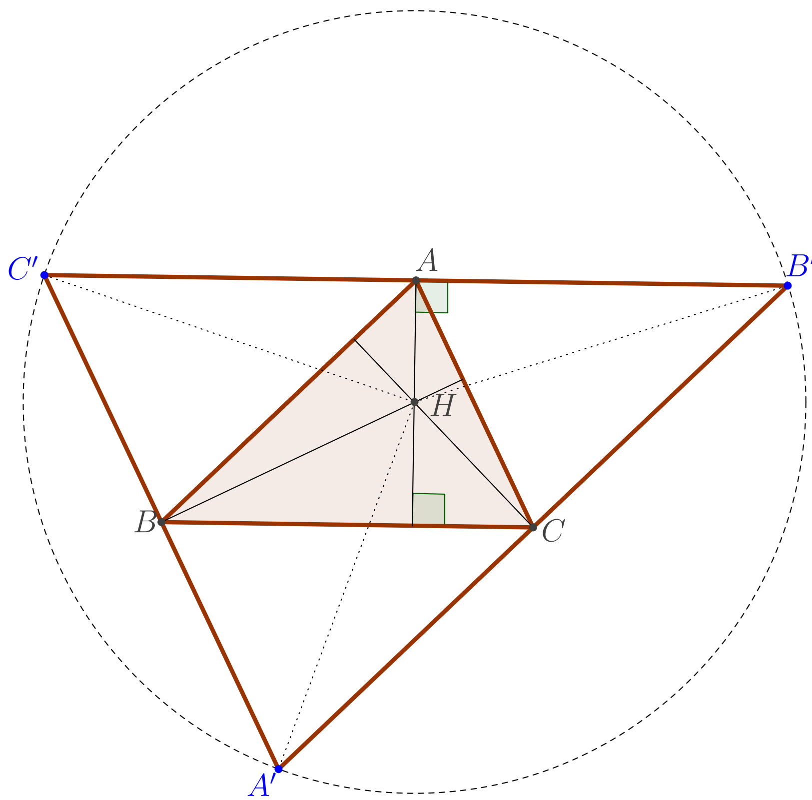
Solution de l'exercice 3

L'hypothèse "C et D sur le cercle de diamètre $[AB]$" se traduit par : $\widehat{ACB} = 90^o$ et $\widehat{ADB} = 90^o$. Mais cela entraine manifestement : $\widehat{FCE} = 90^o$ et $\widehat{FDE} = 90^o$, donc (C) et (D) sont également sur le cercle de diamètre $[EF]$. Le milieu N de $[EF]$ est le centre de ce cercle, donc $NC = ND$, ce qui entraine que N est sur la médiatrice de $[CD]$. Or, pour la même raison, le milieu O de $[AB]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$. Et par définition, cette même médiatrice passe par le milieu M de $[CD]$.



Hauteurs et orthocentre

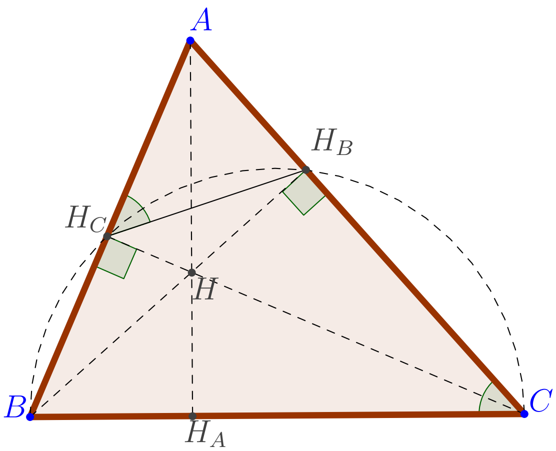
Les hauteurs d'un triangle ABC se coupent en un point nommé orthocentre du triangle, et traditionnellement noté H. En effet, menons par A la parallèle à (BC), par B la parallèle à (CA) et par C la parallèle à (AB) : on voit apparaître trois parallélogrammes $ABCB'$, $ABA'C$ et $AC'BC$, donc la hauteur issue de A est médiatrice de $[B'C']$, lieu des points équidistants de B' et C', celle issue de B est médiatrice de $[C'A']$, celle issue de C, médiatrice de $[A'B']$, et les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois sommets (centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$).



Exercice 4

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On supposera pour simplifier que H est à l'intérieur du triangle ABC, ce qui revient à dire que tous les angles du triangle sont aigus (un tel triangle est dit acutangle). Déterminer les angles des triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC et $H_AH_BH_C$, en fonction des angles du triangle ABC, que l'on notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

Remarque : on utilise beaucoup de points en géométrie du triangle, et si l'on veut éviter d'utiliser le même nom pour trop de points différents, il arrive qu'on soit à court de notations. Les notations H_A, H_B et H_C ne sont pas courantes, mais elles peuvent rendre des services dans bien des cas.

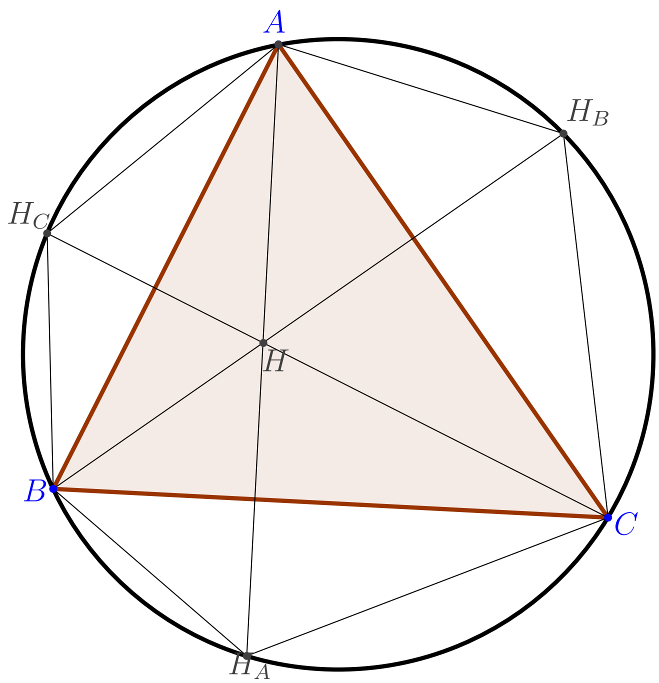


<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Etant donnés les angles droits $\widehat{BH_BC}$ et $\widehat{BH_CC}$, H_B et H_C sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, d'où les angles inscrits $\widehat{BH_CH_B}$ et $\widehat{BCH_B}$ sont supplémentaires, puisque C et H_C sont de part et d'autre de (BH_B), d'où $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{C}$. De même, $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{B}$, puis $\widehat{BH_CH_A} = \widehat{C}$, $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{A} = \widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{CH_BH_A} = \widehat{B}$. Donc d'une part $\widehat{H_AH_BH_C} = 180^o - 2\widehat{B}$, $\widehat{H_BH_CH_A} = 180^o - 2\widehat{C}$, $\widehat{H_CH_AH_B} = 180^o - 2\widehat{A}$, d'autre part les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$, et l'orthocentre de ABC est centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CA) du triangle sont sur le cercle circonscrit à ABC.



Solution de l'exercice 5

Il suffit d'étudier les angles de la figure : en appelant, cette fois, H_A, H_B et H_C les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle, H'_A, H'_B et H'_C les pieds des hauteurs, milieux de HH_A, HH_B et HH_C : dans le triangle rectangle BH'_BC, $\widehat{H'_BBC} = 90^o - \widehat{C}$. De même, $\widehat{H'_CCB} = 90^o - \widehat{B}$. Donc le troisième angle du triangle BHC : $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o - \widehat{A}$. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BHC}$ sont supplémentaires, mais H et A ne sont pas de part et d'autre de (BC), donc A, B, C et H ne sont pas cocycliques. En revanche, si H_A est le symétrique de H par rapport à (BC), les triangles BHC et BH_AC ont les mêmes angles, donc $\widehat{BH_AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont encore supplémentaires, mais cette fois-ci A et H_A sont situés de part et d'autre de (BC), donc les quatre points A, H_A, B et C sont cocycliques. De même pour H_B et H_C.

2 samedi matin : Linda Gutsche

22/11/2016 Cachan Junior, samedi matin

Linda Gutsche

Bases de la géométrie olympique : Les droites et les points remarquables dans un triangle

Plan :

0) Axiomes

La géométrie se base sur des axiomes, c'est-à dire sur des concepts admis comme vrais, et qui ne sont pas démontrables, mais à partir des quels on peut démontrer n'importe quel propriété de la géométrie. Un des axiomes principal est la présence d'un axe de symétrie, et un autre est la similitude entre deux figures dont l'une est "l'originale", et l'autre est un agrandissement ou une réduction de la figure posée à un autre endroit, à l'envers ou à l'endroit.

1) Rappels de définitions :

Lors de la recherche de preuves de problèmes de géométrie, le plus important est de comprendre ce qui se passe, et pourquoi. Pour cela, il faut parfaitement comprendre la définition de certaines figures de bases.

La médiatrice :
-La médiatrice du segment [AB] est l'axe de symétrie qui envoie A sur B.

Le cercle :
Le cercle C de centre O et de rayon r est l'ensemble des points C tels que CO=R.

La bissectrice :
-La bissectrice de deux droites non parallèles d1 et d2 est un axe de symétrie de la figure obtenue avec ces deux droites.

2) Les médiatrices dans un triangle et le centre du cercle circonscrit

Théorème :
Les médiatrices dans un triangle son concourantes en un point O. Ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle, c'est à dire que le point O est le centre du cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

Preuve : Traçons un triangle quelconque ABC. Définissons le point O comme l’intersection des médiatrices de [AB] et de [AC]. Par définition de la médiatrice, OA=OB, et OA=OC. Donc OB=OC, donc O est également sur lé médiatrice de [BC], donc les trois médiatrices de ABC sont bien concourantes en O.
Un cercle de centre O qui passe par A est l'ensemble des points tels qu'ils sont à la distance AO de O. Or on a vu que OA=OB=OC. Donc O est le centre du cercle qui passe par A, B et C, donc O est bien le centre du cercle circonscrit à ABC.

3) Les angles dans un cercle

À partir du théorème des angles alternes-internes, on peut prouver que la somme des angles dans un triangle est de 180°.
Il suffit de ce dernier théorème et de celui au sujet du centre O du cercle circonscrit du triangle ABC pour retrouver les quatre théorèmes fondamentaux de la chasse aux angles dans un cercle :

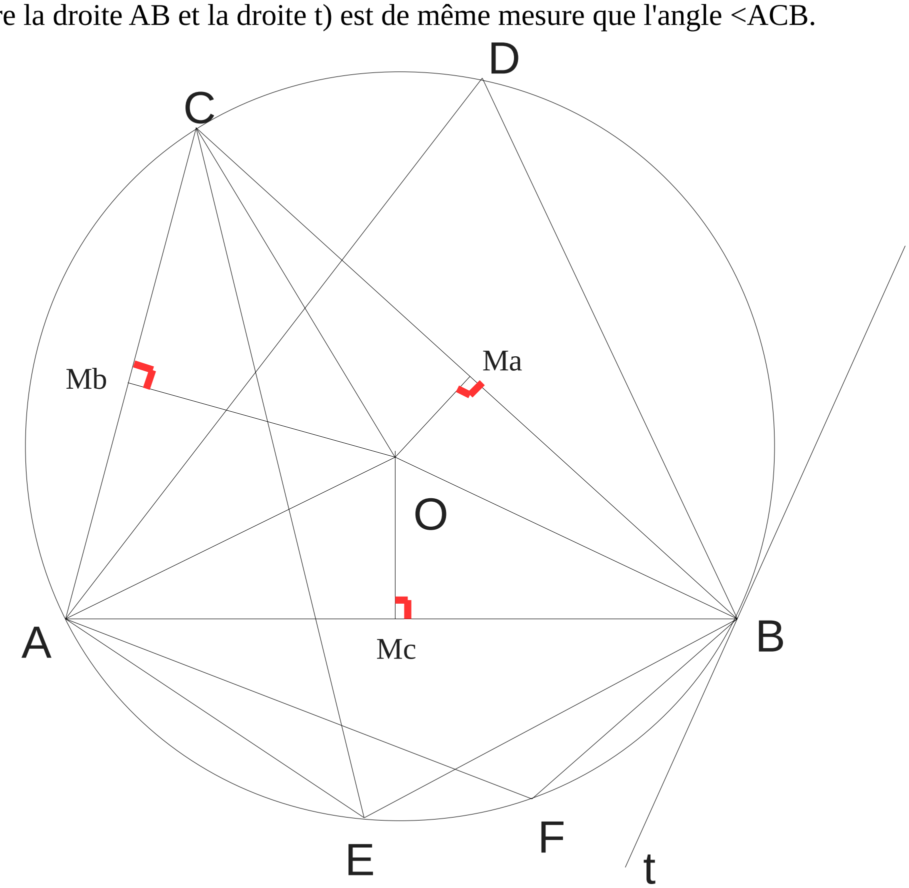
a) *Théorème de l'angle au centre :*
Soit trois points A, B, et C qui appartiennent à un cercle de centre O, et C du même côté de (AB) que O. Alors, <AOB=2*<ACB

b) *Théorème de l'angle inscrit version 1:*
Soit quatre points A, C, D et B dans cet ordre sur un cercle de centre O. Alors, <ACB=ADB

c) *Théorème de l'angle inscrit version 2 :*
Soit quatre points A, C, B et E dans cet ordre sur un cercle de centre O. Alors, <ACB=180°-<AEB

d) *Théorème de la tangente :*
Soit trois points A, B et C sur un cercle de centre O, et t la tangente en B à O. Alors, ((AB),t) (l'angle entre la droite AB et la droite t) est de même mesure que l'angle <ACB.

Preuves :



Preuve du théorème de l'angle au centre :
- On appelle α l'angle <MaOB, qui par définition de la médiatrice se retrouve en <COMa.
- On appelle β l'angle <MbOC, qui par définition de la médiatrice se retrouve en <AOMb.
- On appelle γ l'angle <McOA, qui par définition de la médiatrice se retrouve en <BOMc.
- Par théorème de la somme des mesures des angles dans un triangle, <OCMa=90°-α, et <OCMb=90°-β
- Donc <ACB= 90° -α + 90° -β = 180°-α-β
- Or autour de O on obtient 2α+2β+2γ=360°, donc γ=180°-α-β
- Donc on a <BOMc + <McOA = 2* <ACB
- Donc on a <BOA= 2*<ACB, ce qu'on voulait démontrer.

Preuve du théorème de l'angle inscrit version 1 :
- On utilise le théorème de l'angle au centre, et on obtient <AOB=2*<ACB et <AOB=2*<ADB
- Donc on a <ACB= <ADB, ce qu'on voulait démontrer.

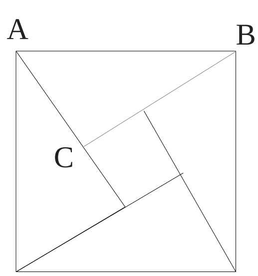
Preuve du théorème de l'angle inscrit version 2 :
- On utilise le théorème de l'angle inscrit version 1, et on obtient <ACE=<ABE, et <ECB=<EAB
- Or <ACB=<ACE+<ECB
- Donc <ACB=<ABE+<EAB
- Parce que la somme des mesures des angles dans un triangle est 180°, dans le triangle AEB, on obtient <AEB= 180°-(<ABE+<EAB)
- Donc <AEB=180°-<ACB, ce qu'on voulait démontrer.

Preuve du théorème de la tangente :
- Par définition de la tangente, la tangente t en B au cercle de centre O et de rayon OB est perpendiculaire à (OB).
- Or, parce que la somme des mesures des angles dans un triangle est 180°, dans le triangle OMcB, on obtient <OBMc=90°-γ
- Donc l'angle entre la droite (AB) et la droite t est de **90°** (angle entre la droite (OB) et la droite t) **– (90°-γ)** (angle entre la droite (OB) et la droite (AB))**=γ=<ACB**, ce qu'on voulait démontrer.

4) Le théorème de Pythagore

Théorème :
Si ABC est un triangle rectangle en C, alors $AB^2=CA^2+CB^2$.

Preuve :
Il existe de très nombreuses preuves de ce théorème. L'une par exemple, est basée sur cette figure ci-dessous qui représente un carré de côté AB formé de 4 triangles ABC, et d'un carré de côté CB-CA.

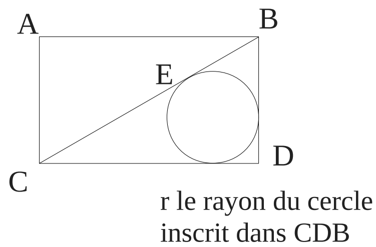


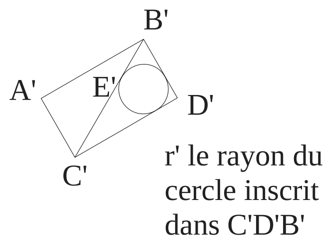
L'aire du grand carré est de AB^2, mais aussi de $4*(AC*CB)/2+(CB-AC)^2$. Donc $AB^2=2*AC*BC + CB^2 – 2*CB*AC + AC^2$
Donc $AB^2=CB^2+AC^2$, ce qu'on voulait démontrer.

Le théorème de Pythagore peut également être facilement démontré par l'utilisation de rapports de longueur de triangles semblables, si on introduit une des hauteurs. (Cela a été vu pendant le cours.)

5) ***Les similitudes, le théorème de Thalès et les homothéties*** (il est conseillé de lire attentivement le polycopié sur les similitudes disponible sur le site d'Animath)

Similitudes :
Tout le monde a déjà vu une carte d'un lieu. En mathématiques, on dit qu'il existe une similitude qui envoie l'endroit représenté sur la carte, et que son rapport est l'échelle de la carte. Ça marche de même pour une figure :

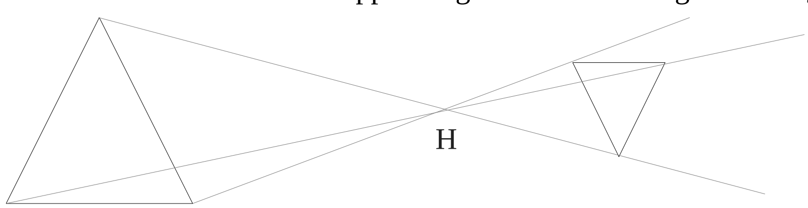




La grande figure est envoyée par une similitude sur la petite, et son rapport est de k=A'C'/AC=E'D'/ED=B'D'/BD=r'/r=...

