STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2014

Cachan, 20 au 24 octobre 2014

Avant-propos

Le stage olympique junior de toussaint a été organisé à Cachan par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler des élèves de seconde et de collège,
nés en 2000 ou après
(donc susceptibles d'être candidats aux Olympiades Balkaniques Junior 2015),
repérés entre autres par leur participation à diverses compétitions,
et de leur donner les bases nécessaires
pour participer aux compétitions internationales.
Près de la moitié des participants ont été dès cette année
intégrés au groupe que l'Olympiade Française de Mathématiques
prépare à plusieurs compétitions internationales de 2015 :
Olympiade Internationale de Mathématiques,
Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques,
Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles.

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.

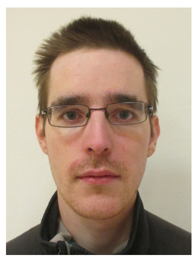
Les Animatheux

Margaret Bilu

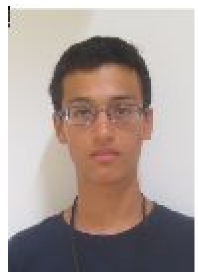
Pierre Bornsztein

Thomas Budzinski

Guillaume Conchon-Kerjan



Vincent Jugé



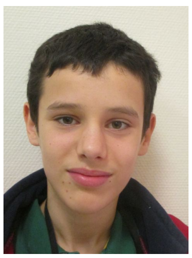
Félix Lequen

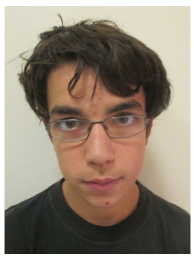
François Lo Jacomo

Jean-François Martin

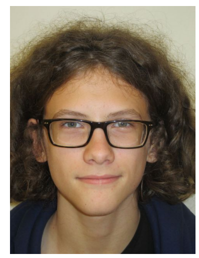
Jean-Louis Tu

Les élèves


Vincent Baizeau


Xavier Banos


Pierre-Alexandre Bazin


Maxime Benrubi

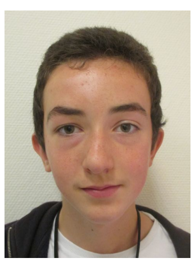

Kenzo Boudier


Vincent Braun


Justin Cahuzac


Alexeï Carmoy


Adrien Chamussy

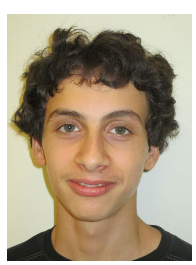

Tristan Desplanches


Georges Duthil


Pierre-Marie Esmenjaud


Thomas Fusellier

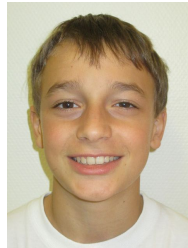

Linda Gutsche


Yakob Kahane


Tom Kalis

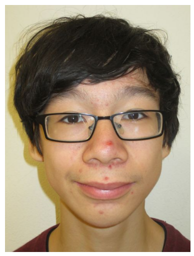

Rémi Lesbats


Joséphine Mattatia

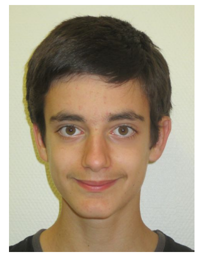

Timoté Moreaux


Hugo Olivier

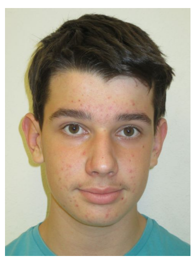

Imène Ouzineb

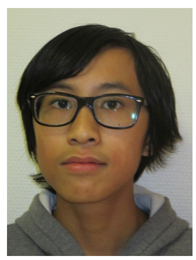

Hugo Panchaud

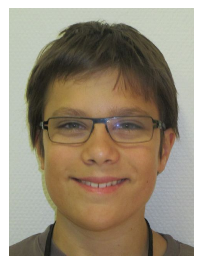

Alexandre Polo

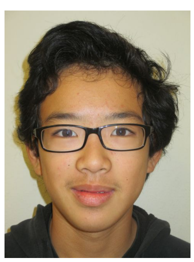

Romain Poyet


Pierre Puzo


Juraj Rosinsky


Long Van Tran Ha


Julien Véron


Léo Wang


Emilie Ying

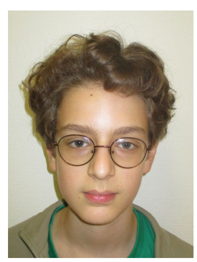

Ilan Zysman

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour ce sixième stage olympique junior, nous avons dû, pour des raisons financières, nous limiter à une trentaine de stagiaires, et nous avons, pour ce faire, imposé une condition supplémentaire : non seulement il fallait être en collège ou en seconde, mais il fallait être né en 2000 ou après, donc susceptible d'être candidat aux Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques 2015. Nous avons admis 31 élèves, 8 de seconde (ayant un an d'avance), 14 de troisième, 4 de quatrième et 2 de cinquième (âge moyen 13,8 ans), venus de 13 départements, dont 75 Paris (7 élèves), 78 Versailles (6 élèves) et 38 Grenoble (5 élèves). Il y avait 13% de filles. Nous avons refusé 3 candidatures dont 1 fille.

Le premier jour, les élèves sont arrivés entre 9 h et 12 h. Six d'entre eux ont été accueillis Gare de Lyon par Félix Lequen. Après les formalités d'accueil par François Lo Jacomo, tout le monde était présent pour l'inauguration du stage à 12 h. Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial pour aider à répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe. Ce test était plus facile que l'an passé, mais testait si les élèves connaissaient déjà certaines notions olympiques (théorème de l'angle inscrit, principe des tiroirs notamment). Nous avons pris en compte également, pour la constitution des groupes de niveaux, ce que nous savions du cursus olympique des stagiaires. Le test initial a été corrigé après le dîner, à 20 h 30.

Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h 30. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer, mais à 23 h, extinction des feux. Nous étions regroupés dans l'aile des filles, qui avait précisément le nombre de lits dont nous avions besoin, les filles ayant leur chambre avec leurs douches, et les garçons le reste du couloir. La répartition dans les chambres était déterminée essentiellement par la classe et l'âge, les élèves n'étaient pas autorisés à changer de chambre.

Le premier soir, c'est Félix Lequen qui a donné le corrigé du test initial. François Lo Jacomo a présenté, le mardi soir, Animath et les Olympiades de Mathématiques. Puis, le mercredi soir, un exposé sur les nombres irrationnels. Comme le stage commençait par un test, nous n'avons organisé qu'un second test le vendredi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois journées de cours : géométrie le mardi et mercredi matin, et combinatoire le mercredi après-midi et jeudi. Les énoncés n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Vendredi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié, mais aussi expliquer aux stagiaires comment ils pourront poursuivre cette préparation olympique, qui ne se limite pas aux deux stages organisés par Animath. La fin du stage était prévue vers 16 h.

		Débutants	Avancés
Lundi	10h-12h	Arrivée et installation	
	12h-12h20	Présentation du stage	
	14h-16h	Test initial	
	20h30	Correction du test initial	
Mardi	Matin	Géométrie (François Lo Jacomo)	Géométrie (Jean-François Martin)
	Après-midi	Géométrie (Guillaume Conchon-Kerjan)	Géométrie (Thomas Budzinski)
	20h30	**Animath et les Olympiades Internationales (François Lo Jacomo)**	
Mercredi	Matin	Géométrie (Jean-Louis Tu)	Géométrie (Vincent Jugé)
	Après-midi	Combinatoire (François Lo Jacomo)	Combinatoire (Jean-Louis Tu)
	20h30	**Conférence sur les irrationnels (François Lo Jacomo)**	
Jeudi	Matin	Combinatoire (Félix Lequen)	Combinatoire (Margaret Bilu)
	Après-midi	Combinatoire (Thomas Budzinski)	Combinatoire (Pierre Bornsztein)
Vendredi	9h-12h	Test final	
	14h30	Correction du test final - clôture du stage	

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :
— Le site d'Animath : `www.animath.fr`
— Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Exercices d'échauffement

1 Enoncés

Exercice 1

Un triangle a pour longueurs des côtés : 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle).

Exercice 2

Soit $ABCD$ un trapèze, où (AB) et (CD) sont parallèles. On note Δ la droite passant par les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que les droites Δ, (AD) et (BC) sont concourantes ou parallèles.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un rectangle, E et F les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$. On appelle G l'intersection des droites (AF) et (EC). Montrer que les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FBE}$ sont égaux.

Exercice 4

Soit cinq nombres $a < b < c < d < e$.

a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?

b) Ces dix sommes sont $21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79$. Trouver a, b, c, d, e.

Exercice 5

Soit a, b, c, d des nombres positifs tels que $a + b + c + d = 4$. Montrer que $ab + bc + cd + da \leq 4$

Exercice 6

a) Résoudre l'équation :

$$x + \sqrt{(x+1)(x+2)} = 3$$

b) Résoudre l'équation :

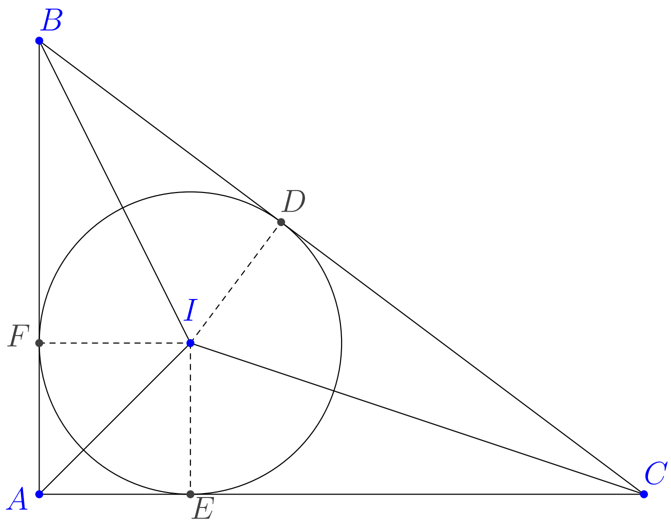
$$x + \sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 3$$

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point du segment $[AD]$ distinct de A, N le milieu de $[AM]$. Les droites (BM) et (CN) se coupent en P. Montrer que la droite (AP) passe par le milieu de $[CD]$.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

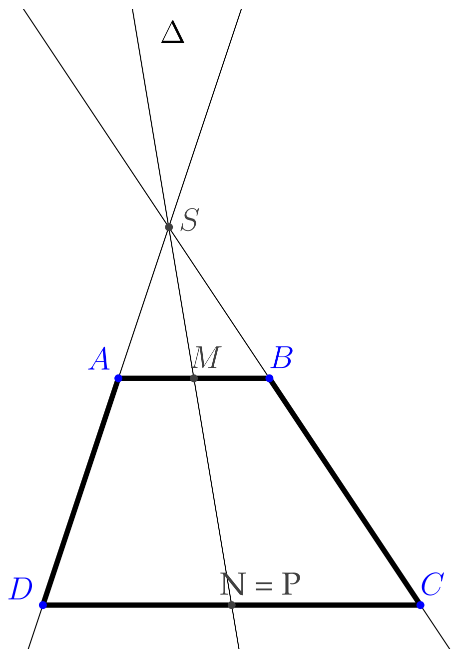


Appelons A, B, C les sommets du triangle, $a = BC, b = CA, c = AB$ les longueurs des trois côtés, I et r le centre et le rayon du cercle inscrit. Les hauteurs issues de I des triangles IAB, IBC et ICA sont toutes trois égales à r, de sorte que les aires de ces trois triangles sont : aire(IAB) = $\frac{rc}{2}$, aire(IBC) = $\frac{ra}{2}$, aire(ICA) = $\frac{rb}{2}$, d'où l'on déduit : aire(ABC) = $\frac{r(a+b+c)}{2}$. Or le triangle de côtés $3, 4, 5$ est rectangle, son aire vaut : $\frac{3\times 4}{2} = 6 = \frac{r(3+4+5)}{2}$. Il en résulte que $r = 1$.

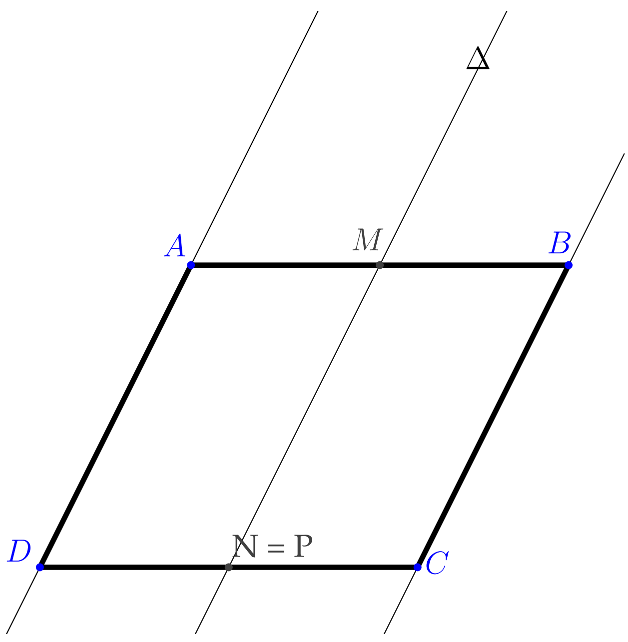
Le triangle donné, de côtés $3, 4, 5$, étant rectangle, on peut aussi raisonner comme suit. Appelons D, E, F les projections de I sur les côtés BC, CA, AB. Ce sont donc les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle. Si A est le sommet de l'angle droit, $AEIF$ est un carré, et $r = IE = IF = AE = AF$. Or AE et AF sont faciles à calculer : si l'on pose $u = AE = AF$, $v = BF = BD$, $w = CD = CE$, $u + v = c, v + w = a, w + u = b$, donc en additionnant : $2(u + v + w) = a + b + c$ soit finalement $u = \frac{-a+b+c}{2}$, $v = \frac{a-b+c}{2}$, $w = \frac{a+b-c}{2}$. On en déduit : $r = u = \frac{-5+4+3}{2} = 1$.

Les deux méthodes sont très différentes, mais les résultats sont bien identiques. En effet, $\frac{r(a+b+c)}{2} = \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{-a^2+(b+c)^2}{4} = \frac{bc}{2} =$ aire(ABC) car le carré de l'hypoténuse $a^2 = b^2 + c^2$.

Solution de l'exercice 2

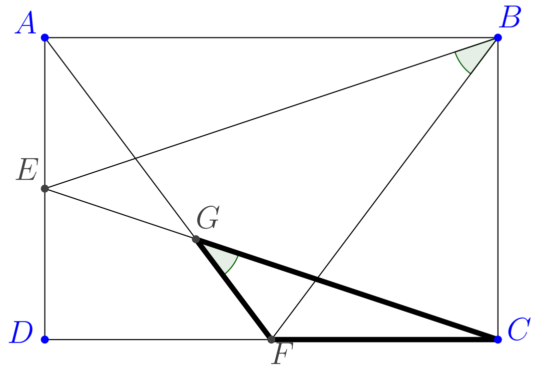


Appelons M et N les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Supposons dans un premier temps que (AD) et (BC) se coupent en un point S, et considérons la droite (SM), qui coupe (CD) en P. En utilisant le théorème de Thalès et le fait que $MA = MB$, on a : $\frac{PD}{PS} = \frac{MA}{MS} = \frac{MB}{MS} = \frac{PC}{PS}$, ce qui entraîne : $PC = PD$. P est donc le milieu N de $[CD]$, et la droite (SM) n'est autre que Δ : Δ, (AD) et (BC) sont bien concourantes en S.