Les homothéties :
Les homothéties sont un cas particulier des similitudes. Comme toutes les similitudes, elles conserve les angles. Leur particularité est d'avoir un point fixe, et d'envoyer une droite sur une droite qui lui est parallèle. Le rapport peut-être soit positif, soit négatif.
Une homothétie de centre H et de rapport positif >1 envoie le petit smiley sur le plus grand :

Une homothétie de centre H et de rapport négatif >1 envoie le grand triangle sur le petit :



Le théorème de Thalès :
Le théorème de Thalès est une restriction des homothéties au triangle. Son énoncé est le suivant :
Si A,B et C sont trois points alignés dans le même ordre que les points A, D, et E, alors (BD)//(CE) si et seulement si AB/AC=AD/AE=BD/CE.

6) ***Les médianes dans un triangle et le centre de gravité***

Théorème de la droite des milieux :
Dans un triangle ABC, soit Ma, Mb et Mc respectivement les milieux de [BC], [CA] et [AB]. On a (McMa)//(AC), (McMb)//(BC) et (MaMb)//(BA), et 2*McMa=AC, 2*McMb=BC et 2*MaMb=BA.

Preuve :
- Parce que Ma et Mb sont les milieux de [BC] et [CA], CA/CMb=2 et CB/CMa=2. Donc il existe une homothétie de centre C et de rapport 2 qui envoie Ma sur B et Mb sur A.
- Donc BA/MaMb=2 et (BC)//(McMb).
On prouve le reste de la même façon en considérant cette fois l'homothétie de centre A et

l'homothétie de centre B.

Théorème :
Les médianes dans un triangle ABC sont concourantes en G, le centre de gravité du triangle, et 2*GMb=GB ; 2*GMc=GC ; 2*GMa=GA.

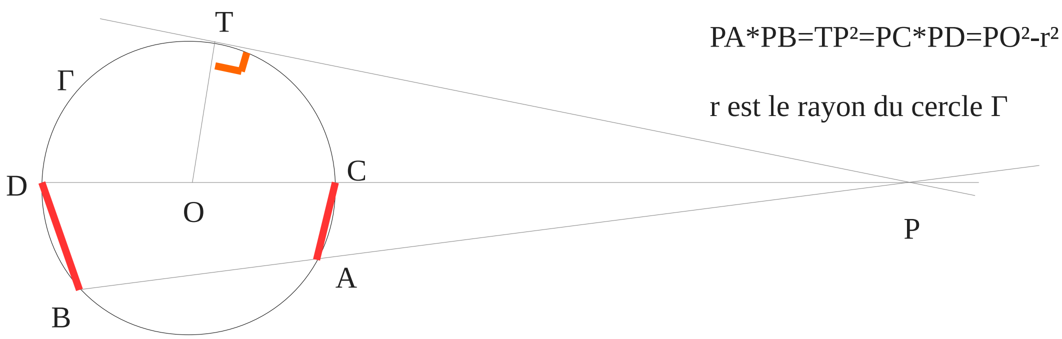
Preuve :
- Définissons G comme l'intersection des médiatrices issues de B et de C.
- Par le théorème de la droite des milieux, (McMb)//(BC), et 2*McMb=BC
- Il existe donc une homothétie de centre G et de rapport -2 qui envoie Mc sur C et Mb sur B.
- On a donc 2*GMb=GB et 2*GMc=GC.

---- Définissons G' comme l'intersection des médiatrices issues de A et de C.
- Par le théorème de la droite des milieux, (McMa)//(AC), et 2*McMa=AC
- Il existe donc une homothétie de centre G' et de rapport -2 qui envoie Mc sur C et Ma sur A.
- On a donc 2*G'Ma=G'A et 2*G'Mc=G'C.

--- On a donc G=G', donc les trois médianes sont bien concourantes, et on a bien 2*GMb=GB et 2*GMc=GC et 2*GMa=GA.

7) Puissance d'un point par rapport à un cercle :

Théorème de la Puissance d'un point par rapport à un cercle :
Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r, et P un point quelconque. On trace une droite qui passe par P et coupe le cercle Γ en A et B (A et B confondus ou non). Alors, quelques soient A et B, PA*PB est constant, et est appelé la puissance du point P par rapport au cercle Γ, et $PA*PB=TP^2=PO^2-r^2$; avec T un point tel que (TP) est tangente à Γ en T.



Preuve : (cette preuve insiste sur les triangles semblables, il est possible de le faire plus simplement)
- Soit C et D deux points de Γ tels que [DC] est un diamètre de Γ et P, C et D alignés dans le même ordre que P, A et B.

--- Montrons d'abord PA*PB=PC*PD :
- Par le théorème de l'angle inscrit version 2, on a <PAC=<PDB et <PCA=<PBD. Il existe donc une similitude qui transforme PAC en PDB. On a donc PA/PD=PC/PB, donc PA*PB=PC*PD.

--- Montrons ensuite que $TP^2=PD*PC$:
- Par le théorème de la tangente, <PTC=<PDT, et <DCT=180°-<DTP, donc comme <PCT=180°-<DCT, <PCT=<DTC. Il existe donc une similitude qui transforme PCT en PTD. On a donc PC/PT=PT/PD, donc $PT^2=PC*PD$.

--- Et montrons finalement que $PT^2=PO^2-r^2$:
Parce que (PT) est une tangente à Γ en T et que OT est un rayon, <PTO=90°. Donc par Pythagore, $PO^2=OT^2+PT^2$. Or OT=r. Donc $PO^2=r^2+PT^2$, donc $PT^2=PO^2-r^2$.

Théorème de l'axe radical pour deux cercles qui s'intersectent en deux points A et B (confondus ou non) : *(théorème de l'axe radical simplifié)*
Un point P qui appartient à l'axe (AB), appelé axe radical des deux cercles, aura la même puissance par rapports aux deux cercles : PA*PB. Si un point n'est pas sur cet axe, alors il n'aura pas la même puissance par rapports aux deux cercles.

8) Les hauteurs dans un triangle et l'orthocentre

Théorème :
Les trois hauteurs dans un triangle sont concourantes en un point H, l'orthocentre.

Preuve :
- Soit Ha, Hb et Hc respectivement les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
- Définissons H comme l'intersection des hauteurs issues de A et de C dans ABC. On veut montrer que B, H et HB sont alignés, ce qui finirait la preuve.
- Par le théorème de l'angle inscrit version 2, on obtient que H, Hb, A et Hc sont sur un même cercle, Γ1.
- Par le théorème de l'angle inscrit version 2, on obtient que H, Hb, C et Ha sont sur un même cercle, Γ2.
- Par le théorème de l'angle inscrit version 1, on obtient que A, Hc, Ha, C sont sur un même cercle, Γ3.
- Par la puissance du point B par rapport au cercle Γ3 on obtient BHc*BA=BHa*BC. Donc la puissance de B par rapport aux cercles Γ 1 et Γ2 est la même. Donc B est sur l'axe radical des deux cercle, donc B est sur l'axe (HHb), ce qu'on voulait démontrer.

9) Les bissectrices dans un triangle et le cercle inscrit

Théorème :
Soit ABC un triangle. Alors, les trois bissectrices issues de A, B et C s'intersectent en un point I, le centre du cercle inscrit au triangle ABC (le cercle à l'intérieur du triangle et auquel les trois côtés sont tangents).

Preuve :
- Définissons I comme le point d'intersection de la bissectrice issue de A et de la bissectrice issue de C. Soit Ia, Ib et IC respectivement appartenant à [BC], [CA] et [AB] tels que (IIa) perpendiculaire à (BC), (IIb) perpendiculaire à (CA) et (IIc) perpendiculaire à (AB).
--- On veut d'aborcd montrer que IIa=IIb=IIc, ce qui montrerait que I est le centre du cercle inscrit à ABC vu que les côtés de ABC seront alors perpendiculaires au rayon.
- Comme I est sur la bissectrice issue de A, IIc=IIb, et comme I est sur la bissectrice issue de C, IIb=IIa.
- Donc IIa=IIb=IIc, ce qu'on voulait démontrer.
--- On veut maintenant montrer que I est sur la bissectrice issue de B, en montrant que <IBIc=<IBIa
- Par le théorème de l'angle inscrit version 2, IIc, I, IIb et B sont concycliques. Donc <IBIc=<IIaIc et<IaBI=<IaIcI.
- Il reste à montrer que <IIaIc=<IaIcI, ce qui est vrai car IcIIa est isocèle en I puisque IcI=IaI.

Théorème :
x=AIc=AIb=(AB+AC-BC)/2; y=BIc=BIa=(BA+BC-AC)/2 et z=CIb=CIa=(CA+CB-AB)/2

Preuve :
- AIc=AIb; BIc=BIa et CIb=CIa car les deux tangentes à un même cercle passant par le même point

sont de même longueur. Appelons ces longueurs respectivement x, y et z.
- Soit $\mathcal{P}$ le périmètre de ABC. On a AB+BC+CA=$\mathcal{P}$=2x+2y+2z, et AB=x+y, BC=y+z, et CA=z+x.
- On a donc (AB+BC+CA)/2=x+BC, et en enlevant BC des deux côtés, on obtient la formule qu'on voulait démontrer.
- On fait pareil pour y et z.

10) *Et plein d'autres choses intéressantes*

À partir de ce qui a été démontré, on peut prouver le théorème des bissectrices extérieures et des cercles exinscrits, le théorème du pôle Sud, des particularités très intéressantes de l'orthocentre... Et plein d'autres choses intéressantes. Par exemple, il se trouve que l'orthocentre de ABC est le centre du cercle inscrit du triangle formé par les pieds des trois hauteurs de ABC. Sauriez-vous le montrer en utilisant les théorèmes prouvés plus haut ?

11) *Exercices :*

Exercice n°1 : (Application du théorème de Pythagore)
Soit ABC un triangle à angles aigus tel que <BCA=45°. H est son orthocentre. Montrez que AB=CH.

Exercice n°2 : (Utilisation des homothéties)
Soit Γ1 et Γ2 deux cercles respectivement de rayons r1 et r2, et r1<r2. P est l'intersection des deux tangentes extérieures communes aux deux cercles, t1 et t2. O et S sont respectivement les points d'intersections de t1 avec Γ1 et Γ2, et M et G ceux de t2 avec Γ1 et Γ2. Montrez que OMGS est circonscriptible, c'est-à dire qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ à l'intérieur de OMGS tel que les côtés de OMGS soient tangents à $\mathcal{C}$.

Exercice n°3 :
Soit Γ un cercle de centre O et de diamètre AD, et B et C deux points de Γ tels que A, B, C et D soient dans cet ordre. Q et P sont les projetés orthogonaux de O sur [AB] et [CD]. Soit Z le point d'intersection de (AC) et (BD), et F le projeté orthogonal de Z sur [AD]. Montrez que Q, P, F et O sont cocycliques.

Exercice n°4 :
Soit ABC un triangle aigu et H son orthocentre, et Ha, Hb et Hc respectivement les pieds des hauteurs issues de A, B et C. Montrez que H est le centre du cercle inscrit à HaHbHc.

Exercice n°5 :
Soit ABC un triangle et H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrez que <ABH=<CBO.

Exercice n°6 :
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, Γ son cercle circonscrit, et M le milieu de [BC].
a) Montrez que le symétrique de H par rapport à [BC] appartient à Γ.
b) Montrez que le symétrique de H par rapport à M appartient à Γ.

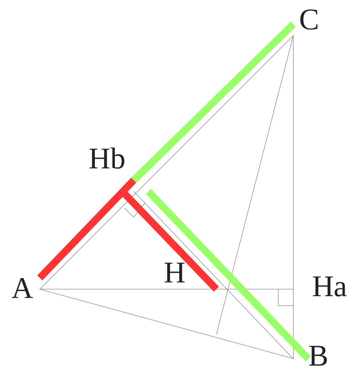
Exercice n°7 : (Le point de Miquel)
Soit ABC un triangle, et P, Q et R trois points qui appartiennent respectivement à [AB], [BC] et [CA]. Montrez que les cercles circonscrits à RAP, PBQ et QCR se coupent en un même point.

Exercice n°8 : (La droite de Simson)
Soit ABC un triangle, P un point en dehors du triangle, et Pa, Pb et Pc respectivement les les projetés orthogonaux de P sur (BC), (AC) et (AB). Montrez que Pa, Pb et Pc sont alignés si et seulement si P appartient à Γ, le cercle circonscrit à ABC.

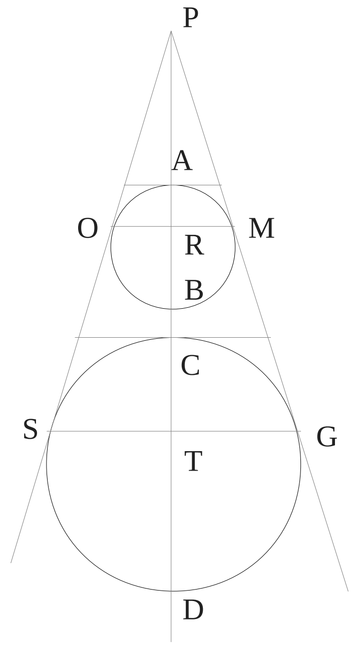
Exercice n°9 :
Γ1 et Γ2 sont deux cercles qui se coupent deux points différents, Q et P. Un droite coupe Γ1 en A et C, et Γ2 en B et D tel que A, B, C et D soient dans cet ordre. Montrez que <APB=<QDC.

12) Solutions des exercices

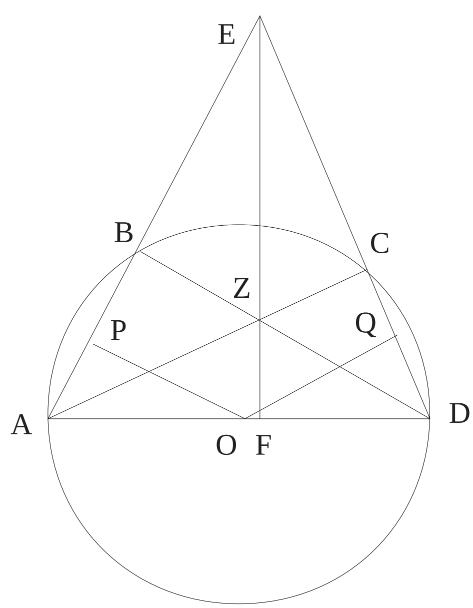
Solution de l'exercice n°1 :
Parce que la somme des mesures des angle d'un triangle est 180° (Avec Ha et Hb respectivement les pieds des hauteurs issues de A et B) :
- Dans BHbC : 180°=<BCHb + <CHbB + <HbBC, donc HbBC=180°-90°-45°=45° ; donc BHbC est isocèle en Hb.
- De même, HBHa est isocèle en Ha, et AHHb est isocèle en Hb.
- Donc AHb=HbH et HbB=HbC
- Donc par Pythagore, $AB^2=AHb^2+HbB^2=HbH^2+HbC^2$
- Or par Pythagore $HbH^2+HbC^2=CH^2$, donc $AB^2=CH^2$, donc comme il s'agit de distances positives, AB=CH, ce qu'on voulait démontrer.



Solution de l'exercice n°2 : (la solution présentée n'est qu'un fil conducteur de la solution complète, il manque certaines étapes)
- Soit b la bissectrice de <OPM. b coupe Γ1 en A et B, et Γ2 en C et S (et P, A et B dans le même ordre que P, C et D). b coupe [OM] en R, et [SG] en T. Soit I1 le centre de Γ1.
- Parce que t1 et t2 sont des tangentes à Γ1 et Γ2, PO=PM, et PS=PG. On a donc deux triangles isocèles de même angle au sommet, donc (OM)//(SG).
- Il existe donc une homothétie de centre P qui envoie O sur S, M sur G, A sur C, B sur D, et R sur T, et de rapporte PA/PB=PR/PT=...
- De plus, la tangente en A à Γ1, d1, est parallèle à la droite (OM), et la tangente en B à Γ1, d2, est parallèle à [SG], car b est l'axe de symétrie de la figure, et que donc le triangle formé par (PO), (PM) et d1 est isocèle en P et d'angle au sommet P le même que dans OPM, et que le triangle formé par (PO), (PM) et d2 est aussi isocèle en P et d'angle au sommet P le même que dans SPG.
- Or PA/PB=PR/PT équivaut à PA/PR=PB/PT, et donc il existe une homothétie de centre P qui envoie A sur R, d1 sur (OM), B sur T, et d2 sur (SG), et de rapport PA/PR=PB/PT=...
- Mais cette dernière homothétie envoie aussi O sur un point de la droite PO, et M sur un point de la droite PM.- Cette homothétie envoie donc le cercle Γ1 sur un autre cercle Γ qui est tangent à (PO), (PM), et est tangent en R à (OM) et tangent en T à (SG).
- OMGS est donc bien circonscriptible.



Solution de l'exercice n°3 :
- Parce que [AD] est un diamètre de Γ, et que B et C appartiennent à Γ, <ABD=<ACD=90°
- Soit E le point d'intersection de (AB) et (CD). Z est donc l'orthocentre du triangle AED, puisqu'il est le point d'intersection de la hauteur issue de D et de la hauteur issue de A dans ce même triangle AED.
- Parce que <OPE=90°=180°-90°=180°-<OQE,   E, P, O et Q sont cocycliques sur un cercle Γ1 de diamètre [EO].
- Parce que <OFE=90°=<OQE,   E, Q, F, O sont cocycliques sur un cercle Γ2 de diamètre [EO]
- Comme Γ1 et Γ2 ont le même segment comme diamètre, ils sont confondus. Donc on a E, Q, F, O, P cocycliques, donc Q, F, O, P cocycliques, ce qu'on voulait démontrer.



Les solutions des autres exercices pourront être trouvés dans les polycopiés de géométrie disponibles sur la page d'Animath.

3 dimanche matin : Alexander Semenov

Exercice 1 Soit ABC un triangle isocèle en A avec $AB = AC > BC$. Soient D sur (AB) tel que A, B, D sont dans cet ordre et E sur (BC) tel que B, C, E soient dans cet ordre et tels que $BD = CE = AB - BC$.

Montrer que le triangle ADE est isocèle.

Exercice 2 Démontrer le théorème de Pythagore

Exercice 3 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 20^o$, R un point sur $[AB]$, Q un point sur $[AC]$ tels que $\widehat{BCR} = 50^o$ et $\widehat{CBQ} = 60^o$.

Déterminer l'angle $\widehat{RQB}$.

Exercice 4 1) Démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en le centre du cercle circonscrit.

2) Démontrer que les trois bissectices (intérieures) d'un triangle sont concourantes en le centre de son cercle inscrit.

Exercice 5 Rappeler le théorème de l'angle inscrit ainsi que ses cas limite.

Exercice 6 Démontrer le théorème de Miquel : Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points situés sur les côtés BC, CA, AB respectivement. Alors, les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP passent par un point commun.

Exercice 7 Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Notons $\alpha = \widehat{ABD}$ et $\beta = \widehat{CAB}$. Soit E le point d'intersection entre (AB) et (CD) et F le point d'intersection entre (AC) et (BD).

Déterminer les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{AFD}$ en fonction de α et β.

Exercice 8 Soient $A, B, A', B', A", B"$ six points cocycliques sur un cercle de centre O tels que $(A'B")$ et $(B'A")$ sont parallèles. Soit X le point d'intersection entre (AA') et (BB') et Y le point d'intersection entre $(AA")$ et $(BB")$.

Montrer que A, X, Y, B sont cocycliques.

Exercice 9 Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en deux points A et B. Soit une droite qui passe par A et intersecte C_1 en C et C_2 en E, ainsi qu'une droite qui passe par B et qui intersecte C_1 en D et C_2 en F.

Faire une figure, émettre une conjecture et la démontrer.

Énoncer un cas limite du résultat ainsi établi.

Exercice 10 Soit ABC un triangle et B', C' les pieds de ses hauteurs issues de B, C respectivement. Soient X, Y les intersections de $(B'C')$ avec le cercle circonscrit à ABC.

Montrer que $AX = AY$.

Exercice 11 (théorème du Pôle Sud) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On appelle pôle sud le point S d'intersection entre la bissectrice (intérieure) issue de A et Γ.

1) Montrer que $SB = SC$.

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

2) Montrer que $SB = SC = SI$.

Soit I_A le centre du cercle exinscrit du triangle ABC opposé au sommet A.

3) Montrer que $SB = SC = SI = SI_A$.

Soit A' le point d'intersection entre (AS) et (BC).

4) Montrer que $SA \times SA' = SI^2$

Soit E le point d'intersectrion entre (BI) et Γ. Soient X, Y les points d'intersection entre (SE) et $(AC), (BC)$ respectivement.

5) Montrer que $CXIY$ est un losange.

Exercice 12 Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Soit A' le point d'intersection entre la bissectrice (intérieure) du triangle ABC issue de A et (BC) et D' le point d'intersection entre la bissectrice (intérieure) du triangle DBC issue de D et (BC).

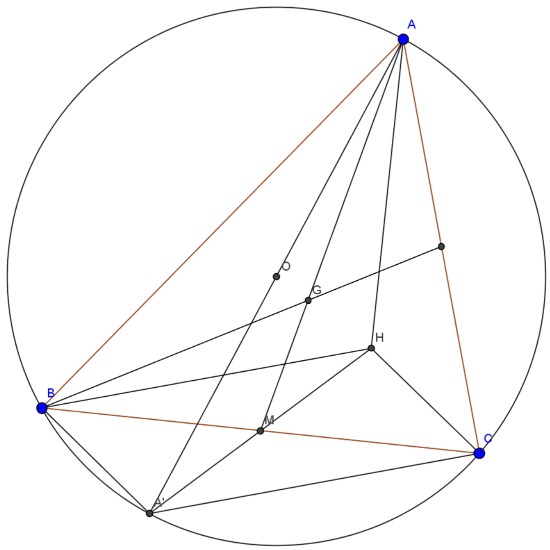
Montrer que A, D, A', D' sont cocycliques.

Exercice 13 (droite de Simson) Soit ABC un triangle et P un point. Soient P_1, P_2, P_3 les projections orthogonales de P sur les trois côtés du triangle.

Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 14 (droite d'Euler) Soit ABC un triangle. On note O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre (point de concours des hauteurs), G son centre de gravité (point de concours des médianes).

Observer la figure ci-dessus, faire une conjecture et la démontrer.



Exercice 15 (théorème de Ptolémée) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.

Montrer que $AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC$.

Montrer que l'on a égalité si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques.

Exercice 16 Soit ABC un triangle. Soit P un point de (BC). Soient M, N ses projections orthogonales sur $(AB), (AC)$ respectivement.

Trouver la position de P pour que la longueur MN soit minimale.

Exercices supplémentaires

Exercice 17 Soit ABC un triangle équilatéral et soit Γ le cercle circonscrit à ABC . On place un point M sur l'arc de Γ reliant B à C sans passer par A. Montrer que $AM = BM + CM$.

Exercice 18 Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible dans un cercle de rayon R , et tel qu'il existe un point P appartenant à $[CD]$ tel que $CB = BP = PA = AB$. Montrer qu'il existe effectivement de tels points $A; B; C; D; P$, et qu'alors $PD = R$.

Exercice 19 On donne un triangle isocèle ABC et le cercle tangent aux côtés égaux $[CA]$ et $[CB]$ aux points A et B. D'un point M de l'arc de ce cercle intérieur au triangle, on trace des perpendiculaires $[MD]$ sur la base du triangle, $[MF]$ et $[ME]$ sur les côtés égaux.

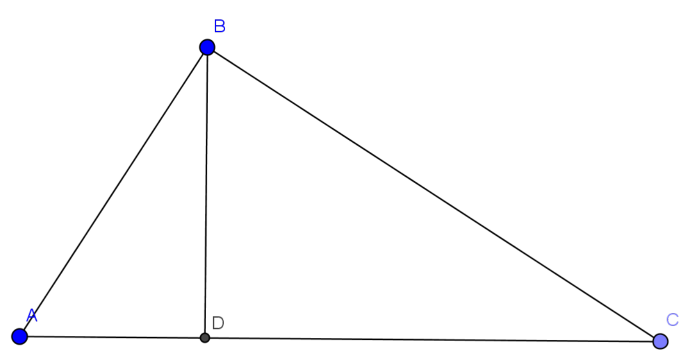
Démontrer que $MD^2 = ME \times MF$.

Exercice 20 Soit ABC un triangle. Soient $M; N; O$ les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et soient P , Q et R les pieds des hauteurs du triangle issues de A, B et C. Montrer que $M; N; O; P; Q; R$ sont cocycliques.

Corrigé des exercices vraiment faits en classe

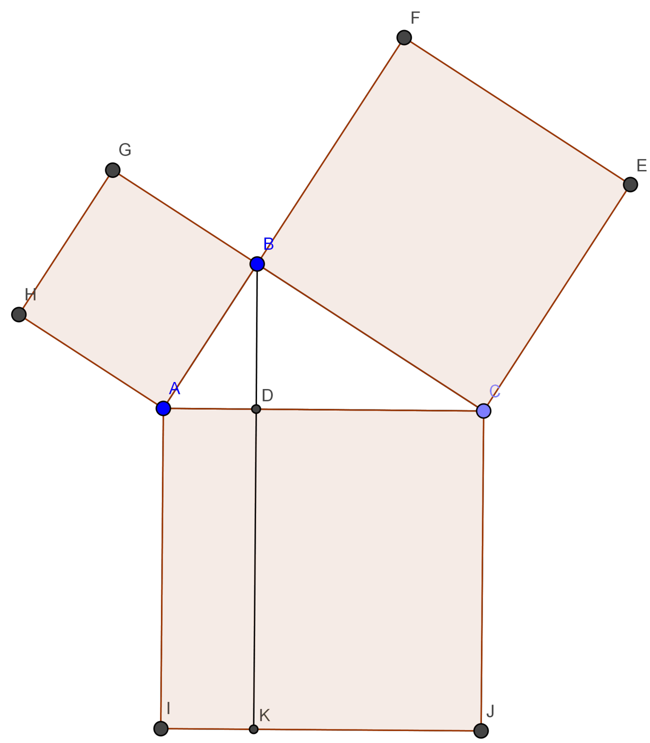
Exercice 1 Il suffit de remarquer que les triangles ACE et EBD sont isométriques. Il est conseillé de commencer l'exercice en faisant une figure.

Exercice 2 On a proposé trois preuves du théorème de Pythagore.



Preuve 1

On commence par remarquer que les triangles ABC, ADB et BDC sont semblables. On peut en tirer quelques relations : $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ et $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$. On en déduit : $AB^2 + BC^2 = AC \times (AD + DC) = AC^2$.

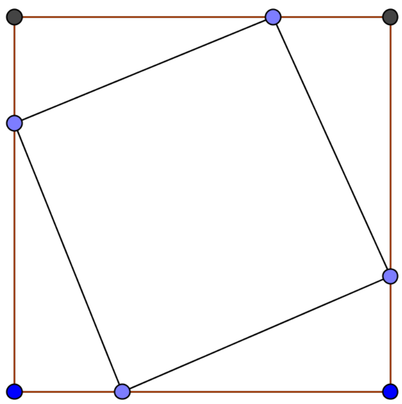


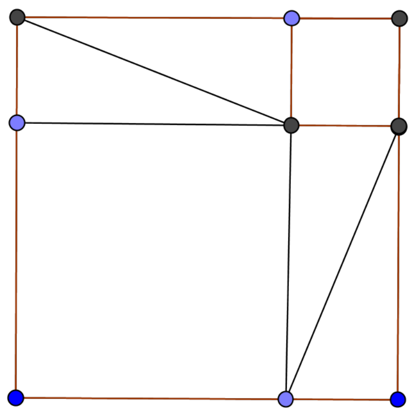
Preuve 2

Il suffit de montrer que l'aire du carré $ABGH$ à laquelle on rajoute l'aire du carré $BCEF$ est égale à l'aire du carré $ACJI$. Pour cela, on montrera que l'aire du carré $ABGH$ est égale à l'aire du rectangle $ADKI$. Ensuite, par les mêmes arguments on peut trouver que l'aire du carré $BCFE$ est égale à l'aire du rectangle $DCJK$.

Pour y arriver, on montrera que l'aire du triangle AHB est égale à l'aire du triangle ADI. Ce qui suffit. En utilisant le fait que l'aire d'un triangle est proportionnelle à la longueur d'un de ses côtés multiplié par la longueur de la hauteur issue du sommet opposé, on trouve que l'aire du triangle HAB est égale à l'aire du triangle HAC. En faisant une rotation de 90^o autour du point A, on trouve que l'aire du triangle ABI. Enfin, on voit que l'aire du triangle AIB est égale à l'aire du triangle AID. Ceci termine la preuve.

Preuve 3 On peut contempler les deux dessins qui suivent :





Exercice 3 Il convient d'abord de faire une figure pour savoir ce qu'il faut démontrer. Après avoir fait une figure, on mesure que l'angle recherché vaut 30^o.

L'astuce ensuite est de considérer le cercle circonscrit à BRQ. En faisant une figure, on remarque que le centre de ce cercle est sur (AC) (ou juste à côté de (AC) aux imprécisions de la figure faite près, dans ce cas il est tout de même raisonnable de se demander si le centre du cercle n'est pas sur (AC)). On note O' le centre du cercle.

Une fois ceci remarqué, il peut être bien de le démontrer. Remarquons que si c'est vrai, $RO'B$ est isocèle en O' et si en plus on suppose que $\widehat{RQB} = 30^o$, on a par le théorème de l'angle au centre-angle inscrit, $\widehat{RO'B} = 60^o$. Ainsi, le triangle $RO'B$ est équilatéral.

Ainsi, pour faire la démonstration, il est raisonnable de construire un triangle équilatéral ROB (tel que O est du même côté de (RB) que Q) et de chercher à démontrer que O appartient à (AC). Or, par simple chasse aux angles, on trouve que le triangle RBC est isocèle en B. Par conséquent, $OB = BR = BC$. Donc, le triangle OBC est isocèle en B. Or, par simple chasse aux angles, $\widehat{OBC} = 20^o$, donc $\widehat{BCO} = 80^o$. Mais on sait déjà que $\widehat{BCA} = 80^o$ et A est de même côté de (BC) que O. Donc, les points A, Q, O, C sont alignés. Ensuite, on aimerait démontrer que le cercle de centre O qui passe par B et R passe aussi par Q. Par simple chasse aux angles, on trouve que QOB est isocèle en O. Ce qui suffit. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de l'angle au centre-angle inscrit pour conclure.

Exercice 7 Par simple chasse aux angles, on trouve $\widehat{AED} = \alpha - \beta$ et $\widehat{AFD} = \alpha + \beta$. Cet énoncé est aussi important que le théorème de l'angle inscrit, il est donc à retenir obligatoirement.

Exercice 8 C'est une simple application du résultat de l'exercice 7 aux angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$.

Exercice 10 L'astuce est de considérer la tangente au cercle circonscrit au point A et de montrer que cette tangente est parallèle à (XY) par simple chasse aux angles.

2 L'après-midi : Stratégies de base

1 vendredi après-midi : Colin Davalo

Le principe des tiroirs

Le principe des tiroirs part d'une idée intuitive : si on a $n+1$ chaussettes à mettre dans n tiroirs, alors deux chaussettes seront dans le même tiroir. Cependant cette idée simple peut s'appliquer pour résoudre des problèmes plus difficiles.
Exercice 1 Seize étudiants passent une épreuve avec trois exercices. Chaque étudiant résout un exercice. Démontrer qu'au moins 6 étudiants ont résolu le même exercice.

Solution de l'exercice 1 On a 16 étudiants à ranger dans 3 catégories, ainsi si on suppose par l'absurde qu'au plus 5 étudiants ont résolu chaque exercice, alors on aurait que 15 étudiant : ce qui est une contradiction.

Exercice 2 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu. Montrer que pour tout réel $x > 0$ il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Solution de l'exercice 2

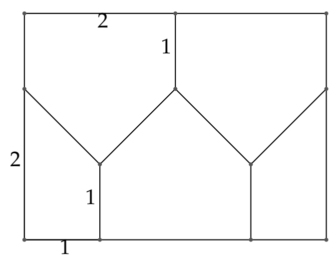
On considère un triangle équilatéral de côté x. Il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.

Exercice 3 On place 51 points sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

Solution de l'exercice 3 Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

Exercice 4 On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles 2×1. Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à $\sqrt{5}$.



Exercice 5 Dans un groupe de 6 personnes, montrer qu'on peut en trouver trois qui se connaissent, ou trois qui ne se connaissent pas, sachant que la relation de connaissance est réciproque.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On considère une personne A, soit elle connait trois personnes soit elle n'est pas connue de trois personnes par principe des tiroirs. Si elles en connait trois ,on considère alors B, C, D ces trois personnes. alors soit ces trois la ne se connaissent pas, ou bien deux d'entre elles se connaissent et alors elles se connaissent avec A. L'autre cas se traite de même.

Exercice 6 Soit a un nombre réel positif. Montrer qu'il y a au moins un nombre dans$\{a, 2a, \cdots, (n-1)a\}$ qui est à distance au plus $\frac{1}{n}$ d'un nombre entier.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On regarde les restes de ces entiers modulo 1. Avec 0 et 1 cela fait $n+1$ éléments de $[0;1]$, donc par le principe des tiroirs on peut en trouver deux dans un même intervalle de la forme $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ avec k un entier. Ainsi soit on a directement q'un élément de $\{a, 2a, \cdots, (n-1)a\}$ est proche d'un entier car sa partie fractionnaire est proche de 0 ou 1, ou bien on trouve que $|la - ma| < \frac{1}{n}$. Donc $(l-m)a$ est à distance au plus $\frac{1}{n}$ d'un entier.

Exercice 7 Dans un musée 100 peintures sont faites chacune avec exactement k couleurs. Si on prend 20 peintures quelconques elles ont une couleur en commun, mais aucune couleur n'est sur toutes les peintures. Quelle est la plus grande valeur de k possible ?

Invariants

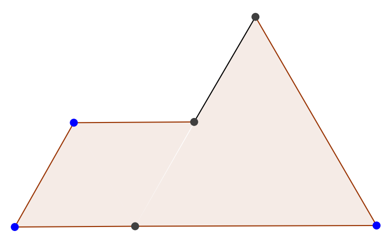
Exercice 8 On considère un échiquier $n \times m$. A quelle condition sur m et n peut-t-on le paver entièrement avec des dominos ? Et qu'en est-il si on enlève deux coins opposés du carré ?

Exercice 9 Un tetramino est une figure constituée de 4 cases (pensez Tetris). Trouver les n tetraminos différents (on peut les pivoter mais pas les retourner). Peut-on paver une rectangle $4 \times n$ avec un exemplaire de chaque ?

Exercice 10 On considère le pentamino en forme de P. Soit m un entier,combien de tels pentaminos peut-on placer dans un rectangle $3 \times m$?

Exercice 11 On pose un jeton par cases d'un carré $n \times n$, à quelle condition peut-t-on arriver à un unique jeton en jouant au solitaire (i.e. a chaque étape un poin peut en manger un autre en passant dessus).

Exercice 12 Peut-on paver un triangle équilatéral de coté 6 avec des "sphinx" de forme ci-dessous ?



Exercice 13 Il y a 24 tasses sur une table. Initialement trois d'entre elles sont à l'envers. A chaque étape on peut retourner 4 tasses. Peut on toutes les retourner en moins de 100 étapes ?

Exercice 14 On considère un échiquier 8×8, chacune des cases étant blanches ou noire de manière usuelle.

a) On a le droit de changer la couleur des cases constituant une ligne ou une colonne. Peut-on arriver à n'avoir plus qu'une seule case noire ?

b) Même question si on a le droit de changer la couleur des cases constituant n'importe quel carré de taille 2×2.

Exercice 15 On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 16 Dans le tableau suivant on peut effectuer les opérations suivantes : changer tous les signes sur une ligne, sur une colonne, ou sur une diagonale. Peut-on obtenir un tableau remplit de signes positifs ?

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	-	+	+

Exercice 17 Trois sauterelles se promènent sur les points à coordonnées entières du plan. Les sauterelles sautent les unes après les autres, mais pour que la sauterelle puisse partir de A pour aller en D alors que ses amies sont en B et C, il faut que (AD) soit parallèle à (BC). Les sauterelles sont initialement en $(1, 0)$, $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Peuvent elles arriver à être sur les cases $(0, 0)$, $(-1, -1)$ et $(1, 1)$?