Supposons maintenant que (AD) et (BC) sont parallèles, et traçons la parallèle à (AD) et (BC), qui passe par M. Soit P l'intersection de cette parallèle avec (CD). $DPMA$ et $CPMB$ sont des parallélogrammes, donc $DP = MA = MB = CP$. Une fois de plus, P est le milieu de $[CD]$, donc (MP), parallèle à (AD) et (BC), n'est autre que $(MN) = \Delta$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Dans le triangle FCG, les angles à la base $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FCG}$ ont pour somme le supplémentaire $\widehat{AFD}$ du troisième angle. Or $\widehat{FCG} = \widehat{DCE} = \widehat{ABE}$ par symétrie, et $\widehat{AFD} = \widehat{BFC}$ (par symétrie), ce qui est égal à $\widehat{ABF}$ (angles alternes internes). Comme $\widehat{ABE} + \widehat{FBE} = \widehat{ABF}$, $\widehat{FBE} = \widehat{CGF}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

a) On peut former dix sommes distinctes : $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e$.

b) Les deux plus petites sommes sont nécessairement : $a+b = 21$ et $a+c = 26$, et les deux plus grandes, obligatoirement $d+e = 79$ et $c+e = 65$. Par ailleurs, la somme de ces dix sommes vaut : $4(a+b+c+d+e) = 480$, donc $a+b+c+d+e = 120$. D'où $c = (a+b+c+d+e) - (a+b) - (d+e) = 20$, et $a = 6$, $b = 15$, $e = 45$ et $d = 34$. Si l'on calcule les dix sommes deux à deux des cinq nombres $6, 15, 20, 34$ et 45, on trouve bien les dix nombres donnés.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

$ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$. En posant $u = a+c$ et $v = b+d$, on est ramené à prouver que si $u+v = 4$, alors $uv \leq 4$. Or $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$. Si $u+v = 4$, $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 4$ ce qui achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

a) Il suffit d'isoler la racine carrée et d'élever au carré :

$\sqrt{(x+1)(x+2)} = 3-x$ implique $x^2+3x+2 = 9-6x+x^2$, soit $9x = 7$, $x = \frac{7}{9}$. On vérifie bien que cette solution convient dans l'équation initiale : pour $x = \frac{7}{9}$, $\sqrt{(x+1)(x+2)} = \frac{20}{9}$ et $\frac{7+20}{9} = 3$.

b) Pour cette seconde équation, plus difficile, il y avait au moins trois solutions distinctes.

La première consiste à isoler dans un membre deux des racines carrées :

$\sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} = 3 - x - \sqrt{(x+1)(x-1)}$ de sorte qu'en élevant au carré, on n'ait plus qu'une racine carrée de chaque côté : $(x-1)x + x(x+1) + 2x\sqrt{(x+1)(x-1)} = (9-6x+x^2) + (x+1)(x-1) - 2(3-x)\sqrt{(x+1)(x-1)}$. Or c'est précisément le même $\sqrt{(x+1)(x-1)}$ à gauche et à droite, on peut donc regrouper ces deux racines dans le membre de gauche et tout le reste dans le membre de droite : $6\sqrt{(x+1)(x-1)} = 8 - 6x$. On simplifie par 2 et on élève au carré : $9(x^2-1) = 16 - 24x + 9x^2$, soit $24x = 25$: $x = \frac{25}{24}$. On vérifie que cette solution satisfait bien l'équation initiale : pour $x = \frac{25}{24}$, $\sqrt{(x-1)x} = \frac{5}{24}$, $\sqrt{x(x+1)} = \frac{35}{24}$ et $\sqrt{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{24}$, on a bien : $\frac{25+5+35+7}{24} = 3$. On notera qu'on a le choix de celle des trois racines carrées qu'on fait passer à droite : chacune des trois variantes aboutit à la même équation en définitive.

La seconde solution laisse trois termes dans le membre de gauche :

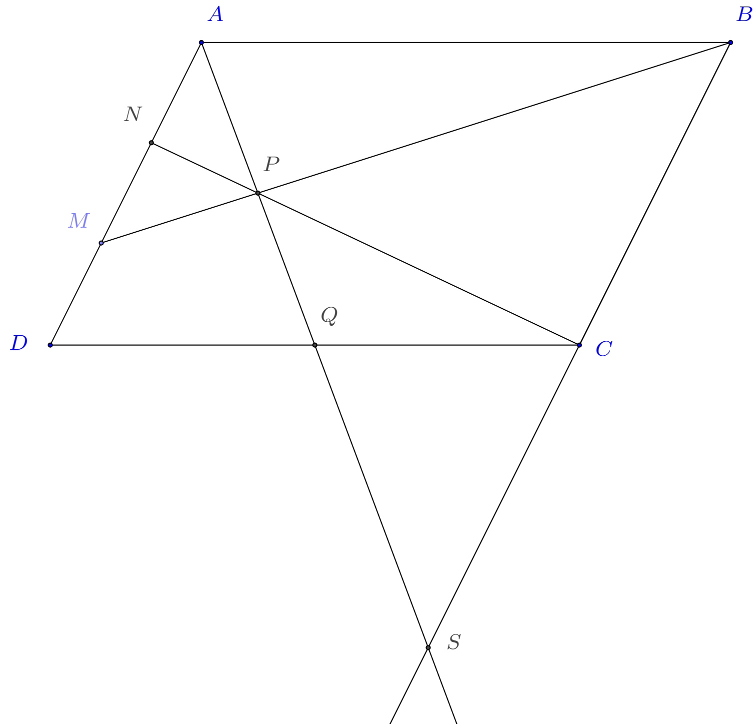
$x + \sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} = 3 - \sqrt{(x+1)(x-1)}$. Certes, en élevant au carré, on aura trois racines dans le membre de gauche, du fait des doubles produits : $x^2 + (x-1)x + x(x+1) + 2x\left(\sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{(x+1)(x-1)}\right) = 9 + (x+1)(x-1) - 6\sqrt{(x-1)(x+1)}$, mais on y reconnaît les trois racines dont la somme, d'après l'équation initiale, est égale à $3-x$, si bien que l'équation implique : $3x^2 + 2x(3-x) = 8 + x^2 - 6\sqrt{(x-1)(x+1)}$, ce qui se ramène à l'équation de la première méthode.

La troisième méthode consiste à factoriser le membre de gauche :

$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = 3$. Or $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) = 1$ et $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = -1$. D'où : $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right) = 3\left(-\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ et $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$. On élimine $\sqrt{x+1}$ entre ces deux équations : $3\sqrt{x+1} = 4\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3\left(2\sqrt{x} - 3\sqrt{x-1}\right)$, d'où $\sqrt{x} = 5\sqrt{x-1}$, $x = 25(x-1)$ soit $x = \frac{25}{24}$.

Solution de l'exercice 7

Appelons Q l'intersection de (AP) et (CD), et S l'intersection de (AP) et (BC). D'après le théorème de Thalès, $\frac{NP}{CP} = \frac{MN}{BC}$. Mais le même théorème de Thalès entraine : $\frac{NP}{CP} = \frac{AM}{SC}$. Comme par hypothèse $AM = MN$, on a : $SC = BC$. Dans le triangle SAB, CQ est la parallèle à la base passant par le milieu d'un côté, donc la droite des milieux des côtés SA et SB. Dès lors, $SQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ car $AB = CD$, ce qui achève la démonstration.

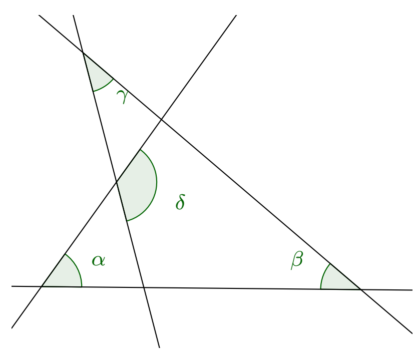

A
B
N
P
M
Q
D
C
S

III. Lundi : Test initial

1 Enoncé

Exercice 1

Dans la configuration montrée par la figure, si $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 35°$, alors combien vaut δ ?



Exercice 2

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle. La médiatrice de $[AB]$ coupe (AC) en P et $[AD]$ en Q. On suppose que Q est entre A et D. Montrer que les angles $\widehat{DBP}$ et $\widehat{CBQ}$ sont égaux.

Exercice 3

Un groupe d'élèves est constitué de 5 garçons et 4 filles. On veut constituer une équipe de trois élèves choisis parmi les élèves de ce groupe.

a) Quel est le nombre possible d'équipes ?

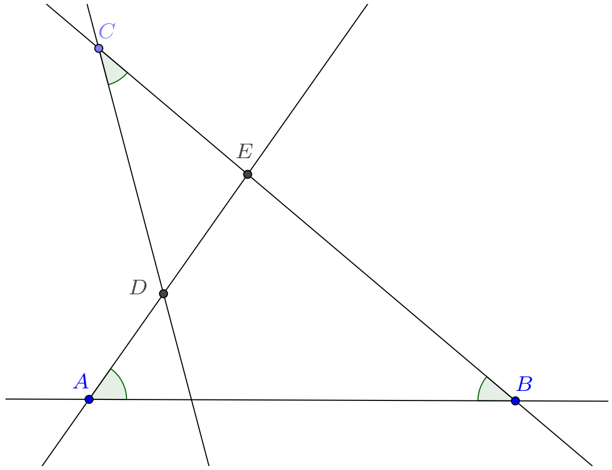
b) Est-il vrai que moins de 5% des équipes possibles sont constituées uniquement de filles ?

Exercice 4

On choisit cinq nombres distincts, de 1 à 10. Montrer qu'il existe un nombre entier non nul qui peut s'écrire de deux manières différentes comme différence de deux de ces cinq nombres.

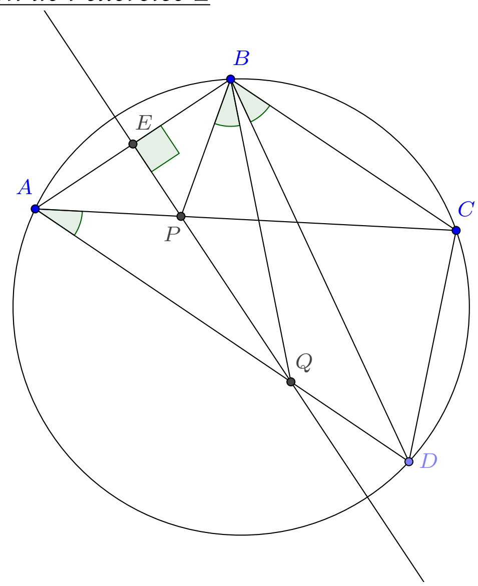
2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>



Nommons les points comme ci-dessus et travaillons dans les deux triangles EAB et CED. Dans le triangle EAB, la somme des angles étant égale à $180°$, $\widehat{AEB} = 180° - \alpha - \beta = 85°$. Donc $\widehat{DEC} = 180° - \widehat{AEB} = 95°$. Dans le triangle CED, $\widehat{CDE} = 180° - \gamma - 95° = 50°$. Donc l'angle cherché $\delta = 180° - \widehat{CDE} = 130°$.

Solution de l'exercice 2



Cet exercice nécessitait de connaître le théorème de l'angle inscrit, dont il était une application immédiate. En effet, $\widehat{DBP} = \widehat{DBQ} + \widehat{QBP}$, or P et Q sont sur la médiatrice de $[AB]$, donc par symétrie $\widehat{QBP} = \widehat{QAP} = \widehat{CAD}$. Et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$, qui interceptent le même arc, sont égaux. Donc en définitive : $\widehat{DBP} = \widehat{DBQ} + \widehat{CBD} = \widehat{CBQ}$.

Solution de l'exercice 3

Cet exercice testait la connaissance des bases du dénombrement. Choisir 3 élèves parmi 9, c'est d'abord choisir le premier (9 possibilités), puis le second (8 possibilités) puis le troisième (7 possibilités), mais ce faisant, chaque équipe est comptée six fois, car il existe six manières d'ordonner les trois membres de l'équipe : $ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA$. Donc le nombre d'équipes distinctes que l'on puisse constituer, sans ordonner les membres de l'équipe, est : $\frac{9\times8\times7}{6} = 84$.

Le nombre d'équipes constituées uniquement de filles peut se calculer de la même manière, mais on peut aussi remarquer que choisir 3 filles parmi 4, cela revient à choisir la quatrième, qui ne fait pas partie de l'équipe, donc cela offre quatre possibilités. Comme 5% de 84 est strictement supérieur à 4, oui, il est vrai que moins de 5% des équipes possibles sont constituées uniquement de filles.

Solution de l'exercice 4

Deux solutions possibles : l'une utilise le principe des tiroirs, et teste donc la connaissance de ce principe. En effet, combien existe-t-il de paires de deux nombres parmi 5 ? 10. Si ces nombres sont $\{a, b, c, d, e\}$, ce sont : $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$. Il existe donc dix différences possibles. Or ces différences sont comprises entre 1 et 9. Et si je choisis dix nombres parmi 9, deux au moins seront égaux. Un même nombre, entre 1 et 9, s'écrit de deux manières différentes comme différence de deux de ces cinq nombres.

Mais on pouvait aussi s'en sortir sans utiliser le principe des tiroirs, en classant les cinq nombres par ordre décroissant : $a > b > c > d > e$. $(a - b) + (b - c) + (c - d) + (d - e) = a - e \leq 9$. Or $a - b, b - c, c - d, d - e$ sont tous quatre strictement positifs : s'ils sont tous distincts, leur somme vaut au minimum $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ce qui n'est pas possible. Donc parmi ces quatre nombres, il y en a au moins deux qui sont égaux.

IV. Débutants

1 Mardi et mercredi matin : Géométrie

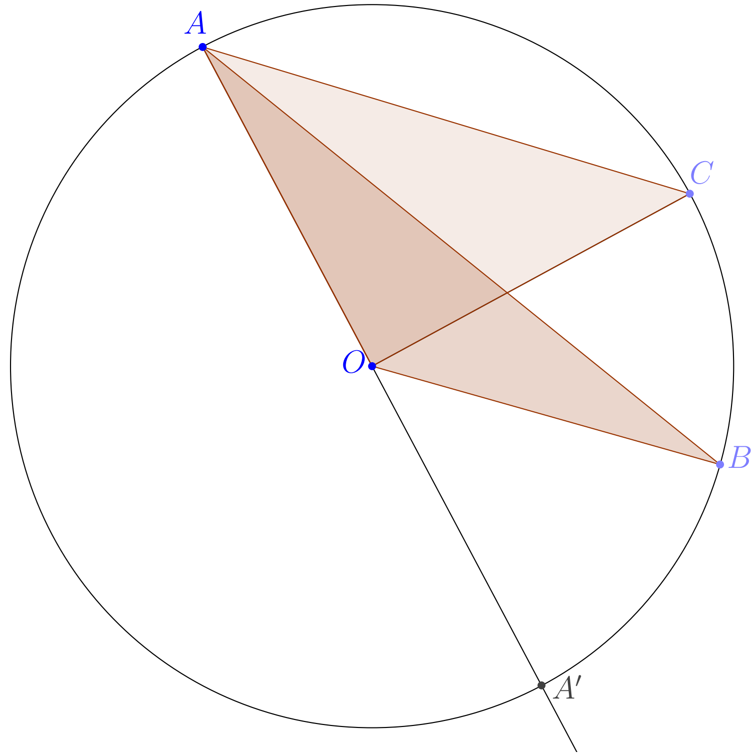
1 mardi matin : François Lo Jacomo

Nous commencerons par le théorème de l'angle inscrit, essentiel pour une multitude d'exercices, avant de dire quelques mots de l'orthocentre du triangle.

Angles inscrits

Si B et C sont deux points fixes d'un cercle, et qu'on fait varier un troisième point A sur ce même cercle, l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ ne dépend pas de la position du point A.

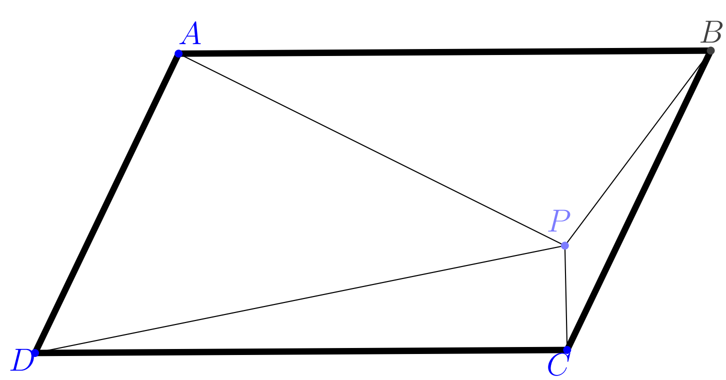
Il existe plusieurs manières d'énoncer ce théorème : si quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux si A et D sont du même côté de la droite (BC), supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de (BC). Réciproquement, quatre points quelconques du plan, A, B, C, D vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ si A et D du même côté de (BC) ou $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) sont "cocycliques", c'est-à-dire sur un même cercle. La démonstration doit envisager tous les cas de figure, mais l'idée essentielle est que si A et B sont sur un cercle de centre O, le triangle AOB est isocèle. Si la droite (AO) recoupe le cercle en A', comme la somme des trois angles du triangle AOB est égale à $180°$, $\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 2.\widehat{BAO}$, d'où l'on déduit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$, qui ne dépend pas de A, est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.