Exercice 18 Sur une ville carrée de taille 10×10 composée de 100 quartiers. Une épidémie se répand, initialement 9 quartiers sont contaminés, et un quartier est contaminé dès que deux cartiers voisins le sont. La ville peut-elle être entièrement contaminée ?

2 samedi après-midi : Gabriel Pallier

Stage de Cachan – Octobre 2016

Combinatoire débutant, séance II

Initiation à la combinatoire - coefficients binomiaux

Exercice 1. On se donne 4 points dans le plan. Combien y a-t-il de manières de colorier deux de ces points ? 3 de ces points ?

Exercice 2. On se donne k personnes que l'on souhaite placer sur un banc (que l'on suppose assez grand !). Combien y a-t-il de manières de s'y prendre ?

On a défini les coefficients binomiaux (en suivant le cours d'Igor - combinatoire débutants sur le site d'Animath).

Exercice 3. (Formule de Pascal) Soient n, k des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et $n \geqslant 1$. Montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Il y a deux méthodes. Soit avec la formule, soit de manière combinatoire.

A l'aide de la formule précédente, nous avons dessiné le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

Exercice 4. Pouvez-vous calculer 11^3 ? 11^4 ?

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On remarque que

$$\begin{aligned} 11^0 &= 1 \\ 11^1 &= 11 \\ 11^2 &= 121 \\ 11^3 &= 1331 \\ 11^4 &= 14641 \end{aligned}$$

Ce sont exactement les lignes du triangle de Pascal ! Pour expliquer ce phénomène, observons que si l'on essaye de développer $(10+1)(10+1)(10+1)(10+1)$, alors on trouve

$$10^4 + \binom{4}{3}10^3 + \binom{4}{2}10^2 + \binom{4}{1}10^1 + 1$$

Remarque non essentielle : en fait, nous avons démontré un cas particulier de la formule (abstraite) du binôme de Newton.

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} \times x^{n-1} \times y + \cdots + \binom{n}{n-1} \times x^{n-1} \times y + y^n$$

Exercice 5. Que vaut la somme des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \ ?$$

Solution de l'exercice 5 Deux manières de faire :

1. On compte les parties d'un ensemble à n éléments. Pour chaque élément, deux possibilités : on le prend, ou on ne le prend pas. Donc la somme demandée vaut 2^n.
2. Autre méthode (suggestion d'une élève) : On rajoute des $1^k \times 1^{n-k}$ (qui étaient bien sûr déjà là, mais invisibles !) et on utilise la formule du binôme de Newton :

$$\binom{n}{0}1^0 1^n + \binom{n}{1}1^1 1^{n-1} + \binom{n}{2}1^2 1^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{n}1^n 1^0 = (1+1)^n = 2^n$$

Exercice 6. Sur l'échiquier, combien y a-t-il de chemins reliant le coin Sud-Ouest au coin Nord-Est, en se dirigeant à chaque etape d'une seule case vers le Nord ou bien l'Est ?

Exercice 7. (Formule du double comptage) Une assemblée de n personnes veut élire parmi ses membres un président et un comité de k personnes (incluant le président). Montrer qu'il y a exactement

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

façons de s'y prendre.

Exercice 8. Calculer

$$0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}.$$

Solution de l'exercice 8 On utilise la formule du double comptage.

Exercice 9. En moyenne, combien un ensemble inclus dans $\{1, \ldots n\}$ a-t-il d'éléments ?

Solution de l'exercice 9 La réponse est $n/2$. La encore, deux manières de le faire suggérées par les élèves. Nous renvoyons au polycopié d'Igor pour ces solutions.

Exercice 10. * De combien de manières différentes peut-on mettre 5 pièces identiques dans 3 boîtes différentes ?

Solution de l'exercice 10 On dessine les pièces comme des **O** et les bords des boîtes comme des **I**. Il y a exactement $\binom{7}{2} = 21$ manières de dessiner une suite de symboles **O** et **I** comprenant deux **I**.
Remarque : puisqu'il n'y a "que" trois boîtes, on peut aussi s'en sortir en comptant directement.

Raisonnement par l'absurde : quelques exemples

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer qu'une proposition mathématique que l'on souhaite démontrer est fausse, et à espérer être capable d'en déduire une contradiction. On a donné deux exemples, qui sont très classiques, du raisonnement par l'absurde. Ceux-ci sont aussi expliqués (bien mieux qu'ici) dans le polycopié de Xavier du stage de Saint-Malo en 2003.

A titre d'exemple, nous avons démontré la proposition mathématique : **Il existe une infinité de nombres premiers.**

Le contraire de la proposition mathématique à démontrer est *l'ensemble des nombres premiers est fini*. Supposons donc cela, et soit $\{2, 3, 5, 7, \ldots 113, \ldots p\}$ cet ensemble (avec p le plus grand nombre premier). Désignons alors $P = 1 + 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 113 \times \cdots \times p$. P ne peut pas être un nombre premier (il est strictement plus grand que p) ; mais alors, si q est son plus petit diviseur différent de 1, q est nécessairement dans la liste des nombres premiers que nous avons écrite. C'est absurde, parce que $P - 1$ est multiple de q aussi ; il faudrait donc que q divise le nombre 1.

Exercice 11. $\sqrt{2}$ est le nombre positif qui, élevé au carré, donne 2. Montrer que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas sous la forme d'une fraction irréductible p/q.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> C'est un exercice difficile si l'on a encore jamais vu le raisonnement par l'absurde. Il faut raisonner sur la parité de p et de q. On remarque au préalable que si a est un nombre entier tel que a^2 est pair, alors a est pair. Par l'absurde, écrivons donc

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. On va utiliser la seule chose (ou presque...) que l'on sait sur $\sqrt{2}$, à savoir $(\sqrt{2})^2 = 2$. Du côté de la fraction, cela donne $p^2/q^2 = 2$, soit encore

$$p^2 = 2q^2.$$

On en déduit que p^2 est pair. Mais alors p est pair d'après l'observation du début. Donc $p = 2p'$, pour un certain p' entier, et $p^2 = 4p'^2$. On en déduit que

$$q^2 = 2p'^2,$$

donc que q est pair. C'est la contradiction recherchée : p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs puisque l'on abait supposé la fraction irréductible.

3 dimanche après-midi : Matthieu Lequesne

- Cours -

Le raisonnement par récurrence vise à répondre à une question du type : "**Montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.**" Il consiste en 3 étapes :

1. L'initialisation : On montre que la propriété $P(0)$ est vraie.
2. L'hérédité : On montre que, si n est un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie aussi.
3. La conclusion : On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.

Si on sait monter sur la première marche d'un escalier et qu'on sait monter d'une marche à la suivante, alors on peut gravir tout l'escalier. Telle est l'idée du raisonnement par récurrence.

- Exercices -

Exercice 1 On trace n cercles dans le plan tels que deux cercles ne soient jamais tangents. Montrer que l'on peut colorier les régions du plan ainsi délimitées de deux couleurs de telle façon que deux régions séparées par un arc de cercle soient de couleurs différentes.

Exercice 2 (Les tours de Hanoi) Ada joue à un jeu constitué de trois aiguilles verticales sur lesquelles on peut enfiler des disques de taille différente. Dans la configuration initiale, n disques sont enfilés sur l'aiguille de gauche, le plus large à la base et les autres, de plus en plus étroits, empilés jusqu'au sommet. Ada peut déplacer les disques d'une aiguille à l'autre en suivant deux règles : elle ne peut déplacer qu'un disque à la fois, et elle ne peut pas poser un disque sur un disque plus petit. Ada peut-elle réussir à mettre tous les anneaux sur l'aiguille de droite ? Si oui, quel est le nombre de coups minimal requis ?

Exercice 3 Que vaut la somme des entiers de 1 à n ?

Exercice 4 Montrer que $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 Trouver une formule pour $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Exercice 6 Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier. Montrer que pour tout n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 7 Montrer que pour tout $n > 5$ il est possible de découper un carré en n carrés plus petits.

- Corrigé -

Solution de l'exercice 1 Nous allons faire la démonstration par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est facile, il suffit de colorier l'intérieur du cercle en rouge et l'extérieur en bleu.

Maintenant supposons que pour n cercles il est toujours possible de trouver un bon coloriage. Prenons $n+1$ cercles et meetons-en un de côté. Il en reste n, donc par hypothèse de récurrence on peut trouver un bon coloriage. Maintenant rajoutons le dernier cercle et faisons la manipulation suivante : on inverse la couleur de tous les secteursà l'intérieur du cercle et on ne touche pas à l'extérieur. Il est facile de vérifier que le coloriage ainsi obtenu est bon.

Solution de l'exercice 2 Appelons u_n le nombre minimal de mouvements pour déplacer une colonne de taille n d'une aiguille à une autre. Pour déplacer une colonne de taille $n+1$ de la colonne de gauche à la colonne de droite, il faut déplacer les n premiers disques sur la colonne du milieu, puis déplacer le gros disque sur la colonne de droite, puis redéplacer les n autes disques par dessus. Cela nous permet de trouver la formule de récurrence suivante : $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On initialise avec $u_1 = 1$, et on peut prouver par récurrence que $u_n = 2^n - 1$ (l'initialisation est évidente, et l'hérédité fonctionne car $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$). On ne peut pas faire mieux car pour pouvoir bouger le plus grand disque de gauche à droite, il faut nécessairement passer par une configuration ou tous les autres disques sont au milieu.

Solution de l'exercice 3 Pour un entier $n \geq 1$, soit P_n la propriété "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$". Montrons que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$ par récurrence sur n.

- (Initialisation) Il est clair que P_1 est vérifiée.
- (Hérédité) Supposons P_n vérifié. Montrons P_{n+1}. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 4 Pour un entier $n \geq 1$, soit P_n la propriété

$$\text{“}1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{”}.$$

Montrons que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$ par récurrence sur n.

- (Initialisation) Il est clair que P_1 est vérifiée.
- (Hérédité) Supposons P_n vérifiée. Montrons P_{n+1}. En utilisant l'hypothèse

de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 &= \left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que P_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 5 Calculons les premiers termes pour se donner une idée :

1 ; $1+8=9$; $1+8+27=36$; $1+8+27+64=100$; $1+8+27+64+125=225$; $\ldots$

On remarque tout de suite que tous les termes sont des carrés, les carrés de la suite $1, 3, 6, 10, 15$ vue ci-dessus. Nous allons essayer de prouver la formule suivante par récurrence :

$$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

L'initialisation est facile. Maintenant supposons que la formule est vraie pour n et calculons

$$1+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

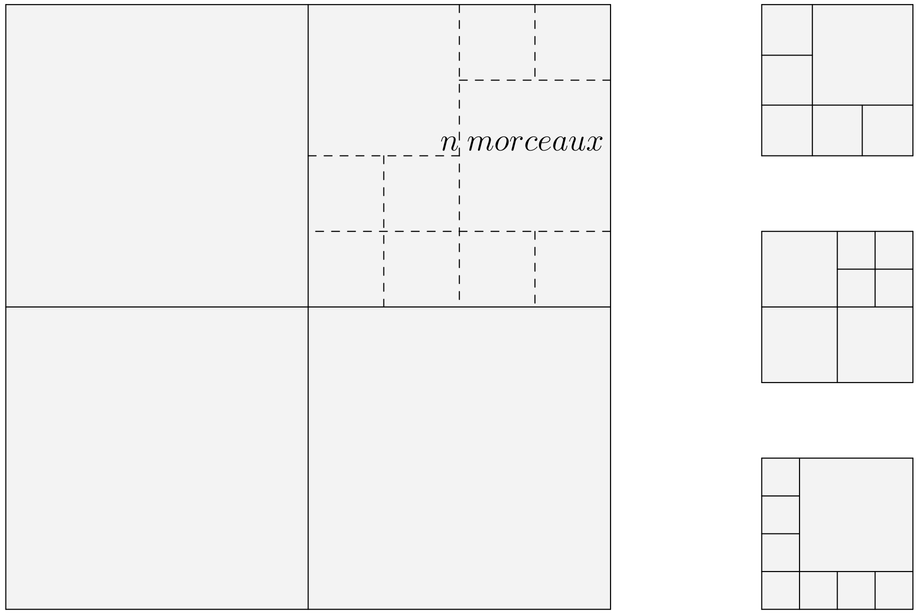
ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 6 Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$x^n+\frac{1}{x^n}$ est un entier". $\mathcal{P}(1)$ est vrai par hypothèse. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vraies,

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$$

Les termes $x^n+\frac{1}{x^n}$, $x+\frac{1}{x}$ et $x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$ sont entiers par hypothèse de récurrence, donc $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ est aussi entier, ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 7 Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "il est possible de découper un carré en n petits carrés". On remarque que si on sait découper un carré en n carré, alors il est facile de découper un carré en $n+3$ carrés : on coupe le gros carré en 4 et on découpe un des petits carrés en n morceaux (voir la figure de gauche).



Ceci règle son compte à l'hérédité : si on suppose $\mathcal{P}(n)$, vraie alors $\mathcal{P}(n+3)$ est vraie. Il suffit ensuite de s'occuper de l'initialisation. Attention, comme on passe de n à $n+3$, il faut prouver 3 cas : les cas 6, 7 et 8. Ils sont dans la partie droite de la figure.

3 Lundi : Test final

1 Enoncé

Durée : 3 heures

Instructions

— **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

— Toute affirmation doit être soigneusement **justifiée**.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

— Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1

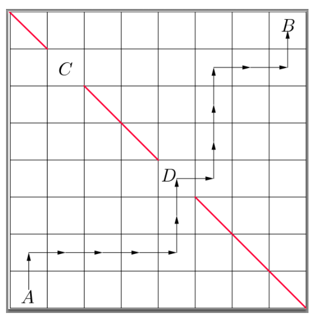
Montrer que si l'on se donne 11 entiers compris entre 1 et 20, alors deux de ces entiers ont une différence égale à 2.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et O son centre. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que l'angle $\widehat{BAO}$ est égal à l'angle $\widehat{CAH}$.

Exercice 3

Combien y a-t-il de chemins allant seulement vers le Nord et l'Est, reliant A à B sans jamais croiser la ligne rouge interdite *(diagonale privée des deux cases C et D : on a dessiné un exemple sur la figure qui suit)* ?



Exercice 4

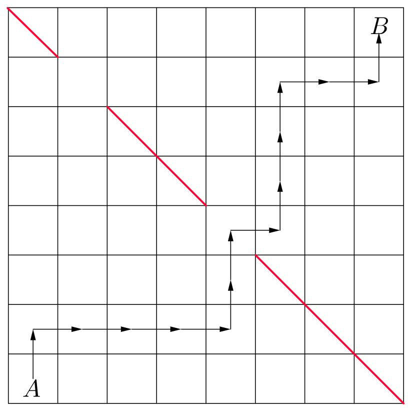
Soit deux droites parallèles d_1 et d_2, et "d_1 au dessus de d_2". Soit Q un point "au dessus de d_1" et Y, A et B trois points dans cet ordre sur d_1. Soit M le milieu de $[AB]$. (QY) coupe d_2 en D, (QA) coupe d_2 en C, (QM) coupe (CB) en P, et (DP) coupe d_1 en X. Montrez que $YA = BX$.

Stage de Cachan – Octobre 2016

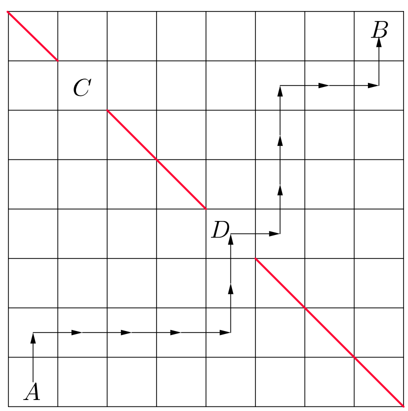
Combinatoire débutant, test

Suggestion d'exercice - combinatoire

Exercice 1. Combien y a-t-il de chemins allant seulement vers le Nord et l'Est, reliant A à B sans jamais croiser la ligne rouge interdite ? (on a dessiné un exemple sur la figure qui suit)



<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On marque C et D les cases par lesquelles on peut passer



— Nombre de chemins passant par C : $\binom{7}{1} \times \binom{7}{1}$, soit 49.
— Nombre de chemins passant par D : $\binom{7}{3} \times \binom{7}{3}$, soit $35^2 = 1225$.

Au total donc, $1225 + 49 = 1274$ chemins.

Indication pour la notation : cet exercice ne devrait pas être évident pour eux, donner au moins un point s'il y a la remarque qu'il faut passer par C ou D, un point s'il y a le nombre de chemins passant par C (même sans le coefficient binomial explicite).

IV. Avancés

1 Le matin : Géométrie

1 vendredi matin : Vincent Jugé

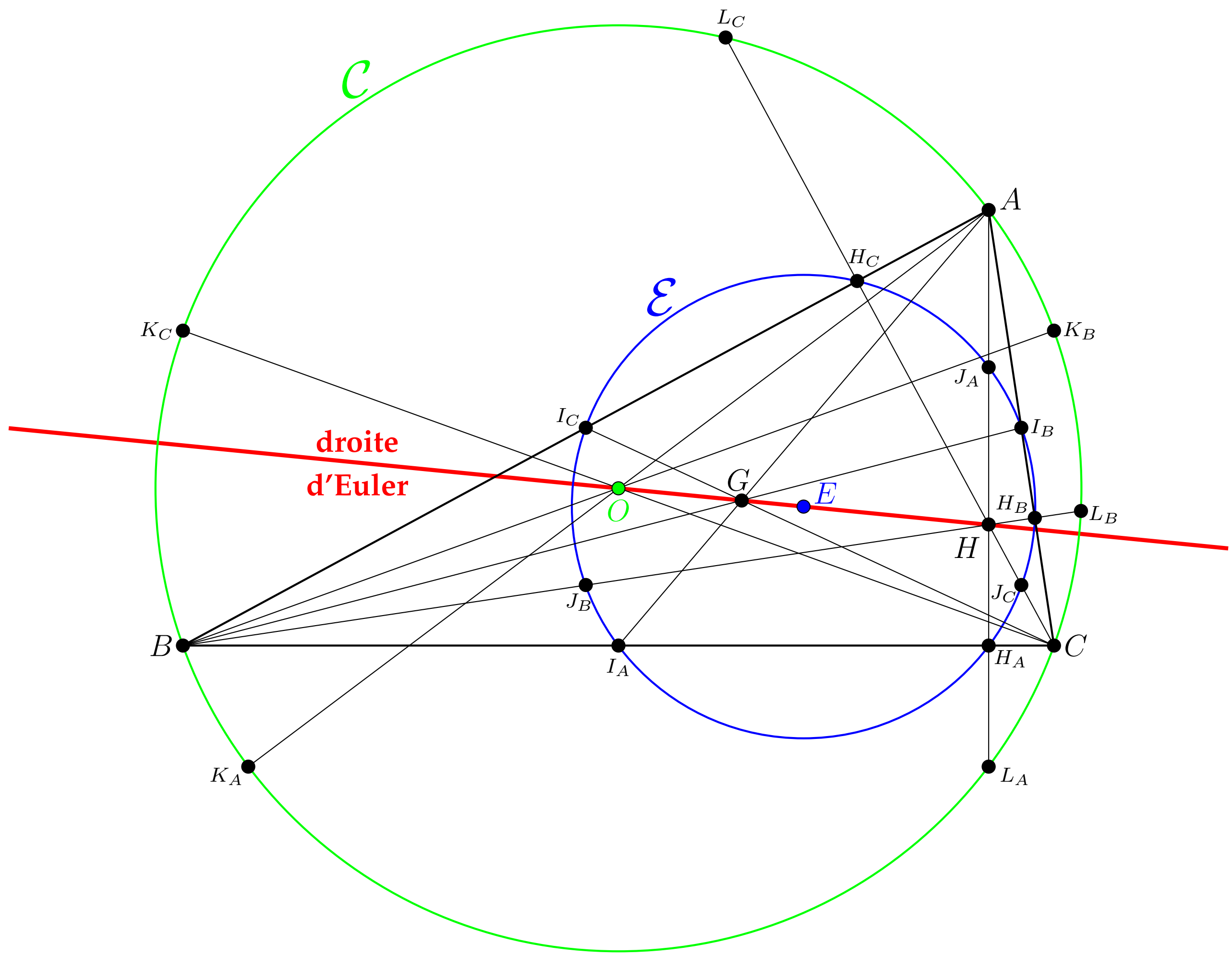
À la découverte du cercle d'Euler

L'objectif de cette partie est de construire pas à pas un cercle aux propriétés remarquables : le **cercle d'Euler** d'un triangle. Ce cercle permettra de mettre en évidence de nombreuses relations entre de multiples points remarquables du triangle, que nous allons mentionner ici.

Soit ABC un triangle. On note

- H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C, et H l'orthocentre du triangle ;
- I_A, I_B, I_C les milieux des côtés BC, CA et AB, G le centre de gravité de ABC, et O le centre du cercle circonscrit à ABC ;
- J_A, J_B, J_C les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$;
- K_A, K_B, K_C les symétriques de A, B et C par rapport à O ;
- L_A, L_B, L_C les symétriques de H par rapport aux côtés BC, CA et AB ;
- E le milieu du segment $[OH]$;
- $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC, et $\mathcal{E}$ le cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$.

Le cercle $\mathcal{E}$ n'est autre que le fameux cercle d'Euler.



Exercice 1 Montrer que l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

Exercice 2 Montrer que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Exercice 3 Montrer que E est le centre du cercle $\mathcal{E}$.

Exercice 4 Montrer que le milieu I_A de BC est également le milieu du segment $[K_A H]$.

Exercice 5 Montrer que K_A et L_A appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 6 Montrer que l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie également $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

Exercice 7 Montrer que J_A et H_A appartiennent au cercle $\mathcal{E}$.

On a donc montré que :
- les points A, B, C, K_A, K_B, K_C, L_A, L_B, L_C appartiennent tous au cercle circonscrit $\mathcal{C}$;
- les points I_A, I_B, I_C, H_A, H_B, H_C, J_A, J_B, J_C appartiennent tous au cercle d'Euler $\mathcal{E}$;

— les points O, G, E et H appartiennent tous à la droite (OH), que l'on appellera dorénavant **droite d'Euler** du triangle ABC.

Utilisation du cercle d'Euler

Exercice 8 Démontrer que les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes, puis que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 9 Soit ABC un triangle acutangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et $\mathcal{E}$ son cercle d'Euler. Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ n'ont aucun point d'intersection.

Exercice 10 Soit ABC et XYZ deux triangles acutangles, tels que les points A, B, C, X, Y, Z soient cocycliques. On note M_{BC}, M_{CA}, M_{AB}, M_{YZ}, M_{ZX}, M_{XY} les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, $[YZ]$, $[ZX]$ et $[XY]$.

On suppose alors que les points M_{BC}, M_{CA}, M_{AB} et M_{YZ} appartiennent à un même cercle $\mathcal{E}$. Montrer que M_{ZX} appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si M_{XY} appartient à $\mathcal{E}$.

Exercice 11 Soit ABC un triangle non dégénéré (c'est-à-dire que A, B et C sont distincts) et soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C. On appelle **triangle orthique** de ABC le triangle $H_AH_BH_C$, et on note h la transformation qui, à chaque triangle non rectangle, associe son triangle orthique.

Montrer qu'il existe un entier n tel que le triangle $h^n(ABC)$ sera soit rectangle, soit de périmètre strictement inférieur à celui de ABC, où h^n désigne l'itérée n-ième de la transformation h.

Solutions

Solution de l'exercice 1 Notons $h_{G,-1/2}$ l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Le centre de gravité G est tel que $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI_A}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GI_B}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI_C}$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc A sur I_A, B sur I_B et C sur I_C.

Or, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit au triangle $I_AI_BI_C$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc également $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 2 Comme toute homothétie, l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie la droite (AH) sur une droite parallèle à (AH). Puisque $h_{G,-1/2}$ envoie A sur I_A et que (OI_A) et (AH) sont toutes deux perpendiculaires au coté BC, il s'ensuit que $h_{G,-1/2}$ envoie (AH) sur (OI_A).

De même, $h_{G,-1/2}$ envoie (BH) sur (OI_B). Or, H est l'unique point d'intersection des droites (AH) et (BH), de même que O est l'unique point d'intersection des droites (OI_A) et (OI_B). L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc H sur G, ce qui signifie exactement que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Solution de l'exercice 3 Notons E' le centre du cercle $\mathcal{E}$, et montrons que $E = E'$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie H sur O. En outre, puisque $h_{G,-1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, il s'ensuit que $h_{G,-1/2}$ envoie O sur E'. Il en résulte donc les deux égalités vectorielles $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GE'}$, de sorte que l'on obtient bien

$$2\overrightarrow{OE'} - 2\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{GE'} - 2\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0},$$

ce qui signifie exactement que $E = E'$, donc que E est bien le centre du cercle $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 4 Rappelons-nous que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie A sur I_A et envoie H sur O. On en conclut l'égalité vectorielle $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{OI_A}$.

Considérons maintenant l'homothétie $h_{K_A,2}$ de centre K_A et de rapport 2. L'homothétie $h_{K_A,2}$ envoie O sur A. Il en résulte que $h_{K_A,2}$ envoie I_A sur un point X tel que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OI_A} = \overrightarrow{AH}$, c'est-à-dire sur le point H.

Cela signifie exactement que I_A est le milieu du segment $[HK_A]$.

Solution de l'exercice 5 Tout d'abord, puisque A appartient au cercle $\mathcal{C}$ et que O est à la fois le centre de $\mathcal{C}$ et le milieu du segment $[AK_A]$, il en résulte que AK_A est un diamètre de $\mathcal{C}$, et bien sur que K_A appartient lui aussi à $\mathcal{C}$.

Maintenant, remarquons que, puisque le droite (HH_A) est perpendiculaire au côté BC, le point H_A est en fait le milieu du segment $[HL_A]$. Rappelons-nous que I_A est également le milieu du segment $[HK_A]$. La droite (H_AI_A) est donc une droite des milieux du triangle HK_AL_A, et la droite (K_AL_A) est donc parallèle à (H_AI_A). Or, (H_AI_A) est en fait la droite (BC), donc est perpendiculaire à la droite (HL_A), qui est en fait confondue avec la droite (AL_A).

Le triangle AK_AL_A est donc rectangle en L_A, ce qui signifie que L_A appartient bien au cercle dont AK_A est un diamètre : ce cercle étant précisément le cercle $\mathcal{C}$, on a bien montré que L_A appartient à $\mathcal{C}$.

Solution de l'exercice 6 On note $h_{H,1/2}$ l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$. Puisque I_A est le milieu du segment $[HK_A]$, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie le point K_A sur I_A. De même, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie K_B sur I_B et K_C sur I_C.

Or, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à $K_AK_BK_C$, tandis que $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$. L'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie donc le cercle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 7 Rappelons-nous que H_A est le milieu du segment $[HL_A]$. Puisque J_A est, par définition, le milieu du segment $[HA]$, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie le point L_A sur H_A, et envoie A sur J_A.

Puisque A et L_A appartiennent tous deux à $\mathcal{C}$ et que $h_{H,1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, on en déduit que H_A et J_A appartiennent tous deux à $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 8 Soit ABC notre triangle. Rappelons-nous que la médiatrice M_C de AB est l'ensemble des points équidistants à A et B. De même, la médiatrice M_A de BC est l'ensemble des points équidistants à B et C et la médiatrice M_B de CA est l'ensemble des points équidistants à C et A. Le point d'intersection de M_C et M_A, que l'on note O, est donc équidistant de A, B et C en même temps, ce qui montre bien qu'il appartient à M_B.

Rappelons-nous, maintenant, notre solution à l'exercice 2. Nous avons simplement montré que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie O sur le point d'intersection de (AH_A) et (BH_B). De même, l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie O sur le point d'intersection de (BH_B) et (CH_C). Cela montre bien que les hauteurs (AH_A), (BH_B) et (CH_C) sont concourantes.

Solution de l'exercice 9 Travaillons sur le triangle étudié en début de séance. Les triangles ABC et I_AI_BC étant directement semblables, il l'angle $\widehat{CI_AI_B}$ est aigu, ce qui montre que le segment $[BI_B]$ coupe la droite (I_AO). De même, le segment $[CI_C]$ coupe la droite (I_BO), et le segment $[AI_A]$ coupe la droite (I_CO).

Il s'ensuit que O appartient au triangle $I_AI_BI_C$, donc se situe à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$. En particulier, soit $R_\mathcal{C}$ le rayon de $\mathcal{C}$ et $R_\mathcal{E}$ le rayon de $\mathcal{E}$: on vient de montrer que $OE < R_\mathcal{E}$. Or, puisque l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, on constate que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E}$.

Soit alors X un point du cercle $\mathcal{E}$. L'inégalité triangulaire indique que

$$OX \leq OE + EX < R_\mathcal{E} + R_\mathcal{E} = R_\mathcal{C},$$

donc que X n'appartient pas à $\mathcal{C}$, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 10 Reformulons notre exercice : que dit-il ? Il nous dit que ABC et XYZ sont deux triangles partageant le même cercle circonscrit, que l'on note dorénavant $\mathcal{C}$

L'énoncé nous informe ensuite que M_{BC}, M_{CA}, M_{AB} et M_{YZ} appartiennent à un même cercle $\mathcal{E}$. On reconnaît qu'il s'agit là du cercle d'Euler du triangle ABC, car ce cercle passe par les milieux des côtés de ABC.

Pour des raisons de symétrie, il nous suffit maintenant de montrer que, si M_{ZX} appartient à $\mathcal{E}$, alors M_{XY} appartient à $\mathcal{E}$ aussi. On peut même aller plus loin et montrer directement que, si M_{ZX} appartient à $\mathcal{E}$, alors ABC et XYZ ont même cercle d'Euler.

On note maintenant $R_\mathcal{C}$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$, et $R_\mathcal{E}$ le rayon du cercle $\mathcal{E}$. Puisque $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$, on en déduit que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{E}'$ le cercle d'Euler du triangle XYZ. On sait que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E} = 2R_{\mathcal{E}'}$, et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ passent tous deux par les points M_{YZ} et M_{ZX}. Or, seuls deux cercles de rayon $R_\mathcal{E}$ passent par M_{YZ} et M_{ZX} : les cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux tels cercles. Il nous suffit donc de trouver un troisième tel cercle $\mathcal{C}'$ différent à la fois de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ pour conclure que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

En remarquant que l'homothétie $h_{Z,1/2}$ de centre Z et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie le triangle XYZ sur le triangle $M_{ZX}M_{YZ}Z$, on remarque que le cercle circonscrit à $M_{ZX}M_{YZ}Z$ est un tel cercle $\mathcal{C}'$: montrons qu'il est différent de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$. Les triangles ABC et XYZ étant acutangles, l'exercice 9 indique que, le point Z appartenant au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC et à XYZ, il ne peut appartenir aux cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. On en déduit donc que $\mathcal{C}'$ est bien différent de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 11 Tout d'abord, notons que si le triangle ABC n'est pas rectangle, alors $h(ABC)$ n'est pas dégénéré. Partant d'un triangle ABC non dégénéré, on obtiendra donc soit un triangle $h^n(ABC)$ rectangle, soit une suite infinie de triangles $h^n(ABC)$ non rectangles.

Étant donné l'exercice, montrons que, si l'on est dans le second cas, alors le périmètre des triangles $h^n(ABC)$ devient arbitrairement petit. Notons R_n le rayon du cercle circonscrit à $h^n(ABC)$ et P_n le périmètre de $h^n(ABC)$. Puisque le cercle circonscrit à $h(ABC)$ est le cercle d'Euler de ABC, on en déduit que $R_1 = 2^{-1}R_0$. Puis, par une récurrence immédiate, $R_n = 2^{-n}R_0$.

Or, si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à ABC, notons que les côtés AB, BC et CA sont des cordes du cercle $\mathcal{C}$, donc sont telles que $AB, BC, CA \leq 2R_0$. En particulier,

$P_0 \leq 6R_0$ et, de même, $P_n \leq 6R_n = \frac{6}{2^n}R_0$. Le triangle ABC étant fixé, il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour obtenir un triangle $h^n(ABC)$ de périmètre $P_n \leq \frac{6}{2^n}R_0 < P_0$.

2 samedi matin : Guillaume Conchon-Kerjan

Cours

On se réfère au poly disponible sur le site de Thomas Budzinski, assez complet : http://www.animath.fr/IMG/pdf/transfos.pdf

Exercices

Nous avons traité les exercices 1 à 5, les suivants portant sur les rotations, que nous n'avons pas eu le temps d'étudier. Les 1 et 2 sont des classiques qui peuvent être utiles dans diverses situations.

Exercice 1
Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB)//(CD)$, M le milieu de $[AB]$, P un point de (BC). On nomme X l'intersection de (PD) et (AB), Q celle de (PM) et (AC), et Y celle de (DQ) et (AB). Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Exercice 2
Soit Γ et Γ' deux cercles tangents, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit T le point de tangence des deux cercles, B un autre point de Γ', et M, N les points d'intersection de la tangente à Γ' en B avec Γ. Montrer que $\widehat{BTM} = \widehat{BTN}$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle exinscrit en A et M le milieu de la hauteur issue de A. Montrer que D, M, J sont alignés.

Exercice 4 (Théorème de Monge-d'Alembert)
Soit Γ_1, Γ_2, Γ_3 trois cercles de rayons différents et dont les disques correspondants sont disjoints. Soit X_1 le point d'intersection des tangentes extérieures communes à Γ_2 et Γ_3. On définit de même X_2 et X_3. Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont alignés.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et Γ_A un cercle à l'intérieur de celui-ci, tangent à (AB), (AC) et à Γ, en un point A'. On définit de même B' et C'. Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

Exercice 6
Soit (d_1), (d_2) et (d_3) trois droites parallèles, comment construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune d'entre elles ?

Exercice 7
Soit ABC un triangle équilatéral, M un point de son cercle circonscrit sur l'arc (BC) ne contenant pas A. Montrer que $MB + MC = MA$.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, E, F, G, H des points tels que ABE et CDG soient équilatéraux et tournés vers l'extérieur de $ABCD$, et BCF et DAH équilatéraux vers l'intérieur. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 9 (Point de Fermat)
Soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à 120^o degrés. Montrer qu'il existe un unique point F à l'intérieur de ABC tel que $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^o$. Montrer alors que pour tout X à l'intérieur de ABC, $AX + BX + CX \geq AF + BF + CF$.

Exercice 10 (Théorème de Napoléon)
Soit ABC un triangle, A', B' et C' tels que ABC', $AB'C$ et $A'BC$ soient équilatéraux et extérieurs à ABC. Soit A_1, B_1, C_1 les centres de ces trois triangles, montrer que $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

Corrigé succinct

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Les deux droites parallèles donnent envie d'en envoyer une sur l'autre par des homothéties. Leurs centres doivent idéalement se trouver sur plusieurs sécantes à ces deux parallèles. P et Q sont donc des bons candidats. On considère ainsi h_P l'homothétie de centre P envoyant (AB) sur (CD) et h_Q de centre Q envoyant (CD) sur (AB). Si h est la composée de h_P puis h_Q, on voit que h a pour centre M (car $h(M) = M$) et pour rapport -1 car B est envoyé sur A. Elle envoie X sur Y, d'où la conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On considère h l'homothétie positive de centre T qui envoie Γ' sur Γ, elle envoie la tangente en B sur une parallèle, tangente à Γ. On introduit B', M', N' les images de B, M, N par h. Une chasse aux angles (angle inscrit, angle tangent, angles alternes-internes) permet de conclure.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> A est intersection des tangentes extérieures au cercle inscrit et au cercle exinscrit en A, donc centre d'une homothétie envoyant D sur D', le point "en bas" du cercle exinscrit. Donc A, D, D' alignés, donc il existe une unique homothétie de centre D envoyant A sur D'. Elle envoie (AM) sur une droite parallèle, donc $(D'J)$. Si H pied de la hauteur issue de A et H' point de contact du cercle exinscrit et (BC), elle envoie H sur H' (car (BC) est envoyée sur elle-même). Donc le milieu de $[AH]$ est envoyé sur celui de $[D'H]$, soit M sur J. Donc D, M, J alignés.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> X_1 centre de l'homothétie positive envoyant Γ_2 sur Γ_3, X_2 de celle envoyant Γ_3 sur Γ_1. Leur composée est positive et envoie Γ_2 sur Γ_1, donc son centre est l'intersection des tangentes extérieures, soit... X_3. Le centre de la composée est aligné avec les centres des deux homothéties que l'on compose, d'où

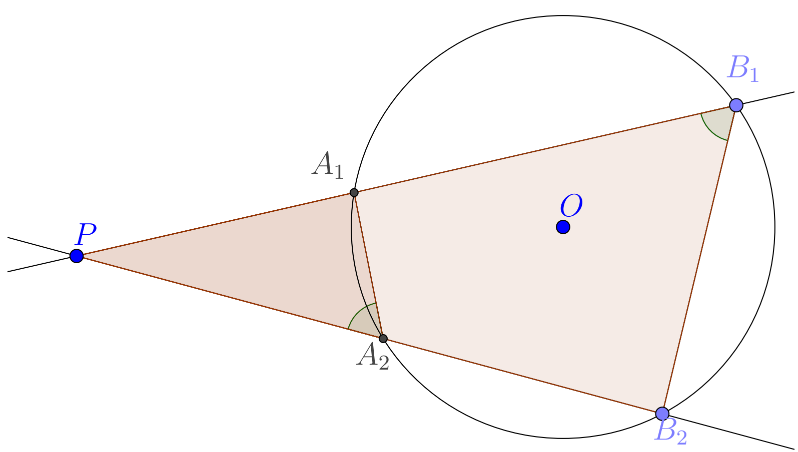
le résultat. Ce théorème est vrai en remplaçant DEUX paires de tangentes extérieures par les tangentes intérieures (pour des questions de signe, on aura deux homothéties négatives dont la composition en donne une positive).