Si l'on veut un théorème qui ne dépende pas des cas de figures, il faut introduire les angles de droites : l'angle (AB, AC) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AB) pour la faire coïncider avec (AC). Donc $(AB, AC) = -(AC, AB)$ et plus généralement : $(AB, AC) + (AC, AD) = (AB, AD)$ (relation de Chasles) quels que soient les points A, B, C et D. En utilisant ces angles de droites, le théorème de l'angle inscrit s'écrit : quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

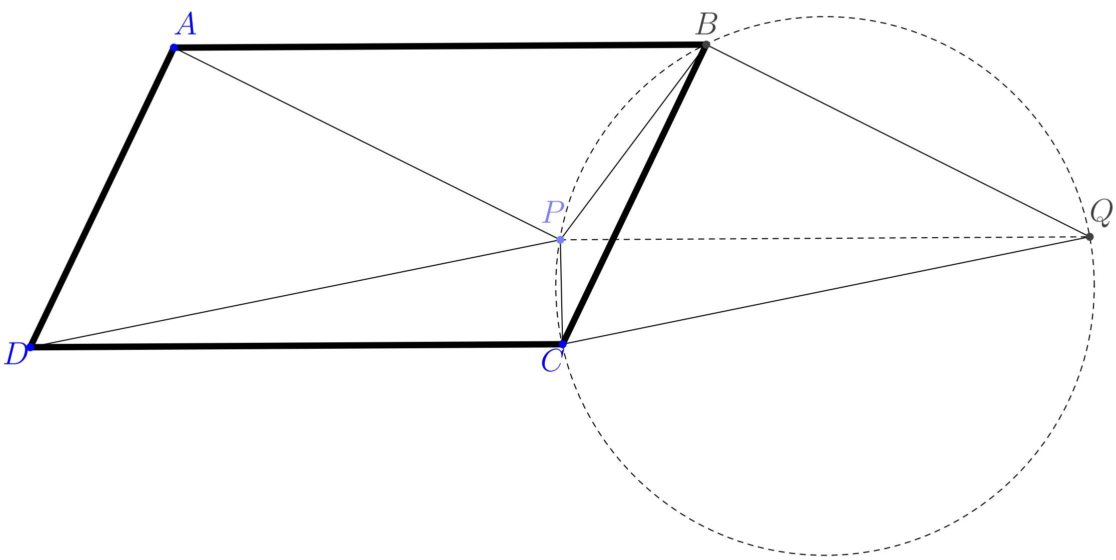
Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P un point intérieur au parallélogramme vérifiant : $\widehat{APD} + \widehat{CPB} = 180°$. Montrer que $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$.



Solution de l'exercice 1

Nous avons deux angles supplémentaires, ce qui fait penser au théorème de l'angle inscrit si ce n'est qu'ils ne sont pas bien positionnés : il faudrait qu'ils soient tous deux de même base BC et de part et d'autre de (BC). Translatons le triangle APD vers la droite de la figure, c'est-à-dire introduisons un point Q tel que AB, PQ, DC soient tous trois parallèles et de même longueur. Les triangles APD et BQC sont isométriques, leurs côtés et leurs angles sont égaux. En particulier, l'angle $\widehat{BQC}$ égal à $\widehat{APD}$ est supplémentaire de $\widehat{CPB}$. Là nous avons deux angles supplémentaires et positionnés de sorte que l'on peut affirmer : les quatre points B, Q, C, P sont cocycliques. Mais comme ces points sont cocycliques, d'autres angles inscrits apparaissent, notamment : $\widehat{QCB} = \widehat{QPB}$. Or $\widehat{QCB} = \widehat{PDA}$ car les triangles QCB et CDA sont isométriques, et $\widehat{QPB} = \widehat{PBA}$ car ils sont alternes - internes, ce qui achève la démonstration.



Exercice 2

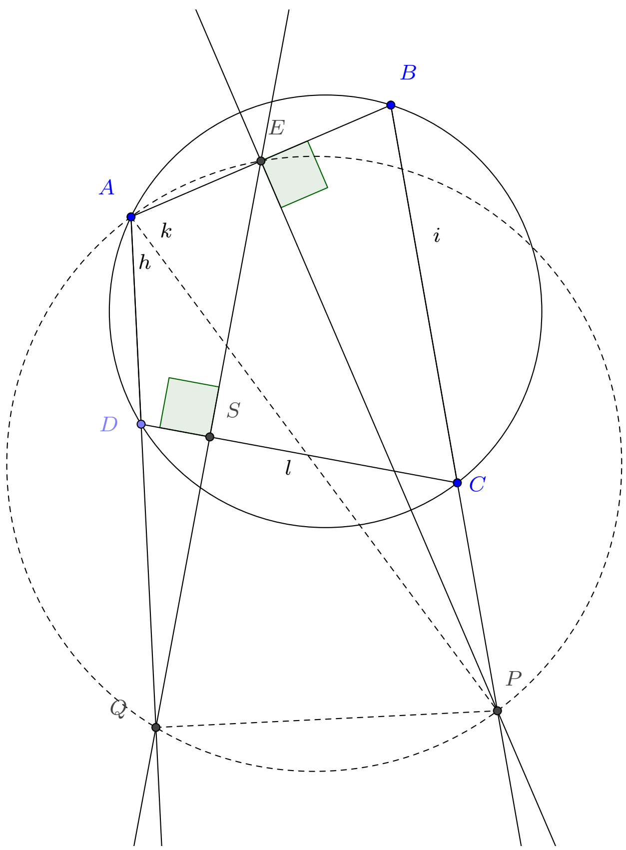
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible. On supposera que l'angle $\widehat{ABC}$ est aigu. Soit E le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (AB) passant par E coupe (BC) en P. La perpendiculaire à (CD) passant par E coupe (AD) en Q. Montrer que (PQ) est perpendiculaire à (AD).

Solution de l'exercice 2

Exercice typique où grâce à des égalités d'angles on trouve des points cocycliques, et ces points cocycliques nous fournissent de nouvelles égalités d'angles... dont celle cherchée !

Posons $\alpha = \widehat{BPE}$. Comme $\widehat{PEB}$ est droit, $\widehat{EBP} = 90^\circ - \alpha$. Or $\widehat{EBP} = \widehat{ABC}$ est supplémentaire de $\widehat{CDA}$ d'après le théorème de l'angle inscrit, donc $\widehat{CDA} = 90^\circ + \alpha$, et si l'on nomme S l'intersection de (CD) et (AQ), $\widehat{SDQ} = 90^\circ - \alpha$. Comme par hypothèse $\widehat{QSD} = 90^\circ$, $\widehat{DQS} = \widehat{AQE} = \alpha$. Pour avoir des points cocycliques, il faudrait par exemple que $\widehat{APE} = \alpha$, mais c'est le cas, car P est sur la médiatrice de

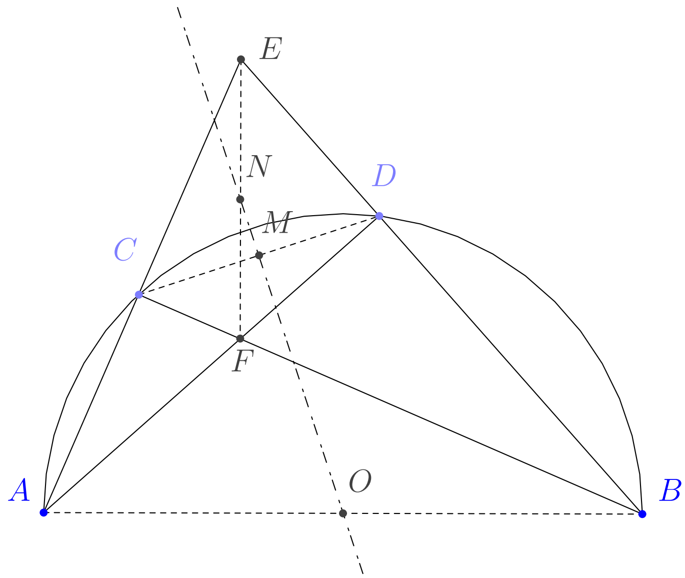
$[AB]$, donc le triangle APB est isocèle, et (AE) est la bissectrice de $\widehat{APB}$. Dès lors, $\widehat{APE} = \widehat{BPE} = \alpha$, les quatre points A, E, P, Q sont cocycliques, donc les deux angles $\widehat{AEP}$ et $\widehat{AQP}$ sont supplémentaires ; Comme $\widehat{AEP}$ est droit par hypothèse, $\widehat{AQP}$ est lui aussi droit, ce qui signifie que (PQ) est orthogonal à (AD).



Un cas particulier important du théorème de l'angle inscrit est le cas de l'angle droit : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si A est situé sur le cercle de diamètre $[BC]$ (donc l'angle au centre est plat). En voici une illustration typique :

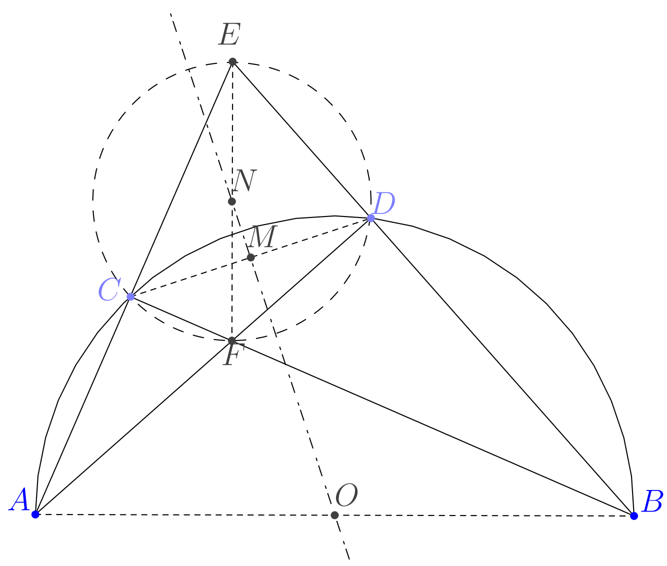
Exercice 3

Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en F, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.



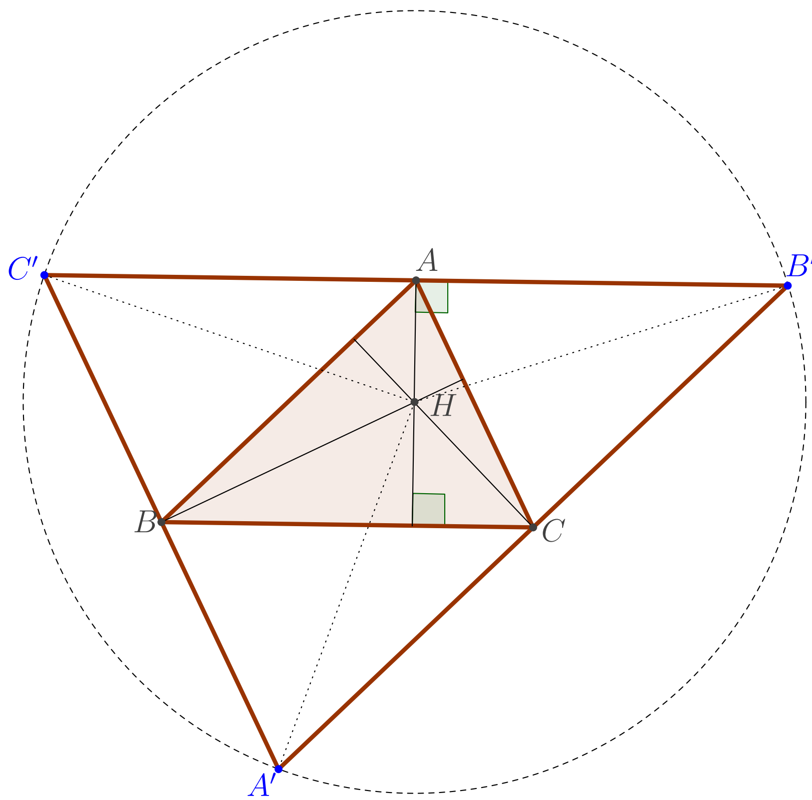
Solution de l'exercice 3

L'hypothèse "C et D sur le cercle de diamètre $[AB]$" se traduit par : $\widehat{ACB} = 90°$ et $\widehat{ADB} = 90°$. Mais cela entraine manifestement : $\widehat{FCE} = 90°$ et $\widehat{FDE} = 90°$, donc (C) et (D) sont également sur le cercle de diamètre $[EF]$. Le milieu N de $[EF]$ est le centre de ce cercle, donc $NC = ND$, ce qui entraine que N est sur la médiatrice de $[CD]$. Or, pour la même raison, le milieu O de $[AB]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$. Et par définition, cette même médiatrice passe par le milieu M de $[CD]$.



Hauteurs et orthocentre

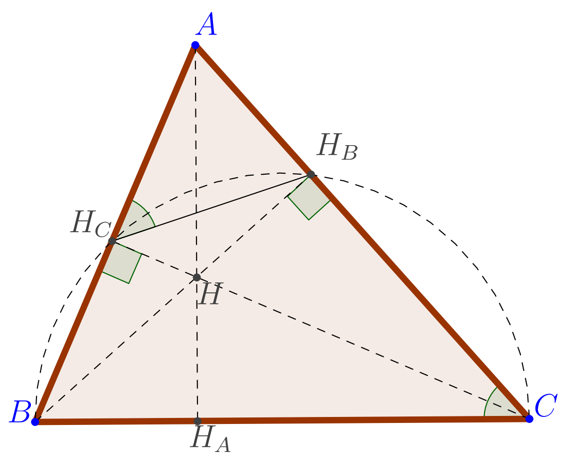
Les hauteurs d'un triangle ABC se coupent en un point nommé orthocentre du triangle, et traditionnellement noté H. En effet, menons par A la parallèle à (BC), par B la parallèle à (CA) et par C la parallèle à (AB) : on voit apparaître trois parallélogrammes $ABCB'$, $ABA'C$ et $AC'BC$, donc la hauteur issue de A est médiatrice de $[B'C']$, lieu des points équidistants de B' et C', celle issue de B est médiatrice de $[C'A']$, celle issue de C, médiatrice de $[A'B']$, et les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois sommets (centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$).



Exercice 4

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On supposera pour simplifier que H est à l'intérieur du triangle ABC, ce qui revient à dire que tous les angles du triangle sont aigus (un tel triangle est dit acutangle). Déterminer les angles des triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC et $H_AH_BH_C$, en fonction des angles du triangle ABC, que l'on notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

Remarque : on utilise beaucoup de points en géométrie du triangle, et si l'on veut éviter d'utiliser le même nom pour trop de points différents, il arrive qu'on soit à court de notations. Les notations H_A, H_B et H_C ne sont pas courantes, mais elles peuvent rendre des services dans bien des cas.

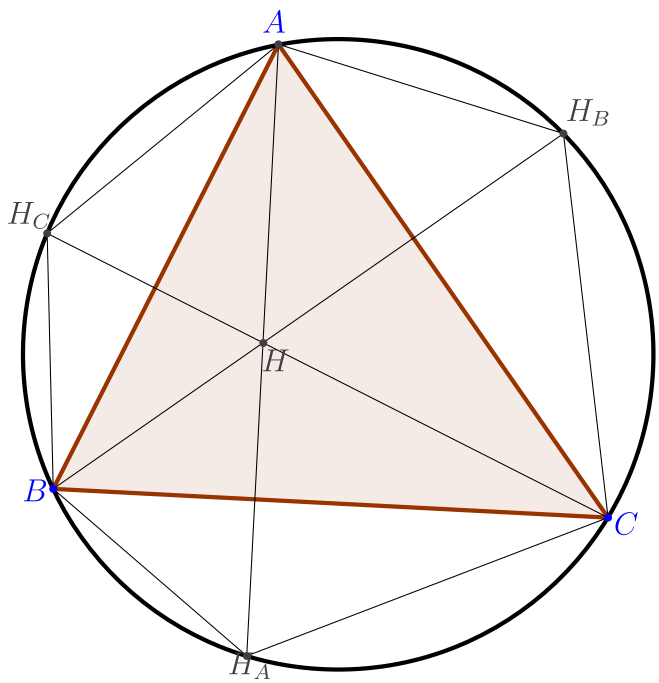


Solution de l'exercice 4

Etant donnés les angles droits $\widehat{BH_BC}$ et $\widehat{BH_CC}$, H_B et H_C sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, d'où les angles inscrits $\widehat{BH_CH_B}$ et $\widehat{BCH_B}$ sont supplémentaires, puisque C et H_C sont de part et d'autre de (BH_B), d'où $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{C}$. De même, $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{B}$, puis $\widehat{BH_CH_A} = \widehat{C}$, $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{A} = \widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{CH_BH_A} = \widehat{B}$. Donc d'une part $\widehat{H_AH_BH_C} = 180° - 2\widehat{B}$, $\widehat{H_BH_CH_A} = 180° - 2\widehat{C}$, $\widehat{H_CH_AH_B} = 180° - 2\widehat{A}$, d'autre part les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$, et l'orthocentre de ABC est centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CA) du triangle sont sur le cercle circonscrit à ABC.