Solution de l'exercice 5 On introduit ω le cercle inscrit, et X le centre de l'homothétie positive envoyant ω sur Γ. A est le centre de celle envoyant. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, $X \in (AA')$. De même, $X \in (BB')$ et $X \in (CC')$, d'où la conclusion.

3 dimanche matin : François Lo Jacomo

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons un cercle Γ et un point P, que l'on supposera dans un premier temps extérieur au cercle. Soient (d_1) et (d_2) deux droites passant par P, qui coupent le cercle en A_1 et B_1, A_2 et B_2 respectivement, comme sur la figure.



Le théorème de l'angle inscrit permet d'écrire : $\widehat{A_1A_2P} = \widehat{B_2B_1P}$, et de même $\widehat{A_2A_1P} = \widehat{B_1B_2P}$. Les triangles PA_1A_2 et PB_2B_1 sont donc semblables, et l'on a : $\dfrac{PA_1}{PB_2} = \dfrac{PB_2}{PB_1}$. On en déduit : $PA_1 \times PB_1 = PA_2 \times PB_2$. Ceci étant valable pour deux droites quelconques, si une droite passant par P coupe le cercle en deux points A et B, le produit $PA \times PB$ est indépendant de la droite. Ce produit est appelé "puissance du point P par rapport au cercle".

Dans deux cas particuliers au moins, ce produit est facile à calculer : si l'on appelle r le rayon du cercle, lorsque la droite passe par le centre O du cercle, $PA \times PB = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2$. De même, si la droite est tangente en T au cercle, $A = B = T$, donc $PA \times PB = PT^2 = PO^2 - r^2$ en vertu du théorème de Pythagore, vu que le triangle PTO est rectangle en T.

La notion de puissance ne vaut pas seulement lorsque P est extérieur au cercle : lorsque P est sur le cercle, la puissance de P par rapport au cercle est nulle, vu que $PA = 0$, et lorsque P est intérieur au cercle, la puissance existe encore, elle est toujours égale à $PO^2 - r^2$, donc elle est négative. C'est non pas le produit des longueurs PA et PB, mais le produit de leurs mesures algébriques. Comme PA et PB sont orientés en sens contraire, le produit des mesures algébriques sera négatif (quelle que soit l'orientation de la droite), mais la même démonstration que ci-dessus avec les triangles semblables reste valable. Si l'on définit la puissance d'un point par rapport à un cercle comme le produit (constant) des mesures algébriques de PA et PB, alors cette puissance est définie pour tout point du plan, elle est toujours égale à $PO^2 - r^2$ et est négative à l'intérieur du cercle, nulle sur le cercle et positive à l'extérieur.

Axe radical

Un premier résultat à connaître, c'est la notion d'axe radical. Etant donné deux cercles Γ_1 et Γ_2, quel est l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport aux deux cercles ? Il est facile de voir que c'est une droite. Soit P un tel point, O_1 et O_2 les centres des cercles, et H le pied de la perpendiculaire à (O_1O_2) passant par P. Considérons un repère de centre O_1, dans lequel O_2 ait pour coordonnées $(1;0)$. H a pour coordonnées $(x;0)$ et P, pour coordonnées $(x;y)$. La puissance de P par rapport au cercle Γ_1, de rayon r_1, est : $PO_1^2 - r_1^2 = x^2 + y^2 - r_1^2$. La puissance de P par rapport à Γ_2 est, de même, $(x-1)^2 + y^2 - r_2^2$. Ces puissances sont égales si et seulement si $2x = 1 + r_1^2 - r_2^2$. Le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles est donc la droite verticale d'équation : $x = \dfrac{1 + r_1^2 - r_2^2}{2}$. C'est ce qu'on appelle l'axe radical des deux cercles. On remarquera que si les deux cercles se coupent en M et N, M et N, qui ont tous deux une puissance nulle par rapport à chacun des cercles, appartiennent à l'axe radical. Dans ce cas, l'axe radical des deux cercles est donc la droite (MN). C'est un cas particulier très fréquent, certes, mais ce n'est pas le cas général car deux cercles ne se coupent pas obligatoirement.

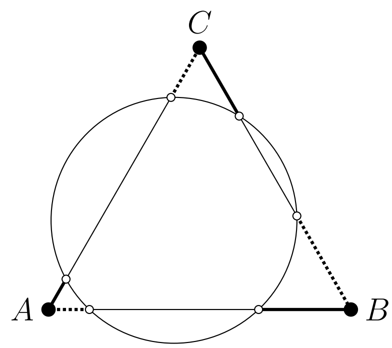
Exercices

Exercice 1 : Deux cercles se coupent en A et B. Une tangente commune touche les deux cercles en C et D. Montrer que AB passe par le milieu de CD.

Exercice 2 : Soient $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ six points du plan tels que $A,\ B,\ C,\ D$ soient sur un même cercle, $C,\ D,\ E,\ F$ soient sur un autre même cercle, distinct du premier. On suppose en outre que les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont deux à deux non parallèles. Montrer que ces trois droites sont concourantes si et seulement si $E,\ F,\ A,\ B$ sont eux aussi cocycliques.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle, et H son orthocentre. Soit M un point de (CA), et N un point de (AB). Les cercles de diamètres $[BM]$ et $[CN]$ se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 4 : Un cercle coupe les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un triangle équilatéral ABC chacun en deux points, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que la somme des longueurs des trois segments en gras est égale à la somme des trois segments en pointillés.



Exercice 5 : Soit $ABCD$ un parallélogramme et H l'orthocentre du triangle ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe $BC)$ en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant par H coupe $AB)$ en R et (CD) en S.

Montrer que les quatre points $P,\ Q,\ R,\ S$ sont cocycliques.

Exercice 6 : Quatre points $A,\ B,\ C,\ D$ sont, dans cet ordre, sur une droite (Δ). Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (Δ) en T. Soit P un point quelconque de la droite (XY), autre que T. La droite (PB) coupe le cercle de diamètre $[BD]$ en B et N. La droite (PC) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ en C en M. Montrer que les trois droites (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

2 L'après-midi : Combinatoire

1 vendredi après-midi : Igor Kortchemski

Comptage

Exercice 1 Combien peut-on trouver d'entiers $1 \leq a, b, c \leq 100$ tels que $a < b$ et $a < c$?

Exercice 2 Il y a 7 filles et 3 garçons dans un groupe lors d'un stage olympique. De combien de manières suivantes peut-on les placer en ligne dans chacun des deux cas suivants :

(1) lorsque les 3 garçons se suivent ?

(2) lorsque la première et la dernière sont une fille, et les garçons ne se suivent pas ?

Exercice 3 De combien de manières différentes peut-on placer n couples autour d'une table de sorte que deux personnes d'un même couple soient toujours côte à côte ?

Coefficients binomiaux

Exercice 4 De combien de manières différentes peut-on mettre 5 pièces identiques dans 3 sacs différents ?

Exercice 5 Calculer $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}$.

Exercice 6 Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Combien existe-t-il de m-uplets $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers positifs ou nuls tels que $x_1 + \cdots + x_m = n$?

(2) Combien existe-t-il de m-uplets $(x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers strictement positifs tels que $x_1 + \cdots + x_m = n$?

Injections, surjections, bijections

Exercice 7 (Exemple traité en classe : IMO 1989/6) Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une permutation $(x_1, \ldots, x_{2n})$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ a la propriété (P) s'il existe un entier $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ tel que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Montrer qu'il y a strictement plus de permutations qui ont la propriété (P) que celles qui n'ont pas la propriété (P).

Par exemple, pour $n = 2$, les permutations qui n'ont pas la propriété P sont

$$\{1234, 1432, 2143, 2341, 3214, 3412, 4123, 4321\}$$

et les permutations qui ont la propriété P sont

$$\{1234, 1324, 1342, 1423, 2134, 2314, 2413, 2431, 3124, 3142, 3241, 4132, 4213, 4231, 4312\}.$$

Exercice 8 Combien existe-t-il de surjections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, 3\}$?

Exercice 9 Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après (Figure 1) avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2016)$.

Exercice 10 Soit $n \geq 1$ un entier. Si $x_1, \ldots, x_m$ sont des entiers strictement positifs tels que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m$ et $x_1 + \cdots + x_m = n$, on dit que $(x_1, \ldots, x_m)$ est une partition de n qui a m parts.

Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que le nombre de partitions de n avec exactement k parts est égal au nombre de partitions de n dont la plus grande part est exactement k.

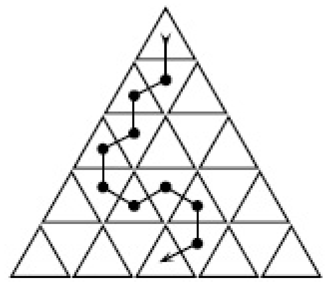


FIGURE 1 – Exemple de chemin

2 samedi après-midi : Matthieu Piquerez

- TD - Pavages et coloriages -

Exercice 1 Est-il possible de paver un échiquier 8×8 auquel on a enlevé un coin par des dominos 2×1 ? Et si l'on a enlevé deux coins opposés ? Et si l'on a enlevé deux coins non opposés ?

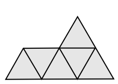
Exercice 2 Est-il possible de paver avec des triminos 3×1 :

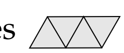
(i) un damier 8×8 ?

(ii) un damier 8×8 auquel manque le coin en haut à gauche ?

Exercice 3 Un tétramino est une figure formée de 4 carrés (pensez à Tetris). Trouvez le nombre m de tétraminos distincts (on dit que deux tétraminos sont identiques si on peut les superposer en les faisant pivoter mais sans les retourner). Est-il possible de paver un rectangle $4 \times m$ avec un tétramino de chaque sorte ?

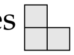
Exercice 4 Le plancher est pavé avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Peut-on réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Exercice 5 Peut-on paver un triangle équilatéral de côté 6 avec des "sphinx" de forme  ?

Exercice 6 Combien peut-on placer au maximum de parallélogrammes  dans un hexagone régulier de côté 3 ?

Exercice 7 Pour chaque tétramino (cf ci-dessus), répondez à la question suivante : peut-on paver un rectangle 4×7 avec ce tétramino ? (on a le droit aux rotations mais pas aux retournements).

Exercice 8 On coupe un coin de l'échiquier $(2n+1)\times(2n+1)$. Pour quelles valeurs de n peut-on recouvrir les cases restantes par des dominos 2×1 de telle sorte que la moitié des dominos soient horizontaux ?

Exercice 9 Pour quels n impairs peut-on recouvrir toutes les cases noires d'un damier $n \times n$ dont les coins sont noirs avec des pièces en L de 3 cases  ?

Exercice 10 On colorie certaines cases d'un échiquier 8×8 en gris. Combien de cases peut-on colorier au maximum si on veut qu'il n'y ait pas de trimino 3×1 gris ?

Exercice 11 Combien de rois peut-on mettre sur un échiquier 8×8 sans qu'ils se mettent en échec ?

Exercice 12 Un roi se trouve dans un coin d'un damier $m \times n$. Tour à tour, A et B le déplacent selon la règle des échecs (d'une case, on peut accéder à ses 8 voisines). Le premier qui repasse par une case déjà visitée a perdu. Qui gagne ?

- Solutions -

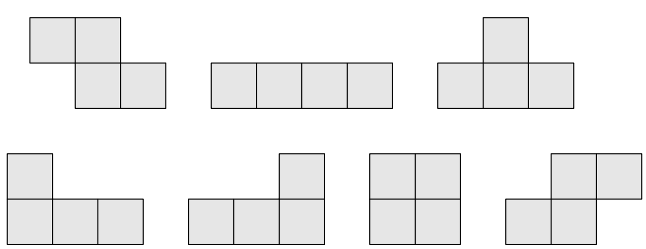
Solution de l'exercice 1 Non : un pavage avec des dominos recouvre nécessairement un nombre pair de cases. Or ici il faut couvrir 63 cases. C'est donc impossible.
Non : on colorie les cases en blanc et noir de la façon habituelle sur un échiquier. Alors il y a 30 cases d'une couleur et 32 d'une autre. Or un domino couvre une case de chaque couleur, donc il devrait y avoir autant de cases noires que de cases blanches.
Oui : si, par exemple, on a enlevé les deux coins supérieurs, il suffit de ne mettre que des dominos horizontaux.

Solution de l'exercice 2

(i) Une figure pavée entièrement par des triminos 3×1 possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.

(ii) On colorie la deuxième figure avec 3 couleurs différentes en les alternant de sorte que la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur et de sorte qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. La réponse est encore *non*.

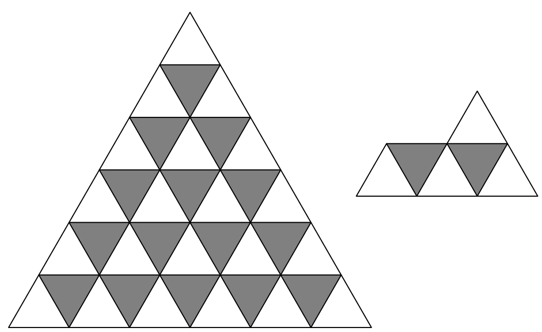
Solution de l'exercice 3 Il est facile de vérifier qu'il y a 7 pièces différentes au Tetris :



Ensuite, passons au pavage d'un rectangle 4×7. Si on colorie les cases en échiquier, on se retrouve avec 14 cases blanches et 14 noires. Tous les tétraminos recouvrent 2 cases noires et 2 blanches, quelle que soit la manière de les mettre, sauf le T, qui recouvre 3 blanches et 1 noire ou 3 noires et 1 blanche. Il est donc impossible de faire le pavage.

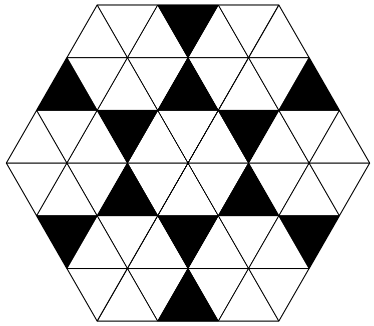
<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On colorie la première ligne en carrés bleus et rouges en commençant par bleu, la deuxième en noir et blanc en commençant par noir. Ensuite on continue avec des lignes alternées bleu-rouge et noir-blanc en commençant toujours par bleu et noir respectivement. Alors les dalles 2 x 2 couvrent exactement un carré de chaque couleur. Une dalle 4 x 1 couvre 2 carrés d'une couleur et 2 d'une autre. Ainsi les deux types de dalles ne sont pas interchangeables.

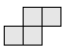
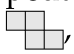
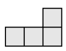
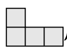
<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Le triangle équilatéral de côté 6 peut être divisé en 36 triangles de côté 1, dont $15 = 1+2+3+4+5$ sont « pointe en haut » (colorions-les en gris) et $21 = 1+2+3+4+5+6$ « pointe en bas » :

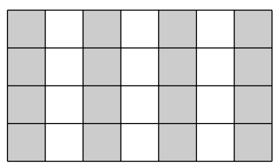


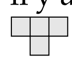
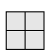
Or un sphinx est composé de 6 triangles (qui est bien un diviseur de 36, ce n'est pas là que se situe l'impossibilité), mais parmi ces 6 triangles, 4 sont dans un sens et 2 dans l'autre. Quelle que soit l'orientation de mon sphinx, celui-ci couvrira donc soit 2 cases grises et 4 cases blanches, soit 2 cases blanches et 4 cases grises, mais avec un nombre quelconque de sphinx on ne pourra couvrir qu'un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases grises. En particulier, on ne couvrira jamais 15 cases grises et 21 cases blanches : il restera un nombre impair de cases grises non pavées et un nombre impair de cases blanches non pavées.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Appelons s l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1. L'hexagone régulier peut être découpé en 6 triangles équilatéraux de côtés 3, donc d'aire $9s$: son aire totale est $54s$. Or les parallélogrammes ont chacun pour aire $4s$: comme $\frac{54s}{4s} > 13$, on devrait pouvoir en placer 13. Mais une fois encore, ce n'est pas possible : il suffit de colorier l'hexagone en 12 triangles noirs et 42 triangles blancs de sorte qu'un parallélogramme, quelles que soient les quatre cases qu'il occupe, couvre obligatoirement un et un seul triangle noir. On peut donc placer au maximum 12 parallélogrammes, mais il faut encore prouver qu'on peut effectivement en placer 12, ce qui est relativement facile (en ne couvrant pas du tout l'hexagone blanc du centre par exemple).



Solution de l'exercice 7 Seul le tétramino 4×1 permet de paver le rectangle.
Avec le , on peut clairement paver.
Avec le  et le , on voit facilement que quelque soit la façon dont on place le premier tétramino sur le bord gauche, on est directement bloqué.
Pour le L  et le , on introduit le coloriage suivant.

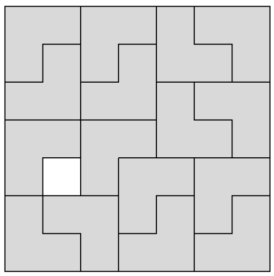


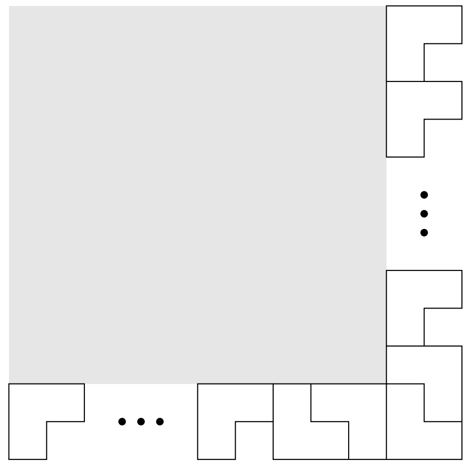
Supposons, par l'absurde, qu'il existe un pavage du rectangle avec des L. Chaque tétramino couvre un nombre impair de cases grises (plus exactement 1 ou 3) et il y a un nombre impairs de tétraminos (plus exactement 7) donc en tout il y a un nombre impair de cases grises recouvertes. Or il y a 20 cases grises. Contradiction.
Le même raisonnement fonctionne pour le T  si l'on choisit un coloriage en damier.
Pour le carré , sur le coloriage de la figure un carré recouvre autant de cases blanches que de cases grises. Or il y strictement plus de cases grises. Donc on ne peut pas recouvrir tout le rectangle avec des carrés.

Solution de l'exercice 8 Si n est pair, on trouve aisément un recouvrement qui convient. Lorsque n est impair, montrons qu'il est impossible de satisfaire les conditions. On colorie l'échiquier en deux couleurs : on colorie les cases des première, troisième, etc. lignes en bleu et les cases des seconde, quatrième, etc. lignes en rouge. Il y a alors $2n^2 + n$ cases rouges et $2n^2 + 3n$ cases bleues, soit un total de $4n^2 + 4n$ cases. On aura donc besoin de $2n^2 + 2n$ dominos. Il y aura donc $n^2 + n$ dominos horizontaux et autant de verticaux.

Chaque domino vertical recouvre une case de chaque couleur. Une fois les dominos verticaux placés, il reste n^2 cases rouges et n^2+n cases bleues à recouvrir par des dominos horizontaux. D'après le coloriage, un domino horizontal recouvre des cases de la même couleur. Il faut donc que n soit pair. Autrement dit, lorsque n est impair, il sera impossible de recouvrir l'échiquier suivant les conditions de l'énoncé.

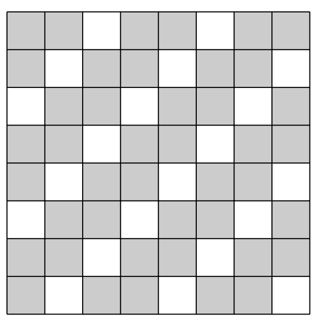
Solution de l'exercice 9 Soit m tel que $n = 2m + 1$. Si l'on colorie les cases noires de colonnes impaires en gris, on se rend compte qu'un L recouvre au plus une case grise. Donc pour recouvrir toutes les cases noires (et grises), il faut au moins autant de L que de cases grises. Il y a $(m+1)^2$ cases grises donc au moins $3(m+1)^2$ carrés recouverts par des L dans un recouvrement qui convient. Ceci montre que pour $n = 1, 3$ ou 5 il n'existe pas de pavage. Pour $n = 7$, il y a le recouvrement de gauche.

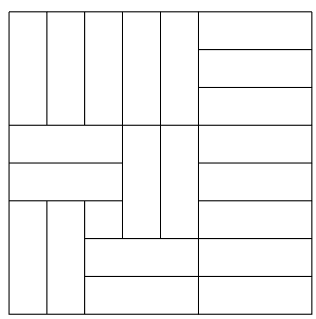




Si l'on sait recouvrir les cases noires pour l'échiquier $n \times n$, alors on peut construire un recouvrement des cases noires pour l'échiquier $(n+2) \times (n+2)$ en ajoutant en bas et à droite les L comme sur la figure de droite. Donc on peut construire un recouvrement si et seulement si $n \geq 7$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On peut colorier 43 cases comme dans la figure de gauche.





On ne peut pas faire mieux car s'il restait strictement moins de 21 cases blanches, l'un des triminos de la figure à droite n'en contiendrait pas et serait donc entièrement gris.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Réponse : 16. En effet, on découpe l'échiquier en 16 blocs 2×2 : il y a au plus un roi par bloc donc au plus 16 rois. Réciproquement, il suffit de voir qu'en mettant un roi en haut à gauche de chaque bloc, cela fonctionne.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Le résultat dépend de la parité du produit nm.

Si nm est pair, on peut partitionner la grille en dominos de taille 1×2. Le roi se trouve dans un des dominos. Anthelme le bouge dans l'autre partie du domino, dans lequel on n'a désormais plus le droit de retourner. Brunehaut est donc obligée de bouger le roi dans un autre domino, qu'Anthelme complète au coup suivant, et ainsi de suite jusqu'à ce que Brunehaut soit bloquée. Ainsi, Anthelme a une stratégie gagnante.

Si nm est impair, on partitionne de la même manière la grille en laissant une case seule dans un coin : la case où se trouve le roi initialement. Cette fois-ci, Anthelme commence les dominos et Brunehaut les finit : elle a donc une stratégie gagnante.

3 dimanche après-midi : Pierre Bornsztein

Réflexions sur le principe du maximum (ou du minimum).

Exercice 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. A chaque point à coordonnées entières, on attribue un entier naturel qui est la moyenne arithmétique des entiers attribués à ses quatre voisins (ceux situés à une distance unité). Prouver qu'on a attribué le même nombre à chaque point.

Exercice 2. Lors d'une soirée, aucun garçon n'a dansé avec chacune des filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon.

Prouver qu'il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 3. Douze candidats au poste de maire participent à un débat télé visé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare "jusque là, on a menti une seule fois". Un deuxième dit alors "Maintenant, cela fait deux fois". Un troisième s'exclame alors "Trois fois, maintenant" et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion. Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Exercice 4. On considère $2n$ points du plan, trois quelconques jamais alignés. On suppose que n sont colorés en rouge, et les n autres en bleu. Montrer que l'on peut tracer n segments, deux à deux sans point commun, de sorte que tout point rouge soit relié à un point bleu et que tout point bleu soit relié à un point rouge.

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n filles d'un groupe est la seule à connaître un certain potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que son amie lui transmet. Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Exercice 6. Des jetons sont placés sur des cases distinctes d'un échiquier. Un *mouvement* consiste à déplacer l'un des jetons de la case qu'il occupe dans une case vide qu'il n'a pas déjà occupée. On remarque qu'après un certain nombre de mouvements, on est dans la configuration où chaque jeton est retourné dans sa case initiale après avoir visité chacune des cases exactement une fois. Prouver qu'il existe un moment où aucun jeton n'était dans sa position initiale.

Exercice 7. Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à une confé rence. Chaque mathématicien a des échanges avec $n+1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Exercice 8. Dans chaque case d'un tableau $n \times n$ est inscrit un nombre réel $(n \geq 2)$. Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne, on trouve toujours le même résultat a. Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même colonne, on trouve toujours le même résultat b. Prouver que $a = b$.

Exercice 9. Le long d'une route horizontale qui borde un ravin, se trouvent n temples. Chacun de ces temples est gardé par deux éléphants qui lui tournent le dos, l'un immédiatement à la gauche du temple et l'autre immédiatement à sa droite. Ces $2n$ éléphants sont de tailles distinctes.

Lorsqu'un éléphant se déplace le long de la route, il piétine tout éléphant qui lui tourne le dos. Par contre, dans un face à face, le plus petit des deux éléphant est toujours piétiné par le plus gros. Un éléphant se déplace toujours dans la même direction jusqu'à ce qu'il soit éventuellement piétiné par un autre (et, dans ce cas, tombe dans le ravin sans espoir de retour).

Un temple est *envahi* lorsqu'il est atteint par un éléphant.

Prouver qu'il existe un unique temple qui ne sera pas envahi si tous les autres temples ordonnent à leurs éléphants respectifs de se déplacer.

Exercice 10. Soit $n > 0$ un entier. Un disque est divisé en $2n$ secteurs égaux. La moitié d'entre eux sont coloriés en rouge et les autres en bleu. A partir de secteurs arbitraires, les secteurs bleus sont numérotés de 1 à n dans le sens direct, alors que les secteurs rouges sont numérotés de 1 à n dans le sens indirect. Prouver qu'il existe un demi-disque formé de secteurs numérotés de 1 à n dans un certain ordre.

Exercice 11 (Théorème de Sylvester). Soit E un ensemble fini non vide de points du plan tel que toute droite passant par deux points de E en contienne au moins un troisième. Prouver que E est contenu dans une droite.

Solutions des exercices ci-dessus.

Exercice 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. A chaque point à coordonnées entières, on attribue un entier naturel qui est la moyenne arithmétique des entiers attribués à ses quatre voisins (ceux situés à une distance unité). Prouver qu'on a attribué le même nombre à chaque point.

Solution. L'ensemble des nombres attribués est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément. Soit donc m le plus petit des nombres attribués et A un point à qui on a attribué m. Si a, b, c, d sont les quatre nombres attribués aux voisins de A, on a donc $a, b, c, d \geq m$ par minimalité de m, d'où $\frac{a+b+c+d}{4} \geq m$ l'inégalité étant stricte si l'un des nombres a, b, c, d n'est pas égal à m. Or, par construction, on doit justement avoir $\frac{a+b+c+d}{4} = m$, donc $a = b = c = d = m$. Cela assure que les quatre voisins d'un point à qui a été attribué le nombre m ont eu aussi reçu le nombre m.

Considérons un point B quelconque du plan, à coordonnées entières. Il est clair qu'en passant d'un point à coordonnées entières à un de ses voisins, on peut trouver un chemin de longueur finie qui relie A à B. Le résultat ci-dessus permet d'affirmer qu'à partir de A, et de proche en proche, tous les points du chemin auront reçu le nombre m. En particulier, B a reçu m. Puisque B est arbitraire, c'est donc que tout point du plan à coordonnées entières a reçu le nombre m.

Exercice 2. Lors d'une soirée, aucun garçon n'a dansé avec chacune des filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon.

Prouver qu'il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Solution. Soit g un garçon qui a dansé avec le maximum de filles. On sait qu'il existe une fille f' qui n'a pas dansé avec b. De même, on sait qu'il existe un garçon g' qui a dansé avec f'. Parmi toutes les filles qui ont dansé avec g il doit en exister au moins une qui n'a pas dansé avec g', sans quoi g' aurait dansé avec au moins une fille de plus que g, en contradiction avec la maximalité de g. On choisit donc f parmi les filles qui ont dansé avec g mais pas avec g', et c'est gagné.

Exercice 3. Douze candidats au poste de maire participent à un débat télévisé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare "jusque là, on a menti une seule fois." Un deuxième dit alors "Maintenant, cela fait deux fois." Un troisième s'exclame alors "Trois fois, maintenant" et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion. Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Solution. On note $C_1, ..., C_{12}$ les candidats dans l'ordre de leur prise de parole. Puisqu'au moins un a dit la vérité, on peut considérer le plus petit entier k tel que C_k ait dit la vérité (i.e. C_k est le premier à avoir dit la vérité). Par minimalité de k, tous ceux qui ont parlé avant lui ont menti. De plus, puisque C_k a dit la vérité, il y a eu exactement k mensonges avant sa prise de parole et donc exactement k mensonges après. Du coup, C_{k+1} a menti en disant qu'il y avait eu $k+1$ mensonges avant sa prise de parole, et y a donc eu justement $k+1$ mensonges après que C_{k+1} ait parlé. Donc, C_{k+2} a menti en disant qu'il y avait eu $k+2$ mensonges avant sa prise de parole, et y a donc eu justement $k+2$ mensonges après que C_{k+2} ait parlé, et ainsi de suite. Ainsi, tous les candidats qui ont parlé après C_k ont menti.

Et, finalement, seul C_k a dit la vérité. Il y a donc eu 11 menteurs.

Remarque. En fait, on peut préciser un peu la situation. En effet, si $k \geq 2$ alors, avec les notations ci-dessus, on sait que C_k a dit la vérité et qu'il y a eu exactement

k mensonges avant sa prise de parole. En tenant compte du mensonge de C_{k-1}, c'est qu'il y avait donc eu exactement $k-1$ mensonges avant que C_{k-1} ne parle. Mais alors, C_{k-1} a dit la vérité, en contradiction avec la minimalité de k. Par suite, on doit avoir $k=1$, ce qui signifie que c'est le premier candidat à avoir parlé qui est le seul à avoir dit la vérité.

Exercice 4. On considère $2n$ points du plan, trois quelconques jamais alignés. On suppose que n sont colorés en rouge, et les n autres en bleu. Montrer que l'on peut tracer n segments, deux à deux sans point commun, de sorte que tout point rouge soit relié à un point bleu et que tout point bleu soit relié à un point rouge.

Solution. Comme il n'existe qu'un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de couplages des n points rouges avec les n points bleus. On considère alors un couplage pour lequel la somme des longueurs des segments est minimale.

Par l'absurde : supposons que, dans ce couplage minimal, il existe deux des segments qui s'intersectent.

Soit R, R' deux points rouges distincts, B, B' deux points bleus tels que les segments $[RB]$ et $[R'B']$ aient été tracés, et qui s'intersectent. Comme il n'y a pas trois points alignés et que les segments ont des extrémités deux à deux distinctes, c'est donc qu'il existe un point $I \in]RB[$ et $]R'B'[$. Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$BR' < BI + IR'$ et $B'R < B'I + IR$

d'où $BR' + B'R < BR + B'R'$.

Par suite, si l'on couple B avec R' et B' avec R, sans changer les autres couples, on obtient un nouveau couplage dont la somme des longueurs est strictement plus petite que celle de notre couplage minimal, ce qui est impossible.

Et donc, dans ce couplage minimal, il n'existe pas deux des segments qui s'intersectent, ce qui fournit une solution au problème.

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n filles d'un groupe est la seule à connaître un certain potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que son amie lui transmet. Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Solution. Considérons un échange de coups de téléphone qui conduise à ce que chacune des filles soit au courant de tout. On appelle f la première fille à être au courant de tout.

Clairement, avant que f ait tout appris, il y a eu au moins $n-1$ coups de téléphone, un pour récupérer chacune des $n-1$ informations qu'elle ne connaissait pas (mais pas forcément directement vers f). D'autre part, dès que f sait enfin tout et qu'elle est la première fille dans ce cas, chacune des $n-1$ autres filles doit encore attendre au moins un coup de téléphone pour faire partie du club des personnes avisées (pas forcément donné par f). Ainsi, il faut au moins $2(n-1)$ coups de téléphone pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Réciproquement, il est facile de voir que cela est effectivement réalisable en $2(n-1)$ coups de téléphone : chacune des $n-1$ filles téléphone à une certaine fille f fixée à l'avance. Puis, f retéléphone à chacune d'elles.

Exercice 6. Des jetons sont placés sur des cases distinctes d'un échiquier. Un *mouvement* consiste à déplacer l'un des jetons de la case qu'il occupe dans une case vide qu'il n'a pas déjà occupée. On remarque qu'après un certain nombre de mouvements, on est dans la configuration où chaque jeton est retourné dans sa case initiale après avoir visité chacune des cases exactement une fois. Prouver qu'il existe un moment où aucun jeton n'était dans sa position initiale.

Solution. Considérons le jeton J qui revient le premier dans sa case initiale et le moment T où cela se produit. Le moment $T-1$ où va s'effectuer le mouvement qui va le ramener dans sa position initiale est le moment cherché. En effet, à cet instant, chacun des jetons a déjà dû quitter sa case initiale sans quoi J n'aurait pu se retrouver sur chacune des différentes cases (qui doivent être vides pour pouvoir y venir), et la minimalité de J assure qu'aucun autre jeton n'a pu revenir dans sa position initiale au moment $T-1$.

Exercice 7. Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à une conférence. Chaque mathématicien a des échanges avec $n+1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Solution. On note A, B, C les trois pays. Parmi tous les mathématiciens, on peut considérer celui qui a eu le plus d'échanges avec des mathématiciens d'un même pays (s'il y a plusieurs tels mathématiciens, on choisit n'importe lequel d'entre eux). Sans perte de généralité, on peut supposer que ce maximum est m, qu'il s'agisse du mathématicien a du pays A, et que ces m échanges ont eu lieu avec des mathématiciens de B. Puisqu'il n'y a que n mathématiciens de B à cette conférence, on a $m \leq n+1$. Et, comme a a eu $n+1$ échanges, il existe donc un mathématicien c du pays C qui a eu un échange avec a.

Par l'absurde : supposons que c n'ait eu d'échange avec aucun des m mathématiciens de B qui ont eu chacun un échange avec a.

Alors, c n'a pu avoir qu'au plus $n-m$ échanges avec des mathématiciens de B, et donc au moins $n+1-(n-m) = m+1$ échanges avec des mathématiciens de A. Cela contredit la maximalité de m.

Ainsi, il existe un mathématicien $b \in B$ qui a eu des échanges avec a et avec c. Ces trois mathématiciens a, b, c assurent la conclusion.

Exercice 8. Dans chaque case d'un tableau $n \times n$ est inscrit un nombre réel $(n \geq 2)$.

Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne, on trouve toujours le même résultat a. Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même colonne, on trouve toujours le même résultat b. Prouver que $a = b$.

Solution. Par l'absurde : supposons que $a \neq b$.

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a > b$.

On dira que le nombre x est *gros* si $x > \frac{b}{2}$. Puisque la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne vaut toujours a, avec $a > b$, c'est donc que le plus grand nombre de chaque ligne est un gros nombre et que chaque ligne contient au moins un gros nombre. En particulier, il y a donc au moins n gros nombres. Mais, il ne peut y avoir deux gros nombres dans une même colonne, sans quoi la somme des deux plus grands nombres d'une telle colonne serait strictement supérieure à b, en contradiction avec l'énoncé. Ainsi, il ne peut y avoir plus de n gros nombres.