Solution de l'exercice 5

Il suffit d'étudier les angles de la figure : en appelant, cette fois, H_A, H_B et H_C les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle, H'_A, H'_B et H'_C les pieds des hauteurs, milieux de HH_A, HH_B et HH_C : dans le triangle rectangle BH'_BC, $\widehat{H'_BBC} = 90° - \widehat{C}$. De même, $\widehat{H'_CCB} = 90° - \widehat{B}$. Donc le troisième angle du triangle BHC : $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{A}$. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BHC}$ sont supplémentaires, mais H et A ne sont pas de part et d'autre de (BC), donc A, B, C et H ne sont pas cocycliques. En revanche, si H_A est le symétrique de H par rapport à (BC), les triangles BHC et BH_AC ont les mêmes angles, donc $\widehat{BH_AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont encore supplémentaires, mais cette fois-ci A et H_A sont situés de part et d'autre de (BC), donc les quatre points A, H_A, B et C sont cocycliques. De même pour H_B et H_C.

2 mardi après-midi : Guillaume Conchon-Kerjan

Vecteurs et Rotations

Cours

Pour approfondir ce résumé, on pourra lire le cours de géométrie de Pierre Dehornoy :
http ://boumbo.toonywood.org/xavier/old/maths/stmalo/geometrie-cours.pdf

Vecteurs

Définition 1. Un vecteur est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

Définition 2. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{v}$ associe à tout point A un point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

Proposition 3. Les translations conservent les aires, les longueurs, les angles, les cercles, les droites (une translation envoyant une droite sur une droite parallèle).

Proposition 4. • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.
• Il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(AB)//(CD)$. On dit alors que ces deux vecteurs sont colinéaires. En particulier, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ si et seulement si A, B, C sont alignés.

Proposition 5. (Relation de Chasles)
Pour tous points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Proposition 6. C est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ceci équivaut encore à : pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

La démonstration de la dernière affirmation se fait avec la relation de Chasles.

Rotations

Définition 7. Soit O un point du plan et θ un angle. La rotation de centre O et d'angle θ est la transformation qui à tout point M du plan associe un point M' tel que $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \theta$. Lorsqu'on ne le précise pas le sens de rotation, il s'agit du sens direct, à savoir contraire aux aiguilles d'une montre.

Proposition 8. Les rotations conservent les longueurs, les cercles, les alignements, les angles, les droites... une droite étant envoyée sur une droite avec laquelle elle fait un angle valant θ.

Proposition 9. • Si l'angle entre les droites (d_1) et (d_2) vaut θ, la composée de la symétrie d'axe (d_2) par la symétrie d'axe (d_1) (on fait d'abord la première symétrie, puis la deuxième) donne une rotation d'angle 2θ.
• La composée de deux rotations d'angle θ et θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, sauf lorsque $\theta + \theta' = 360^o$: on a alors affaire à une translation.

Le second point se montre en utilisant le premier, en décomposant chacune des deux rotations en deux symétries.

Proposition 10. Si $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments de même longueur et non parallèles, il existe une unique rotation envoyant $[AB]$ sur $[A'B']$ en envoyant A sur A' et B sur B'.

Exercices

Exercice 1
Montrer que G est le centre de gravité de ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 2
On considère une rivière droite de largeur L et deux points A et B situés de part et d'autre de celle-ci. Comment construire un pont perpendiculaire à celle-ci pour minimiser le trajet entre A et B ?

Exercice 3
On considère trois droites $(d_1), (d_2), (d_3)$, construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chaque droite (mais pas sur leurs intersections).

Exercice 4
Soit ABC un triangle, on construit E et F vers l'extérieur tels que ABE et ACF soient équilatéraux. On construit D vers l'intérieur tel que $\widehat{BDC} = 120^o$ et BDC isocèle. Montrer que $DE = DF$.

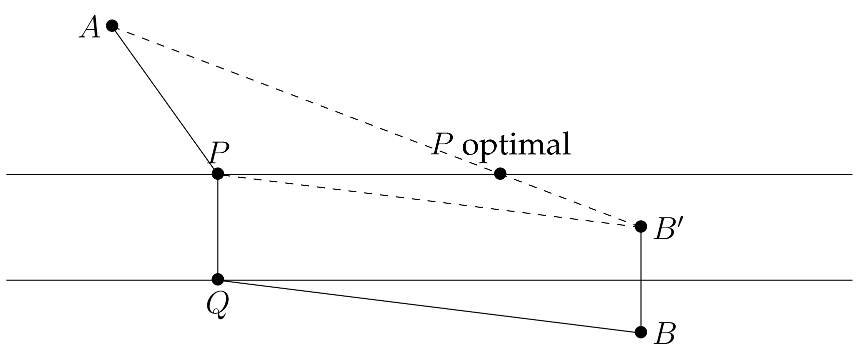
Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
En utilisant la relation de Chasles, l'énoncé est équivalent à $3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, soit :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Il existe donc un et un unique point G vérifiant cela, A, B, C étant donnés.
De plus, si A' est le milieu de $[BC]$, on sait que $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, donc $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, donc A, G, A' sont alignés et G est sur (AA'). De même, G est sur (BB') et (CC'), donc G est bien le centre de gravité de ABC.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

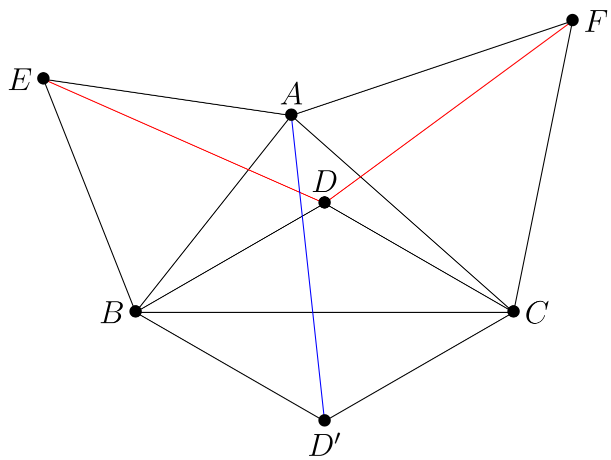


Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur perpendiculaire à la rivière dirigé vers A et de longueur L. On note B' l'image de la translation de B selon $\overrightarrow{v}$. Si le pont relie P et Q, alors le trajet a pour longueur $AP + PQ + QB = AP + L + PB'$, donc on veut minimiser

$AP + PB'$, c'est-à-dire placer P à l'intersection de $[AB']$ et du rivage du cÃ´té de A.

Solution de l'exercice 3
On prend un point A_1 sur (d_1). On voudrait un point A_2 sur (d_2) tel qu'une rotation de centre A_1 et d'angle 60^o (peu importe le sens) l'envoie sur un point de (d_3), appelons-le A_3. On aurait $A_1A_2 = A_1A_3$ donc $A_1A_2A_3$ serait isocèle en A_1 avec un angle au sommet de 60^o. Donc les deux autres angles mesureraient également 60^o, donnant bien un triangle équilatéral.
Pour ça on regarde l'image de (d_2) par la rotation de centre A_1 et d'angle 60^o dans le sens indirect (celui des aiguilles d'une montre), appelons-la (d_2'). C'est une droite. Si elle intersecte (d_3), le point d'intersection est A_3, et le point de (d_2) envoyé sur A_3 par la rotation est donc A_2. Si il n'y a pas d'intersection, (d_3) est parallèle à (d_2') considère la rotation de centre A de même angle mais dans le sens direct (inverse aux aiguilles d'une montre), qui intersecte cette fois-ci (d_3), puisqu'elle fait un angle de 120^o avec (d_2'). On peut donc construire A_2 et A_3 de la manière décrite au-dessus.

Solution de l'exercice 4



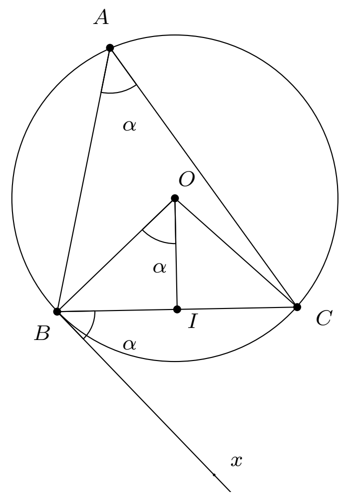
On considère la rotation de centre B et d'angle "-60^o" (c'est-à-dire 60^o dans le sens indirect). Elle envoie E sur A. Et, $\widehat{CBD} = \widehat{DCB} = 30^o$ dans DCB isocèle en D. Donc D est envoyé sur D' tel que $\widehat{D'BD} = 60^o$, soit $\widehat{D'BC} = \widehat{CBD} = 30^o$, et $BD = BD'$: ainsi D' est le symétrique de D par rapport à (BC). Donc ED est envoyé sur AD', donc $ED = AD'$.
Considérons maintenant la rotation d'angle 60^o dans le sens direct , de centre C. Elle envoie F sur A et D sur D' de même que précédemment. Donc $DF = AD'$. Conclusion : on a bien $DF = DE$.

3 mercredi matin : Jean-Louis Tu

Le théorème de l'angle inscrit : rappels et compléments de cours, exercices supplémentaires.

Angle entre une tangente et une corde

Théorème 11. Soit $[BC]$ une corde d'un cercle $\mathcal{C}$. L'angle formé par une demi-droite tangente au cercle en B et la demi-droite $[BC)$ est égal à l'angle inscrit qui intercepte le même arc.

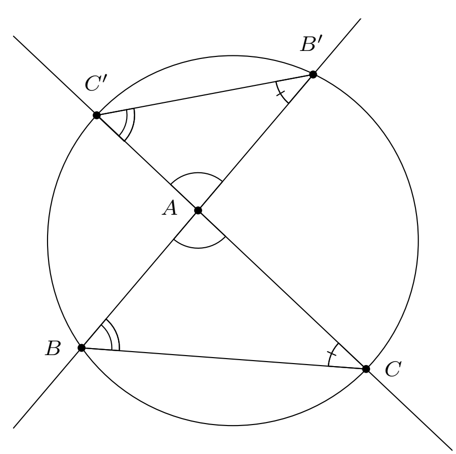


Démonstration. Notons $[Bx)$ la demi-droite tangente. Alors $(Bx, \overrightarrow{BC})$ est le complémentaire de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$ car $(Bx, \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, notons I le milieu de $[BC]$. Alors OIB est rectange en I donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$ est également le complémentaire de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$.

Il vient : $(Bx, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$. Or, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$ est égal à la moitié de l'angle au centre, donc est égal à l'angle inscrit.

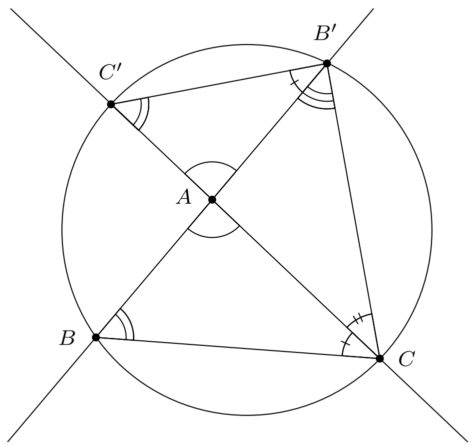
Remarque. Ce théorème peut être considéré comme un cas limite du théorème de l'angle inscrit. En effet, lorsque le point A se rapproche de B, la droite (AB) se rapproche de la tangente en B.

Angle intérieur La figure suivante apparaît dans de nombreuses configurations de géométrie plane :



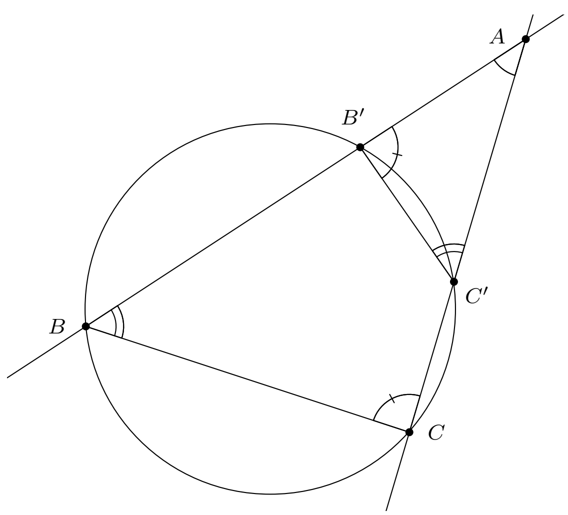
Théorème 12. Deux cordes $[BB']$ et $[CC']$ d'un cercle se coupent en un point intérieur A. Alors les triangles ABC et $AC'B'$ sont indirectement semblables, et l'angle en A est la somme des angles inscrits interceptant les mêmes arcs.

Démonstration. On a clairement $(AC', AB') = -(AB', AC') = -(AB, AC)$ et $(C'A, C'B') = (C'C, C'B') = (BC, BB') = (BC, BA) = -(BA, BC)$, donc ABC et $AC'B'$ ont deux angles respectivement égaux au signe près, ce qui prouve qu'ils sont indirectement semblables.

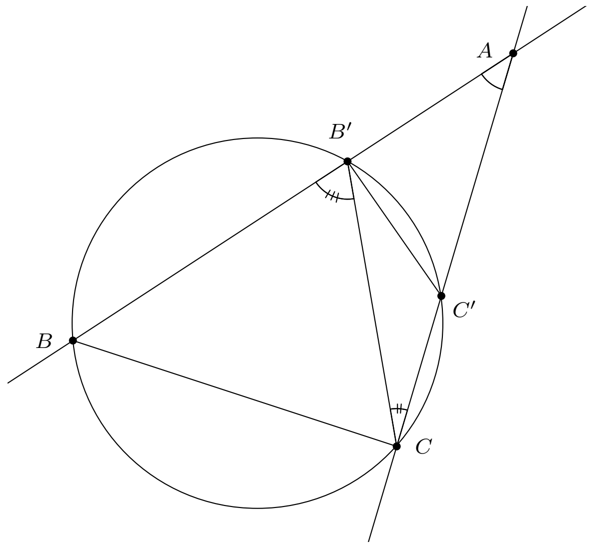


De plus, l'angle $\widehat{BAC}$ est supplémentaire de l'angle $\widehat{CAB'} = \pi - \widehat{B'CA} - \widehat{AB'C}$, donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'CA} + \widehat{AB'C}$ est bien la somme des angles inscrits interceptant les arcs $B'C'$ et BC.

Théorème 13. Deux cordes $[BB']$ et $[CC']$ d'un cercle se coupent en un point extérieur A. Alors les triangles ABC et $AC'B'$ sont indirectement semblables, et l'angle en A est la différence des angles inscrits interceptant les mêmes arcs.



Démonstration. La démonstration que ABC et $AC'B'$ sont indirectement semblables est exactement la même que dans le cas où A est intérieur au cercle. Pour déterminer l'angle $\widehat{A}$, on trace la corde $B'C$:

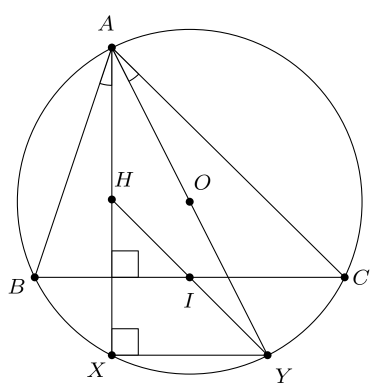


On a $\widehat{A} = \pi - \widehat{CB'A} - \widehat{ACB'} = \widehat{BB'C} - \widehat{C'CB'}$ est bien la différence des angles inscrits interceptant les arcs BC et $B'C'$.

Une propriété de l'orthocentre

Théorème 14. Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, et A' le milieu de $[BC]$. Alors

- le symétrique X de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit ;
- le symétrique Y de H par rapport à A' appartient au cercle circonscrit ;
- $[AY]$ est un diamètre ;
- (AO) et (AH) sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.



Démonstration. $(XB, XC) = -(HB, HC) = -(HB, AC) - (AC, AB) - (AB, HC) = \frac{\pi}{2} + (AB, AC) + \frac{\pi}{2} = (AB, AC)$ modulo π, donc A, B, C, X sont cocycliques.