Finalement, il y a exactement n gros nombres, un par ligne et un par colonne.

Soit alors g le plus petit des gros nombres. Il existe donc m situé sur la même ligne que g tel que $m + g = a$ et m n'est pas un gros nombre. Dans la colonne de m, il existe donc un gros nombre G et un autre nombre m' tels que $G + m' = b$. Mais, $G > m$ (puisque m n'est pas gros) et m' est le second plus grand nombre de la colonne commune à G et m, donc $m' \geq m$. Enfin, par minimalité de g, on a $G \geq g$.

Mais alors $b = G + m' \geq g + m = a$, en contradiction avec $a > b$.

Et donc, on a $a = b$.

Exercice 9. Le long d'une route horizontale qui borde un ravin, se trouvent n temples. Chacun de ces temples est gardé par deux éléphants qui lui tournent le dos, l'un immédiatement à la gauche du temple et l'autre immédiatement à sa droite. Ces $2n$ éléphants sont de tailles distinctes.

Lorsqu'un éléphant se déplace le long de la route, il piétine tout éléphant qui lui tourne le dos. Par contre, dans un face à face, le plus petit des deux éléphant est toujours piétiné par le plus gros. Un éléphant se déplace toujours dans la même direction jusqu'à ce qu'il soit éventuellement piétiné par un autre (et, dans ce cas, tombe dans le ravin sans espoir de retour).

Un temple est *envahi* lorsqu'il est atteint par un éléphant.

Prouver qu'il existe un unique temple qui ne sera pas envahi si tous les autres temples ordonnent à leurs éléphants respectifs de se déplacer.

Solution. Soit $T_1, ..., T_n$ les temples numérotés de gauche à droite. Pour chaque i, on note g_i et d_i les éléphants situés initialement à gauche et à droite de T_i. On dira que T_i peut envahir T_j si l'un des éléphants de T_i peut entrer dans T_j.

Clairement, il n'existe pas deux temples T_i et T_j, avec $i < j$, qui puissent s'envahir l'un l'autre, car on aurait $d_i > g_j > d_i$.

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$: le cas $n = 1$ est évident.

Soit $n \geq 2$ fixé. On suppose le résultat assuré pour toute configuration de k temples, avec $1 \leq k < n$. On considère alors une configuration de n temples.

On note que les éléphants d_n et g_1 ne servent à rien, et on peut leur rendre leur liberté. Par symétrie des rôles, on peut alors supposer que l'éléphant de plus grande taille parmi les $2n - 2$ restants est d_k, avec $1 \leq k < n$.

Clairement, par maximalité de d_k, l'éléphant d_k peut envahir tous les temples T_i avec $i > k$, et aucun de ces temples ne peut envahir de temple T_j avec $j \leq k$ puisqu'il lui faudrait pouvoir envahir T_k auparavant. Par conséquent, aucun de ces temples T_j avec $j > n$ n'est le temple cherché et, si l'on élimine $T_{k+1}, ..., T_n$, les temples $T_1, ..., T_k$ conservent leur statuts mutuels (être envahissable ou ne pas l'être...). L'hypothèse de récurrence assure alors de l'existence et de l'unicité d'un temple T qui ne peut être envahit par aucun des autres T_i avec $i \leq n$, et donc pas non plus par un des T_i avec $i > k$.

Exercice 10. Soit $n > 0$ un entier. Un disque est divisé en $2n$ secteurs égaux. La moitié d'entre eux sont coloriés en rouge et les autres en bleu. A partir de secteurs arbitraires, les secteurs bleus sont numérotés de 1 à n dans le sens direct, alors que les secteurs rouges sont numérotés de 1 à n dans le sens indirect. Prouver qu'il existe un demi-disque formé de secteurs numérotés de 1 à n dans un certain ordre.

Solution. On note b_i (resp. r_i) le secteur bleu (resp. rouge) qui porte le numéro i, et ces numéros sont considérés modulo n. Pour tout i, les secteurs b_i et r_i sont séparés par deux groupes de secteurs, selon que l'on tourne dans un sens ou dans l'autre. Parmi ces deux groupes, le plus petit nombre de secteurs qui séparent b_i et r_i sera appelé *la distance entre* b_i *et* r_i, que l'on notera d_i. Parmi les nombres $d_1, ..., d_n$, on choisit le plus petit d'entre eux (ou l'un des plus petits si cette valeur apparaît plusieurs fois), disons d_m. Supposons que si l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, on rencontre r_i puis d_m secteurs, puis b_i (l'autre cas se résout de façon similaire).

Par l'absurde : supposons que, parmi les d_m secteurs qui séparent b_m et r_m, il y en ait au moins un de chaque couleur.

Alors $d_m \geq 2$ et l'ordre de numérotation impose que l'un de ces secteurs est b_{m-1} et un autre est r_{m-1}. Mais alors $d_{m-1} \leq d_m - 2$, ce qui contredit la minimalité de d_m.

Ainsi, les d_m secteurs qui séparent b_m et r_m sont d'une même couleur et, si $d_m \geq 1$ l'ordre de numérotation impose qu'ils portent les numéros $m-1, m-2, ..., m-d_m$.

- S'ils sont bleus ou si $d_m = 0$, on considère le demi-disque D qui contient r_m et les d_m secteurs ci-dessus, mais qui ne contient pas b_m. Soit k le nombre total de secteurs bleus contenus dans D. L'ordre de numérotation impose alors que D contienne les secteurs bleus de numéros $m-k, ..., m-d_m, ..., m-2, m-1$. D'autre part, D contient exactement $n-k$ secteurs rouges, qui portent les numéros $m, m+1, ..., m+n-k-1$. Et ainsi, le demi-disque D convient.

- S'ils sont rouges, on raisonne de la même façon avec le demi-disque D' qui contient b_m et les d_m secteurs ci-dessus, mais qui ne contient pas r_m.

Exercice 11 (Théorème de Sylvester). Soit E un ensemble fini non vide de points du plan tel que toute droite passant par deux points de E en contienne au moins un troisième. Prouver que E est contenu dans une droite.

Solution. Par l'absurde : supposons que les points de E ne soient pas tous alignés.

Il existe donc un ensemble fini non vide de triangles non dégénérés dont les trois sommets appartiennent à E. Parmi eux, on en choisit un dont une des hauteurs est minimale. Disons que le triangle est ABC et que $AH = d$ est minimale, où H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC.

Puisque (BC) passe par deux points de E, cette droite contient au moins un autre point de E, ce qui assure qu'il y a deux points de E sur (BC) qui sont du même côté de H (éventuellement H est l'un d'eux). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agisse des points X et Y, avec $X \in [HY]$.

Or, dans un triangle, la plus petite hauteur est toujours perpendiculaire au plus grand côté (le produit de la hauteur et du côté opposé donne deux fois l'aire du triangle) et donc issue du sommet en lequel on trouve le plus grand angle. Par notre choix, on a $\widehat{AXY} \geq \frac{\pi}{2}$ et l'angle en X est alors le plus grand (strictement) des angles dans AXY. La hauteur issue de X dans AXY est donc strictement inférieure à celle issue de A, en contradiction avec la minimalité de d.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction. Cela entraine que tous les points de E sont alignés.

Remarque. Que l'on ne s'y trompe pas : cette preuve est très simple mais il a fallu près de 50 ans pour la trouver...

3 Lundi : Test final

Durée : 3 heures

Instructions

— **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

— Toute affirmation doit être soigneusement **justifiée**.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

— Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1

Deux cercles se coupent en A et B. Une tangente commune aux deux cercles les touche en C et D. Soient M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[AD]$. Montrer que les droites (DM), (CN) et (AB) sont concourantes.

Exercice 2

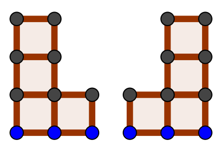
Soit ABC un triangle, Γ_A le cercle exinscrit en A, I le point de contact du cercle inscrit Γ et de $[BC]$, J celui de Γ_A et de $[BC]$, et k le point d'intersection de (AJ) et Γ le plus proche de A. Montrer que IJK est rectangle en I.

Exercice 3

Les 16 cases d'un tableau 4×4 sont blanches au départ. On appelle *transformation* le fait de sélectionner un rectangle 1×3 ou 3×1 et de changer la couleur de chacun des trois carrés qui le compose de blanc à noir ou bien de noir à blanc. Est-il possible que toutes les cases deviennent noires après une suite de transformations ?

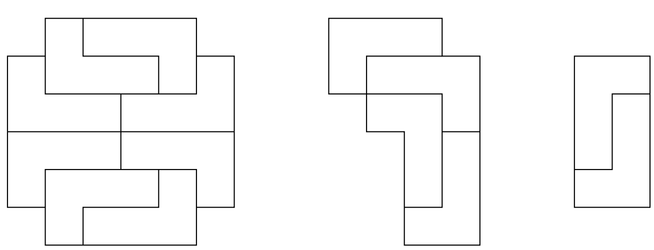
Exercice 4

Pour quelles valeurs de n peut-on remplir un échiquier de n lignes et n colonnes auquel on a enlevé les quatre cases des coins avec des tétraminos en forme de L ? *(On rappelle qu'on appelle tétramino en forme de L l'une des deux formes ci-dessous, tournée dans n'importe quel sens).*



Solution de l'exercice 4

Réponse : $n = 4k + 2$. On doit paver $n^2 - 4$ carrés avec des dalles de 4 carrés, donc n doit être pair. On colorie le rectangle en lignes noires et blanches qui s'alternent. Alors chaque dalle recouvre soit 3 carrés blancs et 1 noir soit le contraire. Ainsi, on doit avoir un nombre pair de dalles pour couvrir le même nombre de carrés blancs et noirs. Ainsi 8 divise $n^2 - 4$, donc $n = 4k + 2$. Il est facile de faire une construction pour tout n de ce type (ci-dessous la figure de gauche présente le cas $n = 6$; pour passer de n à $n + 4$ on présente comment paver les coins et il reste à compléter les bords avec des rectangles).



V. Conférences

1 Les Olympiades... (Cécile Gachet)

Au stage de Cachan junior, on fait des mathématiques olympiques, on cherche des exercices amusants et on joue aux cartes pendant cinq jours. A la fin du stage, chacun rentre chez soi, et même si tout reprend comme avant, on regrette un peu de ne plus faire tout ça... Alors, comment continuer les activités olympiques après le stage de Cachan junior ?

La bonne nouvelle, c'est que les opportunités ne manquent pas ! Entre les différentes compétitions internationales de mathématiques et les nombreuses manières de s'y préparer, pas le temps de s'ennuyer. Pour avoir les idées claires sur les activités olympiques, voici un résumé (non exhaustif) des possibilités offertes.

La JBMO : une compétition internationale pour les junior La JBMO a lieu tous les ans, pendant cinq jours en mai, et rassemble une vingtaine de pays participants. Chaque pays présente une délégation constituée de six élèves de moins de quinze ans et demi accompagnés par un team leader et un deputy leader. Chaque élève est alors confronté à une épreuve d'une matinée : il s'agit de résoudre quatre exercices de mathématiques olympiques (géométrie, combinatoire, arithmétique, algèbre) en quatre heures et demie.

En dehors des épreuves, les participants profitent des excursions organisées par le pays hôte et sympathisent avec les élèves des autres pays. L'ambiance est toujours très chaleureuse (on apprend vite à jouer au loup-garou en anglais...) A la fin du séjour, les pays sont classés selon le nombre de points de leurs participants, et les élèves qui ont le mieux réussi l'épreuve reçoivent des mentions honorables ou des médailles.

D'autres compétitions internationales Quand on n'est plus junior (ou même quand on est junior, si on est très motivé !), on peut toujours participer à des compétitions internationales de mathématiques, comme : l'olympiade internationale de mathématiques (OIM), l'olympiade européenne de mathématiques pour filles (EGMO), le championnat mathématiques des jeunes méditerranéens (MYMC), le romanian masters of mathematics (RMM), l'olympiade mathématique du Bénélux (BxMO), l'olympiade balkanique de mathématiques (BMO)... Chacune de ces olympiades a son site internet.

La préparation olympique Pour participer à ces compétitions, il faut se préparer et passer des tests de sélection : c'est ce que gère l'olympiade française de mathématiques (OFM). Tous les ans, une centaine d'élèves sont sélectionnés début octobre par un test de mathématiques olympiques. Ils reçoivent ensuite tous les mois des exercices à chercher, ont quelques tests de sélection à faire en temps limité, peuvent pour les meilleurs participer à un stage olympique en février à Cachan.

Par ailleurs, on s'entraîne de bien des manières en mathématiques olympiques : participer à des stages (comme celui de Cachan junior ou comme le stage olympique d'été de la coupe Animath), aller à des clubs de mathématiques (à Lyon, Paris, Toulouse, Strasbourg...) est toujours une bonne idée !

Et après ? Enfin, après avoir fait beaucoup de mathématiques olympiques et participé à diverses compétitions internationales, lorsqu'on passe dans l'enseignement supérieur, on peut se demander comment continuer l'aventure ? C'est simple : il suffit de nous rejoindre comme bénévole à Animath ou à l'OFM, par exemple en donnant des cours dans les stages pour transmettre sa passion des mathématiques olympiques !

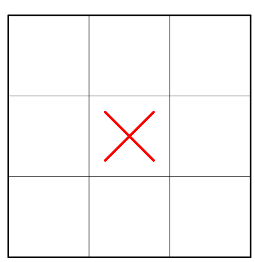
2 Comment jouer au morpion... ? (Gabriel Pallier)

Comment jouer (et gagner !) au morpion sur les surfaces ?

G. Pallier

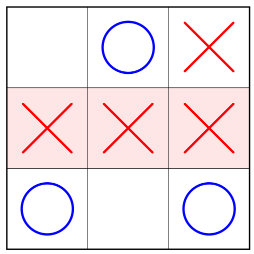
Stage Animath Cachan 2016

Statégie



Un exemple : **X** commence au centre

Statégie



X a gagné.

Stratégie

Remarque

A partir du 3ème coup, tous les coups de **O** *étaient forcés.*

On dit que, à partir deu 3è coup, **X** a suivi une stratégie, qui lui a permis de gagner quoiqu'il arrive (si il ou elle ne fait pas d'erreur).

Théorème

Si **X** *joue son premier coup en 5 et* **O** *joue son deuxième coup en 2, alors* **X** *possède une stratégie gagnante.*

Remarque

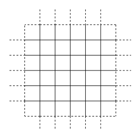
On peut remplacer 2 par 4, 6 ou 8 dans le théorème.

Question

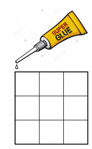
Est-ce que dès le début de la partie, **X** *possède une stratégie gagnante ?*

Variante

Jusqu'à présent, le plateau de jeu avait des bords. Comment faire pour les enlever ?



1. Un plateau infini ?



2. On recolle les bords

Le plateau infini

Si le but est d'aligner 9 pierres, alors **O a une stratégie permettant d'annuler la partie** (sur le plateau infini, mais aussi sur les plateaux finis).

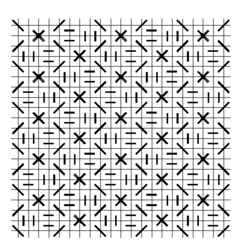
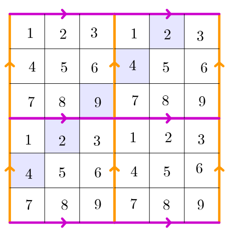


FIGURE 1 – La constrution de Hales et Jewett

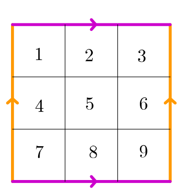
Le plateau recollé



Il est pratique de dessiner plusieurs fois le plateau recollé. Ainsi, on voit mieux les nouveaux alignements.

Le plateau recollé- questions

Voici quelques questions :



- Pouvez-vous trouver tous les nouveaux alignements ?
- Combien les cases ont-elles de voisines ?
- Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, comment doit-il jouer ?
- Combien y a-t-il de symétries du jeu ? [*Indice :* beaucoup.]

On peut encore se poser les mêmes questions, avec les différentes manières de recoller le plateau.

VI. Citations mémorables

— *Marie* autistes –> hautistes –> habitants de la Hauts de France (de Xavier).

— *Pierre, animateur* Je me suis toujours demandé pourquoi tous les élèves, quand ils vont au tableau, commencent par le tableau du milieu.

— *Loïc* C'est qui, Donald Trump ?
— *Vincent, animateur* Quelqu'un qui va perdre l'élection américaine.

— *Vincent, à un élève* Jusqu'à combien tu sais compter, toi ?
— ? ? ...
— *Loïc* Jusqu'à 999 999 999 999.
— *Vincent* Oui, mais j'avais demandé à un matheux...

— *Enora* Vous faites quoi ?
— *Yaël* On essaie d'embrocher des têtards.

Dans un problème sur les extrémums
— *Pierre* Et là, je sors l'arme ultime...
— *Jean* La bombe nucléaire !

— *Cedric* Donc, il faut que ce soit injectif et non pas su**b**jectif

— *Xavier* *(sur un exo où il faut prouver le théorème de Sylvester)* Je l'ai prouvé grâce au théorème de Sylvester.

— *Pierre* Un segment, en gros, c'est tout droit.

Dans un exercice de cours sur les homothéties
— Comment fait-on ?
— Il faut faire une homothétie !
sur les homothéties toujours
— Qui va envoyer le cercle Ω sur le cercle Γ ?
— *un élève* C'est moi !

— *Auriane* Tracer un cercle cocyclique.

— *Blanche* Le sommeil, c'est sacré. Le physique de l'intelligence

— *Emilie* Je vais fermer la lumière

— *Yaël* *(son poulet tombe)* Un bout de mon poulet a chu.

Vincent, en parlant du principe des tiroirs
— Bien sûr, nous sommes tous des chaussettes !

— Il y a un tiroir qui sert à rien, alors on le tue !
— ça, ça sert même pour les vraies maths, celles qui ne servent à rien...

— *Jean, en parlant des ensembles en forme de patatoïdes* Franchement, si on propose des patates rouges ou bleues, je me casse du restaurant.

— *Linda* Le Colin, c'est comme le saumon

— *Yaël, en parlant de sa colle* Il y a mon éléphant qui est tombé.

de 7 h 42 à 11 h 42, tous les jours, tout le monde... **42 !**