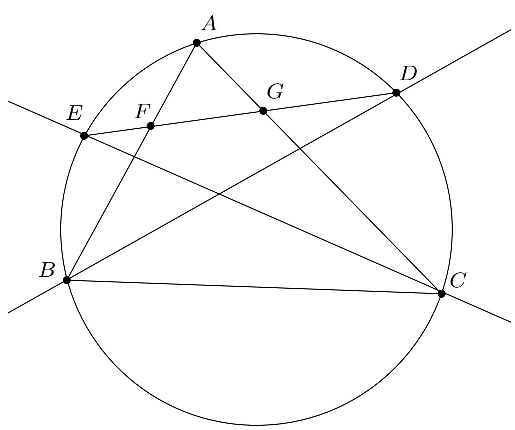
Comme une symétrie par rapport à un point conserve les angles orientés, $(YB, YC) = (HC, HB) = (AB, AC)$ d'après le calcul précédent, donc A, B, C, Y sont cocycliques.

Notons $\Delta = (OI)$ la perpendiculaire à (BC) passant par I. Le point Y est le symétrique par rapport à I du symétrique par rapport à (BC) de X, donc Y est le symétrique de X par rapport à Δ. Par conséquent, $(XY) \perp \Delta$. D'autre part, $(AX) = (AH)$ est parallèle à Δ puisque perpendiculaire à (BC), donc $(XY) \perp (XA)$, ce qui montre que $[AY]$ est un diamètre.

Enfin, comme l'arc BX est symétrique de l'arc CY par rapport à Δ, les angles inscrits orientés correspondants sont opposés, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AX}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AY})$, ce qui montre la dernière assertion.

Exercice 1 Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ recoupent le cercle circonscrit en D et E, et la droite (DE) coupe (AB) et (AC) en F et G. Montrer que AFG est isocèle.

Solution de l'exercice 1

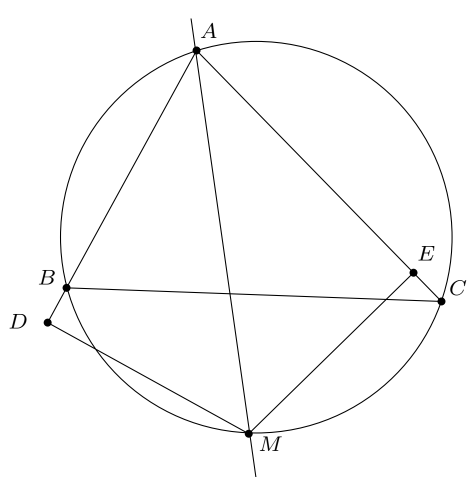


L'angle $\widehat{GFA}$ est la somme des angles inscrits qui interceptent les arcs AD et AE, donc vaut $\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$. De même, l'angle $\widehat{AGF}$ et égal à $\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$, donc AFG est isocèle en A.

Exercice 2 La bissectrice intérieure issue de A d'un triangle ABC recoupe le cercle circonscrit au point M. Soient D et E les projetés de M sur (AB) et (AC).

Montrer que $BD = CE$ et que $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Solution de l'exercice 2



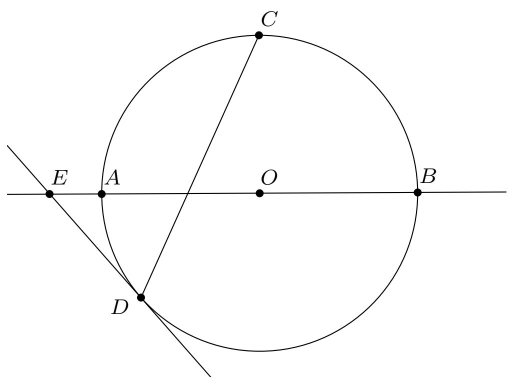
BDM et CEM sont des triangles rectangles en D et E, et vérifient $MD = ME$ et $MB = MB$ donc $BD = CE$.

On a $AD = AE$ pour des raisons de symétrie par rapport à la bissectrice.

Supposons pour se fixer les idées que $AB < AC$. Alors $AD+AE = AB+BD+AE = AB + EC + AE = AB + AC$, d'où la deuxième égalité.

Exercice 3 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en C. Soit P un point de $[AB]$. La droite (CP) recoupe le cercle ABC en un point D. La tangente en D à ce cercle coupe la droite (AB) en E. Montrer que DEP est isocèle en E.

Solution de l'exercice 3



$(DP, DE) = (DC, DE) = (BC, BD) = (BC, BA) + (BA, BD) = (AB, AC) + (BA, BD) = (PE, PD)$.

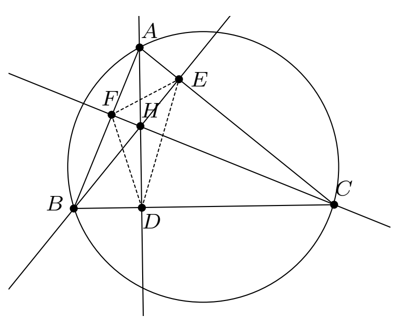
Exercice 4 Soit ABC un triangle, et D, E, F les pieds des hauteurs et H l'orthocentre.

1) Déterminer tous les angles des triangles AEF et DEF.

2) Que représentent les points A, B, C, H pour le triangle DEF ?

3) Soient P et Q les projetés de D sur (AB) et (AC). Montrer que (PQ) est parallèle à (EF).

Solution de l'exercice 4



1) Comme A, E, H, F sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AH]$, on a $\widehat{AEF} = \widehat{AHF} = 90° - \widehat{FAH} = \widehat{B}$. Donc AEF et ABC sont semblables.

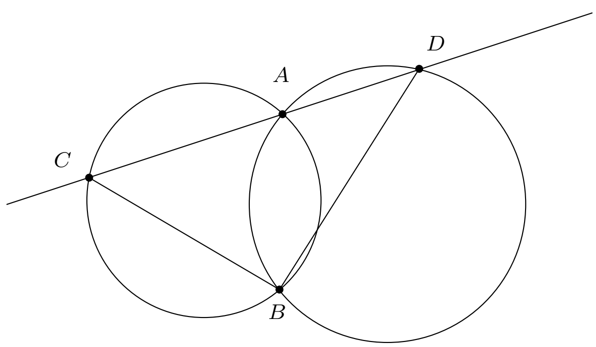
On a de même $\widehat{CED} = \widehat{B}$, donc $\widehat{DEF} = 180° - 2\widehat{B}$, et on a des formules analogues pour les deux autres angles de DEF.

2) (DA) et (BC) sont les bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{EDF}$, donc H, A, B, C sont le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits du triangle DEF.

3) $\dfrac{AF}{AP} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AQ}$ donc d'après le théorème de Thalès, (EF) et (PQ) sont parallèles.

Exercice 5 On considère deux cercles de centres O et O' sécants en A et B. Une droite passant par A coupe ces cercles en C et D. Déterminer l'angle $\widehat{CBD}$ en fonction de l'angle $\widehat{OAO'}$.

Solution de l'exercice 5



$\widehat{CBD} = 180° - \widehat{BCD} - \widehat{CDB} = 180° - \widehat{O'OA} - \widehat{AO'O} = \widehat{OAO'}$.

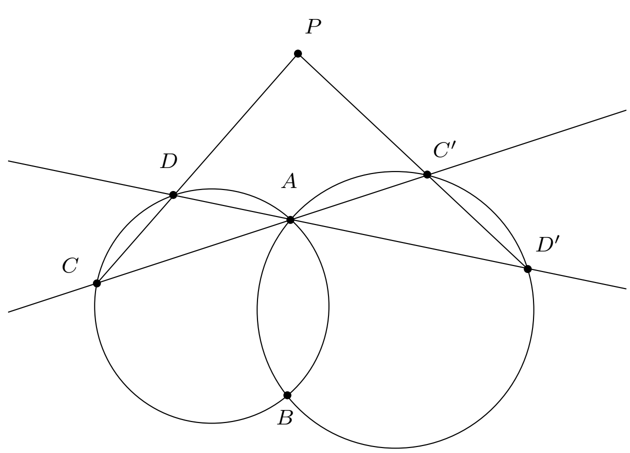
L'exercice suivant n'a pas été traité en cours.

Exercice 6 Deux cercles se coupent en A et B. Deux sécantes passant par A coupent le premier cercle en C et D et le deuxième cercle en C' et D'. Les droites (CD) et $(C'D')$ se coupent en P.

Comparer l'angle $\widehat{CPC'}$ avec l'angle entre les deux cercles.

Que se passe-t-il lorsque C et D sont confondus ?

Solution de l'exercice 6

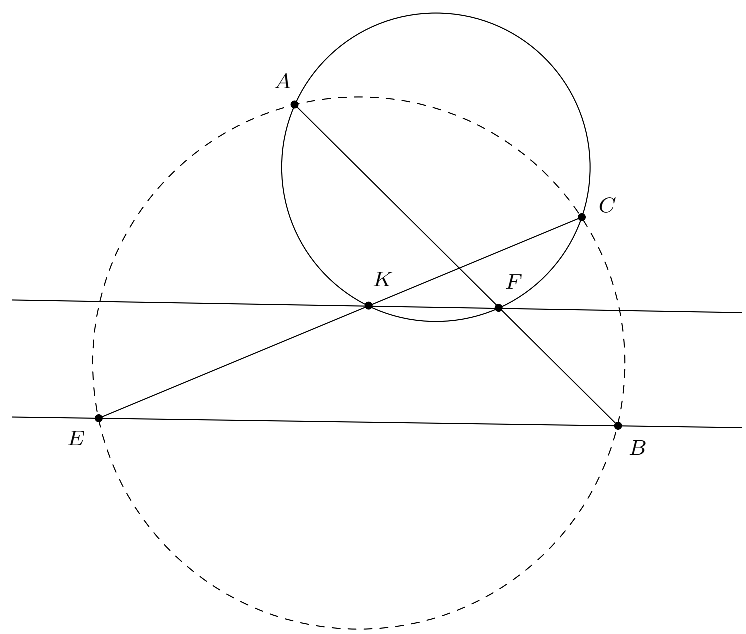


$\widehat{CPC'} = 180° - \widehat{C'CP} - \widehat{PC'C} = 180° - \widehat{ACD} - (180° - \widehat{CC'D'}) = 180° - \widehat{ABD} - \widehat{D'BA} = 180° - \widehat{D'BD} - 180° - \theta$ où θ est l'angle entre les deux cercles (voir exercice précédent).

Quand C et D sont confondus, les droites (PC) et (PC') sont tangentes aux cercles.

Exercice 7 On considère un cercle fixe $\mathscr{C}$ passant par un point A, une droite fixe $\mathscr{D}$ passant par un point B. Un cercle variable passant par A et B recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en C et la droite $\mathscr{D}$ en E. La droite CE recoupe $\mathscr{C}$ en K. Montrer que le point K est fixe.

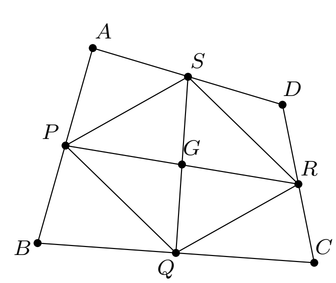
<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



La droite (AB) recoupe $\mathscr{C}$ en F. On a $(FK, FA) = (CK, CA) = (CE, CA) = (BE, BA) = (BE, FA)$ donc (FK) est parallèle à $(BE) = \mathscr{D}$. Comme F est fixe, le point K l'est aussi.

Quadrilatères inscriptibles

Théorème 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On note P, Q, R, S, U, V les milieux de $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]$. Alors $[PR]$, $[QS]$ et $[UV]$ se coupent en leur milieu G. On appelle ce point le centre de gravité de $ABCD$.

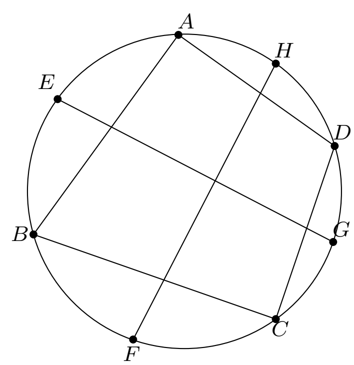


Les droite (PS) et (QR) sont parallèles puisqu'elles sont parallèles à (BD). De même, (PQ) et (RS) sont parallèles. Donc $PQRS$ est un parallélogramme, et ses diagonales $[PR]$ et $[QS]$ se coupent en leur milieu.

De même, $PURV$ est un parallélogramme donc $[PR]$ et $[UV]$ se coupent en leur milieu.

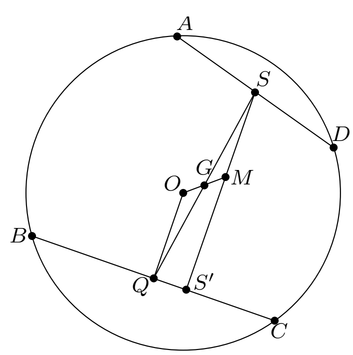
A partir de maintenant, on s'intéresse plus particulièrement aux quadrilatères cycliques (ou inscriptibles), c'est-à-dire dont les quatre sommets se situent sur un même cercle.

Théorème 16. Soit $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O. Notons E, F, G, H les milieux des arcs AB, BC, CD, DA. Alors $(EG) \perp (FH)$.



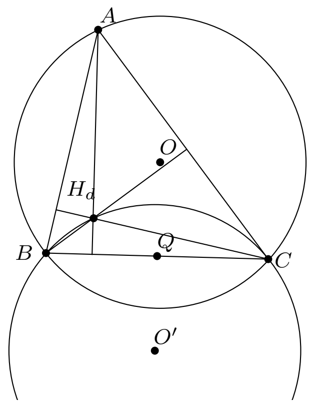
En effet, on sait que l'angle entre deux cordes sécantes est égal à la somme des angles inscrits qui interceptent les mêmes arcs, donc l'angle entre (EG) et (FH) est égal à $\frac{1}{4}(\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA}) = 90°$.

Théorème 17. Soient $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et P, Q, R, S les milieux des côtés. Notons P', Q', R', S' les projetés de P, Q, R, S sur les côtés opposés. Alors $(PP'), (QQ'), (RR')$ et (SS') sont concourantes en un point M, appelé l'anticentre de $ABCD$. De plus, G est le milieu de $[OM]$.



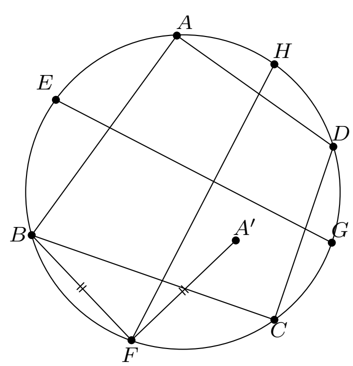
On définit M comme le symétrique de O par rapport à G. La symétrie de centre G envoie S sur Q et M sur O, donc (SM) est parallèle à (OQ), donc $(SM) \perp (BC)$. Par conséquent, (SS') passe par M. On raisonne de même sur les trois autres droites.

Théorème 18. Notons H_a, H_b, H_c, H_d les orthocentres de BCD, CDA, DAB et ABC. Alors M est le milieu de $[AH_a], [BH_b]$, etc.



Notons O' le symétrique de O par rapport à (BC). Alors H_d appartient au symétrique du cercle par rapport à (BC), donc $\overrightarrow{AH_d} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OQ}$. De même, $\overrightarrow{DH_a} = 2\overrightarrow{OQ}$, donc ADH_aH_d est un parallélogramme et les diagonales $[AH_a]$ et $[DH_d]$ se coupent en leur milieu.

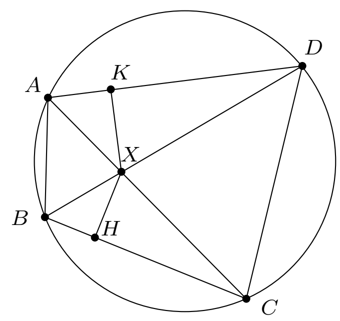
Théorème 19. Soient A', B', C', D' les centres des cercles inscrits à BCD, CDA, DAB, ABC. Alors $A'B'C'D'$ est un rectangle.



Notons E, F, G, H les milieux des arcs AB, BC, CA, AD. On sait que BFA' est isocèle en F, donc $FB = FA'$. De même, $FB = FD'$, donc $A'FD'$ est isocèle en F. La base $(A'D')$ est perpendiculaire à la bissectrice (FH) de l'angle $\widehat{A'FD'}$. De même, $(B'C')$ est perpendiculaire à (FH), et $(A'B')$ et $(C'D')$ sont perpendiculaires à (EG). De plus, (EG) et (FH) sont perpendiculaires entre elles, d'où la conclusion.

Exercice 8 Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et X le point d'intersection des diagonales. Notons H et K les projetés de X sur (BC) et (AD). Montrer que $\dfrac{XH}{XK} = \dfrac{BC}{AD}$.

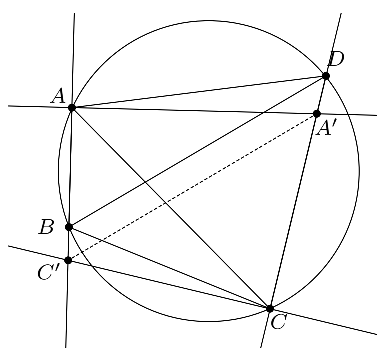
Solution de l'exercice 8



Comme XAD et XBC sont semblables, leurs hauteurs issues de X sont proportionnelles à leurs côtés opposés à X.

Exercice 9 Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. La perpendiculaire en A à (AB) rencontre (CD) en A', et la perpendiculaire en C à (CD) rencontre (AB) en C'. Montrer que $(A'C')$ est parallèle à (BD).

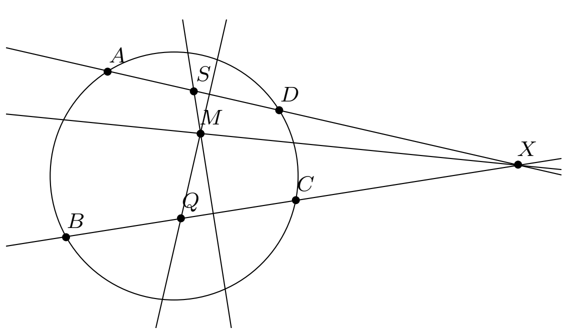
<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



$AA'CC'$ sont cocyliques sur le cercle de diamètre $[A'C']$ donc $(C'A', C'A) = (CA', CA) = (CD, CA) = (BD, BA)$, donc $(C'A')$ est parallèle à (AB).

Exercice 10 Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Notons X le point d'intersection de (AD) et (BC). Notons Q et S les milieux de $[BC]$ et $[DA]$. Montrer que la perpendiculaire à (QS) passant par X passe par l'anticentre de $ABCD$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>



Par définition, M est l'intersection de deux hauteurs de XSQ, donc est l'orthocentre de XSQ. On en déduit que $(XM) \perp (SQ)$.

2 Mercredi après-midi et jeudi : Combinatoire

1 mercredi après-midi : François Lo Jacomo

Un premier principe combinatoire, qui sert dans de nombreux domaines des mathématiques, c'est le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs semble élémentaire, mais il n'a été utilisé en mathématiques qu'à partir du 19-ème siècle :

Si l'on range au moins $n+1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets. Un des exercices du test initial pouvait être résolu à partir du principe des tiroirs : si l'on choisit cinq nombres de 1 à 10, il y a dix différences entre deux de ces cinq nombres, comprises entre 1 et 9, donc au moins deux de ces différences sont égales.

Plus généralement, si l'on range au moins $kn+1$ objets dans ces mêmes n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins $k+1$ objets. Par exemple : sachant qu'un humain a moins de 250 000 cheveux (0 à 249 999) et qu'il y a 2 500 000 Parisiens, au moins deux Parisiens ont le même nombre de cheveux. On peut même préciser qu'il existe 10 Parisiens au moins ayant le même nombre de cheveux. S'il existait 2 500 001 Parisiens ayant chacun moins de 250 000 cheveux, on pourrait affirmer qu'il en existe au moins 11 parmi eux ayant le même nombre de cheveux.

Exercice 1

Chacun des 31 stagiaires connaît un certain nombre d'autres stagiaires. On admet que si A connaît B, B connaît A. Montrer qu'il existe au moins deux stagiaires qui connaissent précisément le même nombre de stagiaires.

Solution de l'exercice 1

Les tiroirs seront le nombre de stagiaires connus. Il peut varier de 0 à 30, ce qui fait 31 tiroirs pour 31 stagiaires, c'est un tiroir de trop. Mais on remarque que si un stagiaire connaît les 30 autres stagiaires, alors tous les stagiaires le connaissent, donc le nombre de stagiaires connus ne peut pas prendre la valeur 0 s'il prend la valeur 30. Il prend donc au plus 30 valeurs, et le principe des tiroirs s'applique.

Exercice 2

Les points du plan sont coloriés arbitrairement en rouge et en noir. Montrer qu'on peut trouver deux points de même couleur situés à exactement 1 m de distance.

Solution de l'exercice 2

Il suffit de considérer les trois sommets d'un triangle équilatéral de 1 m de côté. Deux au moins d'entre eux sont de même couleur.

Exercice 3

On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

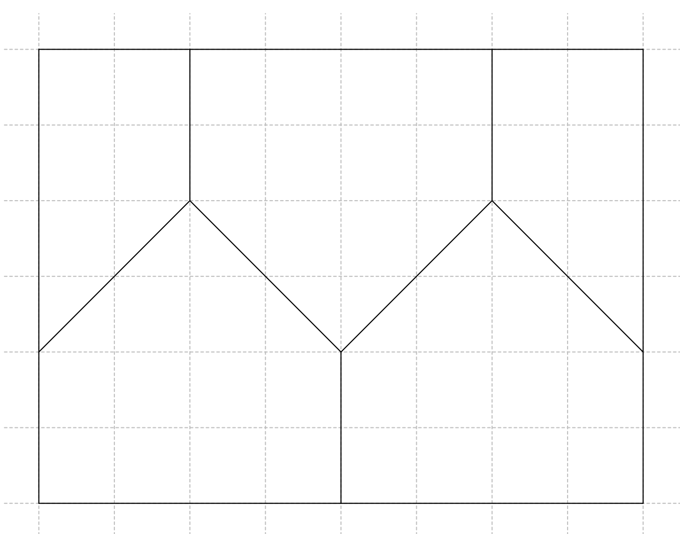
Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut strictement moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

Exercice 4

On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles 2×1. Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à $\sqrt{5}$.



Exercice 5

Montrer que quel que soit n, parmi $(n+1)$ entiers quelconques a_0, a_1 ... a_n, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Si $n = 2$, cela revient à dire que parmi trois entiers donnés, il y en a au moins deux qui ont même parité. On répartit les nombres dans deux tiroirs (pair et impair), et l'un des tiroirs contient au moins deux nombres. On peut faire la même chose si $n = 3$, en répartissant les nombres dans trois tiroirs : ceux qui sont divisibles par 3, ceux de la forme $3k+1$ et ceux de la forme $3k+2$, et plus généralement on classe les nombres dans les n classes modulo n : $\{kn\}, \{kn+1\}...\{kn+(n-1)\}$. Au moins une classe contient au moins deux entiers : $kn + r$ et $k'n + r$, et leur différence $(k - k')n$ est bien divisible par n.

Exercice 6

Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Solution de l'exercice 6

On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$ etc... : a_i est l'entier formé de i chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont une différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Pavages

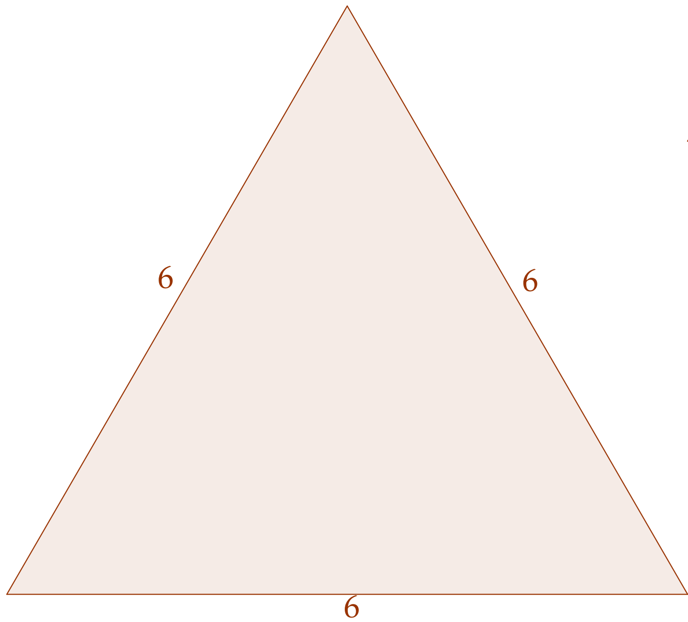
Nous conclurons par des problèmes un peu différents : peut-on paver telle surface avec des objets de telle forme ? Là encore, il faut distinguer clairement le cas où la réponse est oui (il suffit alors de montrer un exemple de pavage solution) du cas où la réponse est non : souvent, on a alors recours à un coloriage pour montrer que, si l'on pouvait paver, le nombre de cases de telle couleur ne serait pas ce qu'il est effectivement. Ci-dessous trois exemples typiques :

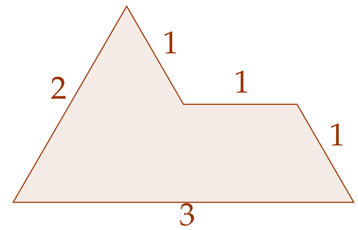
Exercice 7

On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Solution de l'exercice 7

Problème très classique : chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit 30 cases noires et 32 cases blanches soit 32 noires et 30 blanches. Si l'on parvient à placer 30 dominos (ce qui reste à prouver, mais c'est facile), les deux dernières cases seront obligatoirement de même couleur, et on ne pourra pas y placer un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.



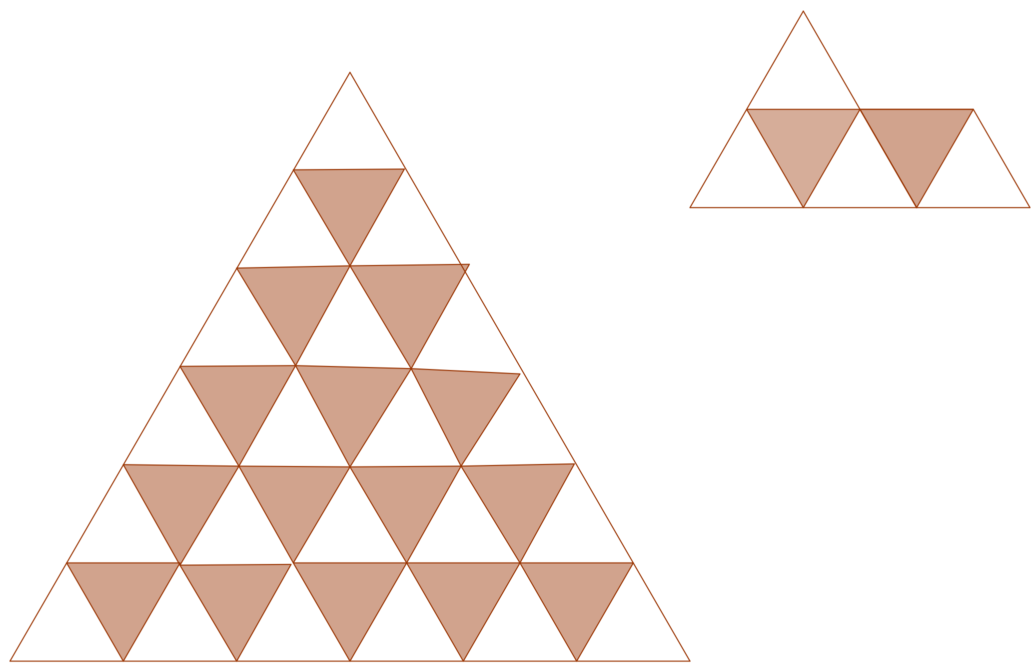


Exercice 8

Peut-on paver un triangle équilatéral de coté 6 avec des "sphinx" de forme ci-dessus (angles de 60°, 120° ou 240°) ?

Solution de l'exercice 8

Le triangle équilatéral de côté 6 peut être divisé en 36 triangles de côté 1, dont $15 = 1+2+3+4+5$ sont "pointe en bas" (colorions-les en gris) et $21 = 1+2+3+4+5+6$ "pointe en haut" (blancs). Or un sphinx est composé de 6 triangles (qui est bien un diviseur de 36, ce n'est pas là que se situe l'impossibilité), mais parmi ces 6 triangles, 4 sont dans un sens et 2 dans l'autre. Quelle que soit l'orientation de mon sphinx, celui-ci couvrira donc soit 2 cases grises et 4 cases blanches, soit 2 cases blanches et 4 cases grises. Dès lors, avec un nombre quelconque de sphinx on ne pourra couvrir qu'un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases grises. En particulier, on ne couvrira jamais 15 cases grises et 21 cases blanches : il restera un nombre impair de cases grises non pavées et un nombre impair de cases blanches non pavées.

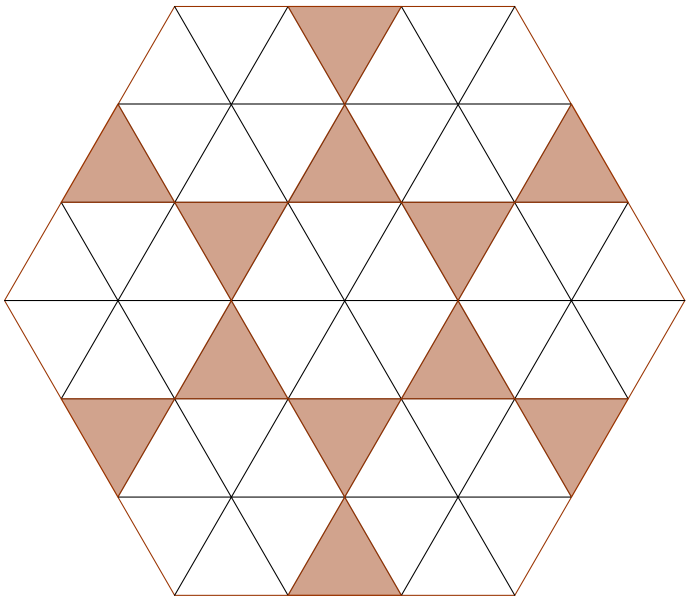


Exercice 9

Combien peut-on placer au maximum de parallélogrammes de cotés 1 et 2, d'angles $60°$ et $120°$, dans un hexagone régulier de coté 3 ?

Solution de l'exercice 9

Appelons s l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1. L'hexagone régulier peut être découpé en 6 triangles équilatéraux de côtés 3, donc d'aire $9s$: son aire totale est $54s$. Or les parallélogrammes ont chacun pour aire $4s$: comme $\frac{54s}{4s} > 13$, on devrait pouvoir en placer 13. Mais une fois encore, ce n'est pas possible : il suffit de colorier l'hexagone comme ci-dessous en 12 triangles noirs et 42 triangles blancs de sorte qu'un parallélogramme, quelles que soient les quatre cases qu'il occupe, couvre obligatoirement un et un seul triangle noir. On peut donc placer au maximum 12 parallélogrammes, mais il faut encore prouver qu'on peut effectivement en placer 12, ce qui est relativement facile (en ne couvrant pas du tout l'hexagone blanc du centre par exemple).



2 jeudi matin : Félix Lequen

Récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n, par exemple « n est pair » ou « $n^3 - n$ est un multiple de 3 ». On cherche à démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout n. Une méthode possible est de procéder par *récurrence*, c'est-à-dire que l'on va montrer que $P(0)$ est vraie (*initialisation*), et que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie (*hérédité*). On conçoit alors intuitivement que $P(n)$ sera bien vraie pour tout entier n : en effet, $P(0)$ est vraie, donc $P(1)$ aussi, donc $P(2)$ aussi, donc $P(3)$ aussi, et ainsi de suite. Notons qu'on peut très bien faire commencer une récurrence à un entier autre que 0, le principe restant le même.

Exercice 1 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 Montrer par récurrence que pour pour tout entier $n \geq 0$, on a $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3 Trouver une formule pour $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Exercice 4 Montrer que $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 5 Montrer que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 Soit n un entier et x un réel. Montrer que : $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Exercice 7 Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$.

Exercice 8

— Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $2^n > n$.
— Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, $n! > 2^n$. (Rappel : $n!$ (« factorielle n ») désigne le produit des entiers de 1 à n : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$)

Exercice 9 Soit x un nombre réel suprieur ou égal à -1 et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (*inégalité de Bernoulli*).

Exercice 10 Soient a et b des entiers positifs avec b non nul. Montrer qu'il existe des entiers q et r tels que $0 \leq r < b$ et $a = bq + r$ (*division euclidienne*).

Exercice 11 Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne n cercles dans le plan, qui délimitent donc un certain nombre de régions du plan. Montrer que l'on peut colorier le plan à l'aide de deux couleurs de sorte que deux régions ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Solution de l'exercice 1 La propriété est vraie pour 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors $0+1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. La propriété est donc héréditaire, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 2 La propriété est vraie pour 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

On vérifie alors que $(2n+3)(n+2) = 2n^2 + 7n + 6$.

Solution de l'exercice 3 En testant de petites valeurs de n, on conjecture que $0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons cette propriété par récurrence. Elle est vraie pour 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie pour n. Alors :

$$\begin{aligned} 0^3 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété : $1 + 3 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$. Alors $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $1 + 3 + \ldots + (2n+1) + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5 La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} &\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)} \\
&= 2-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 6 Soit x un réel différent de 1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1+x+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. C'est vrai pour 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie pour n. On a alors $1+x+\ldots+x^n+x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}+x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$.

Solution de l'exercice 7 Soit x un réel non nul tel que $x+\frac{1}{x}$ est entier. Ici, on va faire une récurrence d'ordre 2, c'est-à-dire que l'on va montrer que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1, puis montrer que, pour tout entier n, si elle est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$. Il s'agit d'une variante de la récurrence normale et on peut d'ailleurs s'y ramener. La propriété est vraie pour 0 car alors $x^0+\frac{1}{x^0}=2$ qui est entier. Elle est vraie pour 1 par hypothèse.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$. Alors, $(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}})(x+\frac{1}{x})$ est entier car c'est le produit de deux entiers. Or : $(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}})(x+\frac{1}{x}) = x^{n+2}+x^n+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n+2}}$, donc $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}$ s'exprime comme différence de deux entiers, donc c'est un entier, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 8

— La propriété est vraie pour $n=0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > n$. On a alors en fait $2^n \geq n+1$, car il n'y a pas d'entier compris entre n et $n+1$. On a donc $2^{n+1} \geq 2(n+1)$ en multipliant par 2, ce qui conclut car pour tout $n \geq 0$, $2(n+1) > n+1$.

— La propriété est vraie pour 4, puisque $4! = 24 > 16 = 2^4$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n! > 2^n$. On a alors, en multipliant par $n+1$: $(n+1)! > (n+1)2^n$, or pour $n \geq 4$, $n+1 \geq 2$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 9 Soit x un réel supérieur ou égal à -1. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $(1+x)^n \geq 1+nx$. La propriété est vraie pour 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Alors en multipliant cette inégalité par $1+x$, qui est positif, on a : $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10 Soit b un entier naturel non nul. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on note $P(a)$ la propriété suivante : il existe des entiers q et r, avec $0 \leq r \leq b$ tels que $a = bq+r$. Alors $P(0)$ est vraie car $0 = 0 \times b + 0$ et $0 \leq 0 < b$. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(a)$ soit vraie. Soient donc q et r des entiers, avec $0 \leq r < b$, tels que $a = bq+r$. On a alors deux cas : soit $0 \leq r \leq b-2$, et dans ce cas, on a $a+1 = bq+(r+1)$, avec q et $r+1$ deux entiers et $0 \leq r+1 < b$. Sinon, on a $r = b-1$. Dans ce cas, $a+1 = b(q+1)+0$. On a bien $q+1$ et 0 des entiers avec $0 \leq 0 < b$.

Solution de l'exercice 11 On raisonne par récurrence sur le nombre n de cercles. Pour $n = 0$, on colorie le plan d'une seule couleur. Maintenant, supposons que la conclusion de l'exercice est vérifiée pour toute configuration de n cercles. Considérons une configuration de $n + 1$ cercles. Choisissons pour le moment un cercle et supprimons-le. On se retrouve alors avec une configuration avec n cercles, que l'on peut colorier par hypothèse de récurrence. On remet ensuite le cercle supprimé et on inverse les couleurs des régions qui sont à l'intérieur de ce dernier. Ce coloriage convient. En effet, considérons deux régions ayant une frontière en commun. Si elles sont toutes les deux à l'intérieur du cercle, la couleur de chacune d'elles a été changée, donc elles sont également de couleurs différentes. Si elles sont de part et d'autre du cercle, elles faisaient partie d'une même région avant que l'on remette le cercle, et la couleur de l'une d'entre elles a été changée, donc elles sont également de couleurs différentes.

3 jeudi après-midi : Thomas Budzinski

Exercices sur la récurrence :

Exercice 1 On n considère $2n$ points qui sont les sommets d'un polygone convexe. n de ces points sont bleus et n sont rouges. Montrer qu'on peut tracer n segments qui ne s'intersectent pas, tels que chaque point bleu est relié à un unique point rouge.

Solution de l'exercice 1 Le résultat est trivial pour $n = 1$. Si il l'est pour n, on considère $2n+2$ points : il y a forcément sur le polygone un point bleu et un point rouge côte à côte. On relie ces deux points entre eux, et les $2n$ points restants forment un polygone convexe. On leur applique donc l'hypothèse de récurrence et on obtient $n + 1$ segments qui vérifient les conditions voulues.

Exercice 2 (Plus difficile) Même exercice que le précédent, mais en supposant que les points sont placés n'importe comment, pas forcément sur un cercle. (on suppose juste que trois points ne sont jamais alignés)

Solution de l'exercice 2 L'initialisation à $n = 1$ est évidente. Supposons le résultat vrai pour tout $k \leq n$ et considérons $n + 1$ points bleus et $n + 1$ points rouges : si il y a au moins un point rouge et un point bleu sur le bord, on peut les relier entre eux et appliquer l'hypothèse de récurrence aux $2n$ points restants.

Si tous les points du "contour" sont bleus, quitte à faire un peu tourner la figure, on peut supposer qu'il n'y a pas deux points de même ordonnée. On considère alors une droite horizontale qui descend et croise les $2n + 2$ points un par un. Le premier point qu'elle croise est un point bleu, donc à un moment il y a plus de points bleus que de points rouges au-dessus de la droite. Le dernier qu'elle croise est aussi bleu, donc à un moment il y a plus de points rouges au-dessus de la droite que de bleus. Il y a donc un moment où il y a autant de points rouges que de bleus au-dessus de la droite, et de même en-dessous. On applique l'hypothèse de récurrence séparément aux points au-dessus et aux points en-dessous de la droite, et on a nos n segments.

Exercice 3 On trace n droites dans le plan, deux d'entre elles n'étant jamais parallèles et trois jamais concourrantes. Combien de régions délimitent-elles ?

Solution de l'exercice 3 On se demande combien de régions ajoute la n-ième droite : elle croise chacune des $n-1$ droites précédentes, ce qui définit $n-1$ points d'intersection sur cette droite, qui la découpent en n portions de droite. Chacune de ces droites correspond à une région traversée par la n-ième droite, donc elle coupe en deux n régions, donc la n-ième droite ajoute n régions. Comme il y a une unique région avec 0 droite, le nombre de régions avec n droites vaut donc $1+1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}+1$.

Exercice 4 $2n+1$ enfants jouent avec des pistolets à eau. A un certain moment, chaque enfant tire sur son camarade le plus proche. Montrer qu'il y a au moins un enfant qui reste sec.

Solution de l'exercice 4 Pour $n=1$, il y a deux enfants parmi les trois qui sont à distance minimale. Ces deux enfants s'aspergent mutuellement, de sorte que le troisième reste sec.
Si le résultat marche pour n, alors parmi $2(n+1)+1$ enfants on peut en trouver deux qui minimisent la distance. Appelons-les François et Félix. Si François et Pierre n'avaient pas été là, d'après l'hypothèse de récurrence, un des enfants restants serait resté sec. Appelons-le Jean-Louis : en rajoutant François et Pierre, certains tirs peuvent être "redirigés" vers François ou Pierre, mais aucun tir ne va toucher Jean-Louis car Pierre et François s'aspergent l'un l'autre. On a donc bien un enfant qui reste sec.

V. Avancés

1 Mardi et mercredi matin : Géométrie

1 mardi matin : Jean-François Martin

Le texte en question n'est pas parvenu à temps.

2 mardi après-midi : Thomas Budzinski

Homothéties

Résumé du cours :

Un vecteur est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

Définition 20. Soient O un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$.

Proposition 21. Les homothéties conservent les angles, les rapports de longueurs, les droites, les cercles etc... De plus, l'image d'une droite (Δ) par une homothétie est parallèle à Δ.

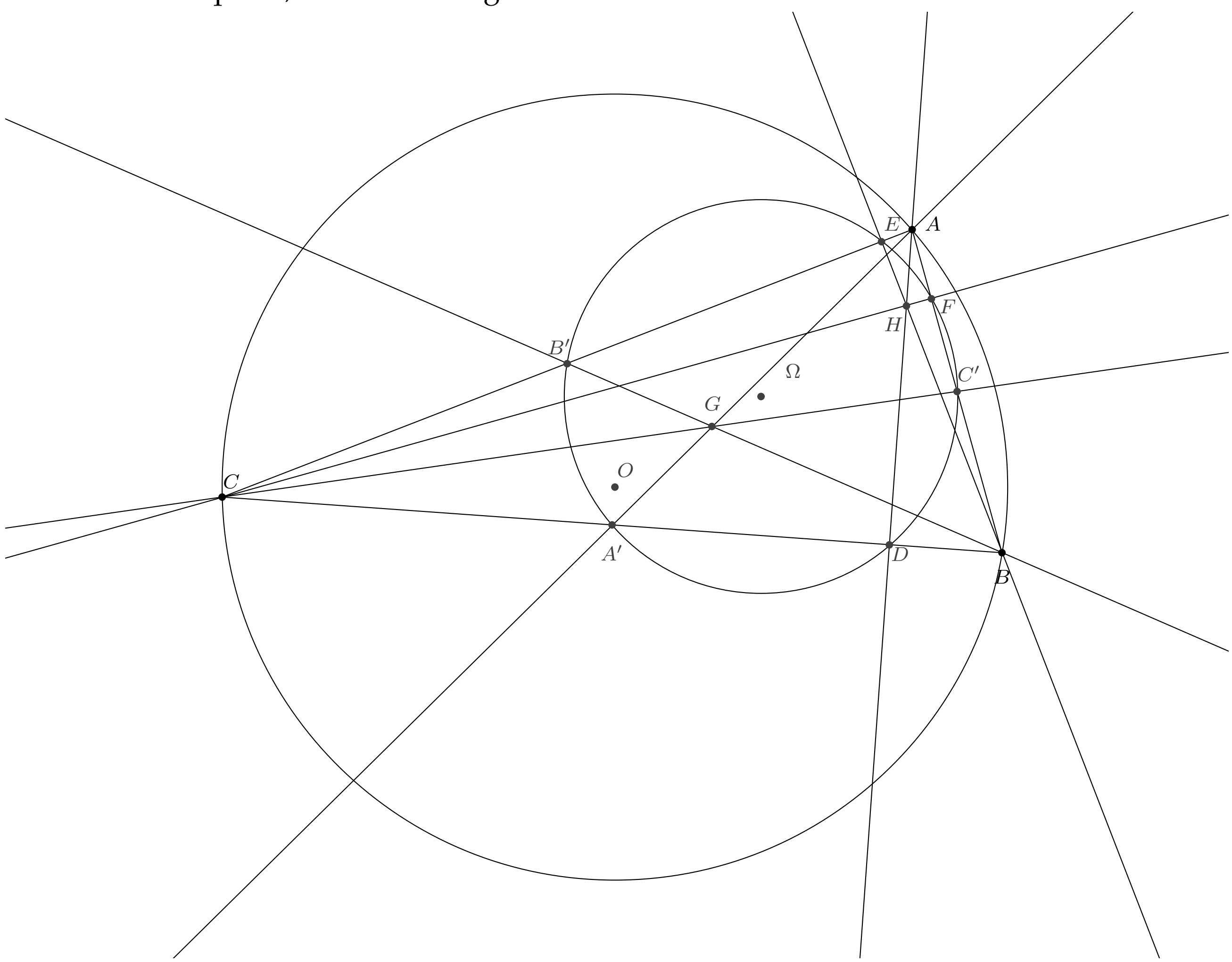
Proposition 22. La composée de deux homothéties h_1 et h_2 de rapports k_1 et k_2 est une translation si $k_1 k_2 = 1$, et une homothétie de rapport $k_1 k_2$ sinon. Dans ce cas, le centre de $h_1 \circ h_2$ est aligné avec ceux de h_1 et de h_2.

Proposition 23.
- Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments supportés par des droites parallèles. Il existe une unique homothétie envoyant A sur A' et B sur B'.
- Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons différents. Il existe exactement deux homothéties, une de rapport positif et une de rapport négatif, envoyant Γ_1 sur Γ_2.
  S'ils ont le même rayon, il existe exactement une homothétie et une translation envoyant l'un sur l'autre.
  De plus, si les cercles admettent des tangentes communes extérieures (resp. intérieures), alors leur intersection est le centre de l'homothétie positive (resp. négative) envoyant l'un sur l'autre.

Exercices :

Exercice 1 (Droite d'Euler)
Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité (i.e le point d'intersection de ses médianes) et H son orthocentre (i.e le point d'intersection de ses hauteurs). On note A', B' et C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B et C..

— Montrer que G se trouve aux deux tiers des médianes, puis que $A'B'C'$ est l'image de ABC par une homothétie bien choisie de centre G.
— En déduire que O, G et H son alignés.

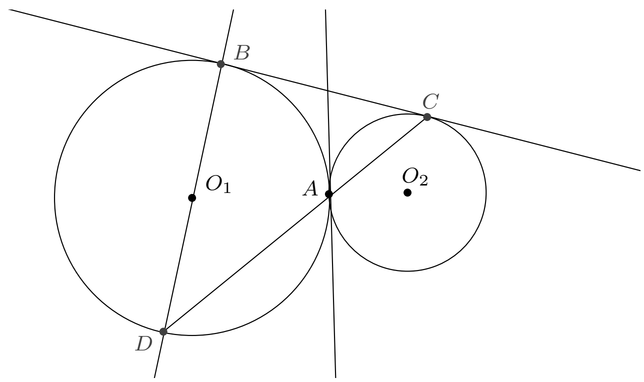


Solution de l'exercice 1

— Comme $(A'B')$ est parallèle à (AB), il existe une homothétie h de centre G qui envoie (AB) sur $(A'B')$. On a $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$. h est de rapport négatif et $A'B' = \frac{1}{2}AB$ donc h est de rapport $-\frac{1}{2}$, d'où $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. On en déduit immédiatement la deuxième partie de la question.
— Soit h l'homothétie de la première question : $h(ABC) = A'B'C'$, donc h envoie H sur l'orthocentre de $A'B'C'$. Or, O est l'orthocentre de $A'B'C'$. En

effet, (OA') est perpendiculaire à (BC), donc à $(B'C')$ par le théorème de la droite des milieux, donc c'est la hauteur issue de A' dans $A'B'C'$.
O, G et H sont donc alignés et, plus précisément, $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Exercice 2 Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement en A, et une tangente commune extérieure est tangente en à Γ_1 en B et à Γ_2 en C. Soit D le point diamétralement opposé à B dans Γ_1.
Montrer que A, C et D sont alignés.

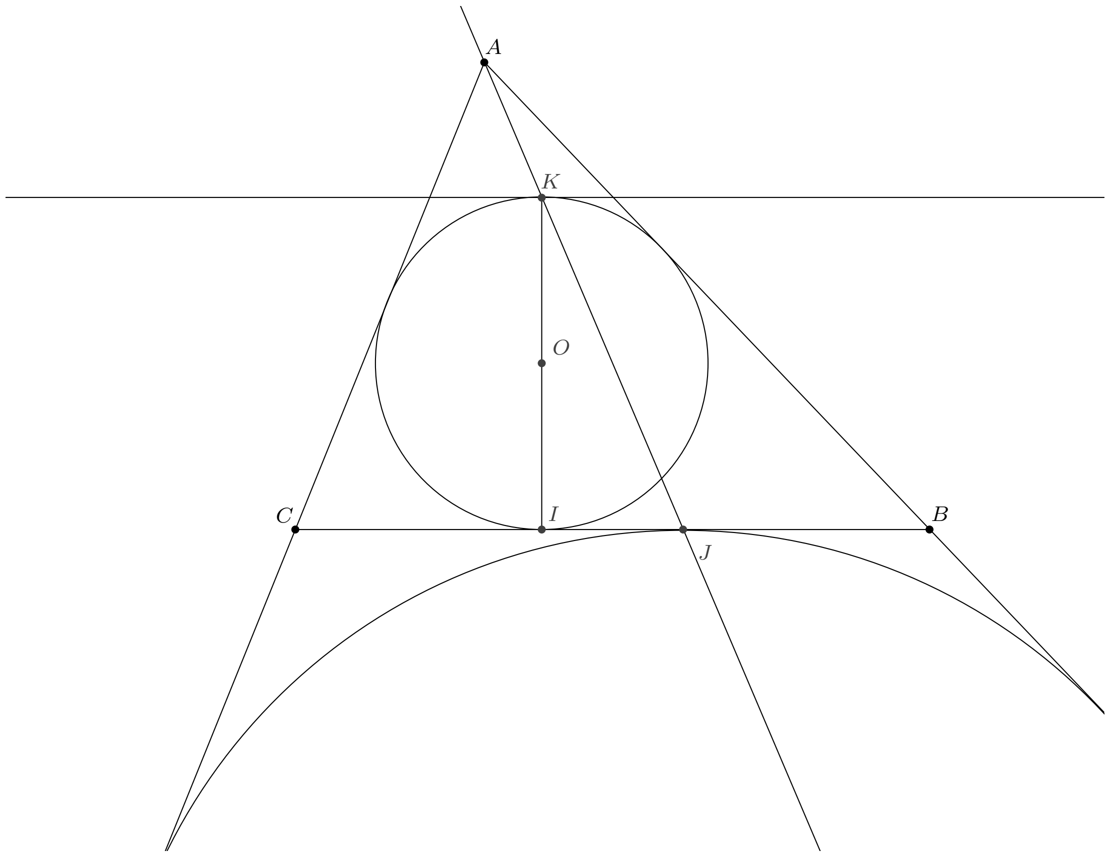


<u>*Solution de l'exercice 2*</u> A est le centre d'une homothétie négative h qui envoie Γ_2 sur Γ_1. De plus, D est diamétralement opposé à B donc la tangente à Γ_1 en D est parallèle à (BC). On a donc $h(C) = D$, donc A, C et D sont alignés.

Remarque 24. Cet exercice peut également être résolu par chasse aux angles.

Exercice 3 Soit ABC un triangle. On note Γ son cercle inscrit et Γ_A son cercle exinscrit en A. Γ touche $[BC]$ en I, et Γ touche $[BC]$ en J. Soit K le point d'intersection de Γ avec (AJ) le plus proche de A.
Montrer que IJK est rectangle en I.

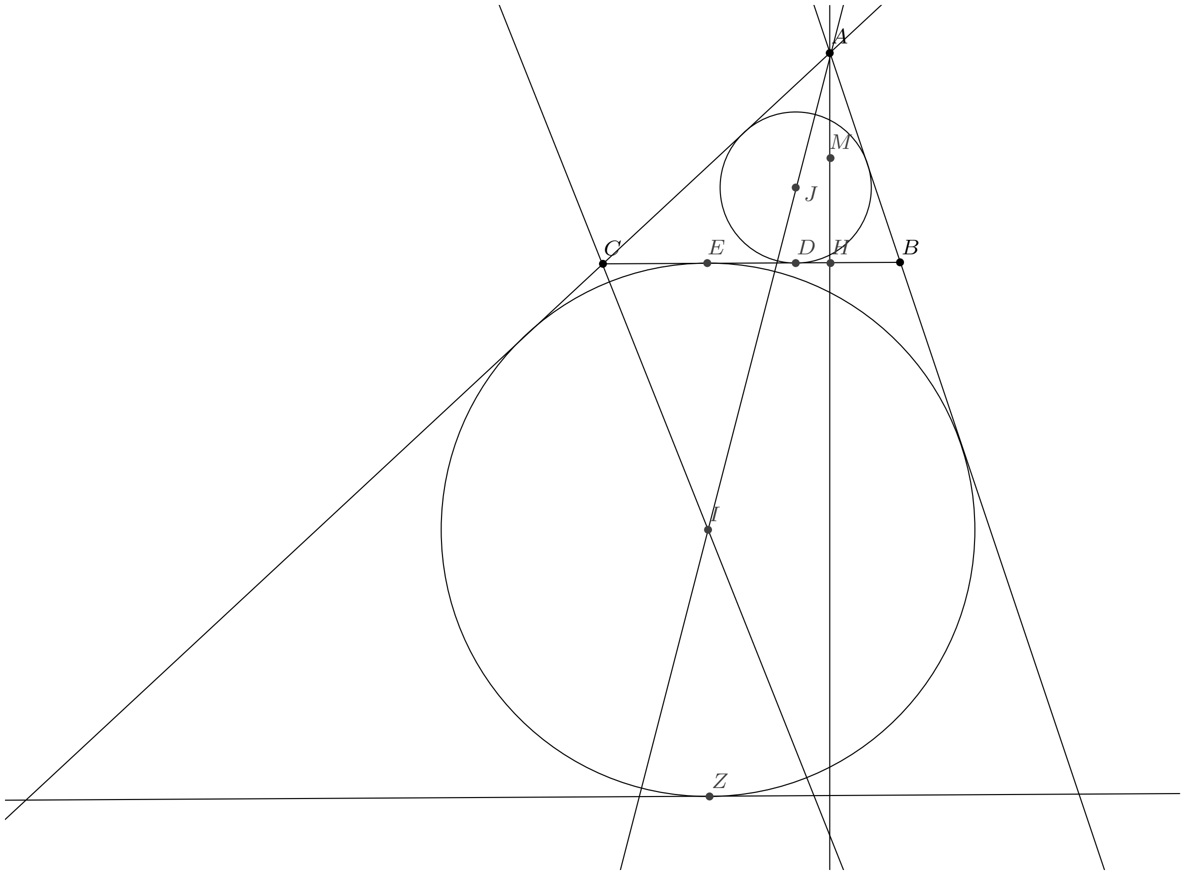
Remarque 25. Le cercle exinscrit en A au triangle ABC est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.



Solution de l'exercice 3 A est l'intersection des tangentes communes extérieures à Γ et Γ_A, donc c'est le centre de l'homothétie positive h qui envoie Γ_A sur Γ. $h(J)$ est sur (AJ) et sur le cercle $h(\Gamma_A) = \Gamma$, donc $h(J) = K$. La tangente à Γ en K est donc parallèle à (BC). Soit donc O le centre de Γ : (OK) est perpendiculaire à la tangente, donc à (BC), donc $K \in (OI)$ et (IK) est perpendiculaire à (BC), d'où le résultat.

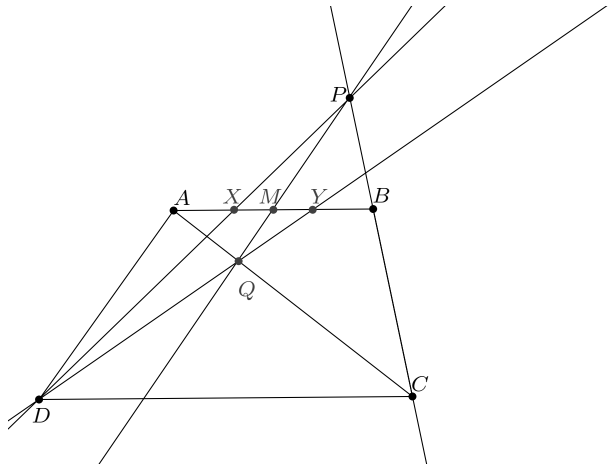
Exercice 4 Soit ABC un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle A-exinscrit et M le milieu de la hauteur issue de A. Montrer que M, D et I sont alignés.

Remarque 26. On rappelle que le cercle A-exinscrit au triangle ABC est le cercle tangent au segment $[BC]$, et aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.



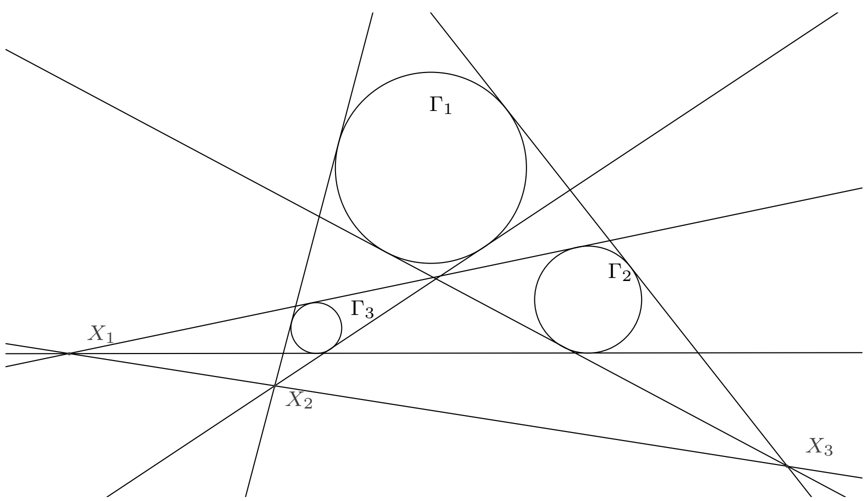
<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Soit Z le point "en bas" du cercle exinscrit : l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit envoie D sur Z, donc A, D et Z sont alignés, donc il existe h de centre D qui envoie A sur Z. Elle envoie (BC) sur elle-même, donc la hauteur issue de A sur la droite (IZ), donc le pied H de la hauteur est envoyé sur le point de contact E du cercle exinscrit avec $[BC]$, donc le milieu de la hauteur M est envoyé sur le milieu de $[EZ]$, c'est-à -dire I. D étant le centre de cette homothétie, on en déduit que D, M et I sont alignés.

Exercice 5 Soient $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD), M le milieu de $[AB]$ et P un point de (BC). On pose $X = (PD) \cap (AB)$, $Q = (PM) \cap (BD)$ et $Y = (PQ) \cap (AB)$. Montrer que M est le milieu de $[XY]$.



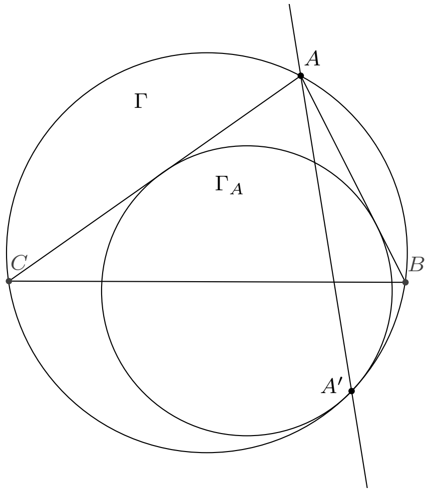
<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Les droites parallèles donnent envie de chercher des homothéties qui les envoient l'une sur l'autre. Deux sont intéressantes : celle de centre Q qui envoie A sur C et B sur D, qu'on note h_Q et celle de centre P qui envoie C sur B et D sur Y, qu'on note h_P.
$h_P \circ h_Q$ est alors une homothétie qui envoie A sur B et Y sur X. Son centre est sur (AB) et sur (PQ) (car c'est le centre d'une composée d'homothéties de centres P et Q), donc c'est M et, comme M est le milieu de $[AB]$, $h_P \circ h_Q$ est la symétrie centrale de centre M, d'où le résultat.

Exercice 6 (Théorème de Monge-d'Alembert)
Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles tels que les disques correspondants soient disjoints. Soient X_1 le point d'intersection des tangentes communes extérieures à Γ_2 et Γ_3. On définit de même X_2 et X_3.
Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont alignés.



<u>*Solution de l'exercice 6*</u> X_3 est le centre de l'homothétie positive h_1 qui envoie Γ_1 sur Γ_2, et X_1 celui de l'homothétie positive h_2 qui envoie Γ_2 sur Γ_3. $h_2 \circ h_1$ est une homothétie positive qui envoie Γ_1 sur Γ_3, donc son centre est X_2 et $X_2 \in (X_1X_3)$.

Exercice 7 Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit Γ_A un cercle tangent à (AB) et (AC), et tangent intérieurement à Γ en un point A'. On définit de manière similaire Γ_B, B', Γ_C et C'.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soient ω le cercle inscrit à (ABC) et X le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur ω : A' est le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur Γ_A et A celui de l'homothétie positive qui envoie Γ_A sur ω, donc $X \in (AA')$ et, de même, $X \in (BB')$ et $X \in (CC')$ d'où le résultat.

3 mercredi matin : Vincent Jugé

Exercices :

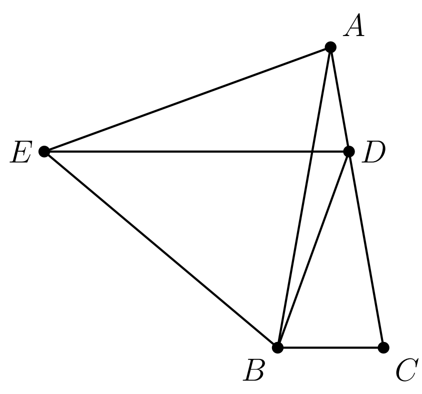
Exercice 1 (JBMO 2002 – Shorlist, Problème G3), *traité en cours*

Soit ABC un triangle isocèle en A, avec $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D un point appartenant au segment $[AC]$, tel que $AD = BC$. Calculer l'angle $\widehat{BDC}$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Soit E le point tel que le triangle EDA soit directement isométrique au triangle ABC. Alors, en angles orientés, $\widehat{EAB} = \widehat{EAD} - \widehat{BAD} = \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 80° - 20° = 60°$. Puisque $AB = AC = AE$, le triangle ABC est donc équilatéral. On a donc également $\widehat{BED} = \widehat{BEA} - \widehat{DEA} = 60° - \widehat{BAC} = 60° - 20° = 40°$. En outre, puisque ABC est équilatéral, on a $BE = AE = DE$, d'où l'on conclut que $\widehat{EDB} = \widehat{DBE} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{BED}\right) = 70°$.

Il s'ensuit que $\widehat{BCD} = 180° - \widehat{ADE} - \widehat{EDB} = 180° - \widehat{CBA} - 70° = 180° - 80° - 70° = 30°$.

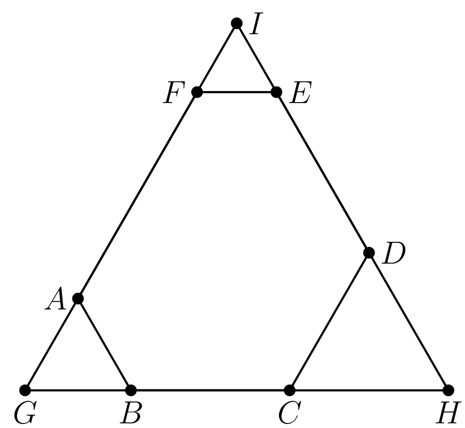


Exercice 2 (JBMO 2000 – Shortlist, Problème G5), *traité en cours*

Soit $ABCDEF$ un hexagone dont les angles sont égaux. Montrer que $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

Tous les angles de l'hexagone valent $60°$. Soit alors G, H et I les points d'intersection respectifs de (FA) et (BC), de (BC) et (DE), puis de (DE) et (FA). Les triangles ABG, CDH, EFI et GHI sont équilatéraux : notons a, b, c et s leurs côtés respectifs. Alors $AB - DE = a - (s - b - c) = a + b + c - s$; symétriquement, $EF - BC = c + (s - a - b) = a + b + c - s$ et $CD - FA = b - (s - a - c) = a + b + c - s$, de sorte que $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.



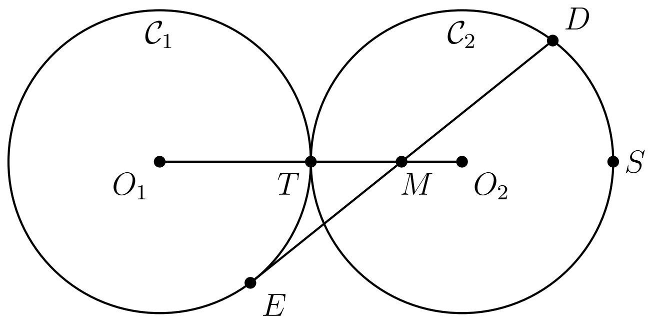
Exercice 3 (Olympiade Mathématique Lusophone 2011 – Problème 5), *traité en cours*

Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles mutuellement tangents, de rayon 1. Soit T leur point de tangence, et S le point de $\mathcal{C}_2$ diamétrialement opposé à T. Un point A se déplace sur le rebord de $\mathcal{C}_1$ dans le sens des aiguilles d'une montre, en partant de T. Un point B se déplace sur le rebord de $\mathcal{C}_2$ à la même vitesse que A, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en partant de S. Décrire le lieu que décrivent les milieux des segments $[AB]$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Soit s_{ST} la symétrie d'axe (ST) et $t_{\overrightarrow{ST}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{ST}$. Alors la transformation $t_{\overrightarrow{ST}} \circ s_{ST}$ envoie le point A sur le point B. Il s'ensuit que le milieu de $[AB]$ appartient nécessairement à la droite (ST). Plus précisément, soit p_A et p_B les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (ST), et soit M le milieu de $[AB]$. Alors M est également le milieu de $[p_A p_B]$ et vérifie même $\overrightarrow{Mp_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ST}$.

Or, le point p_B décrit exactement le segment $[ST]$. Le point M décrit donc le segment $[O_1O_2]$, où O_1 et O_2 sont les centres respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.



Exercice 4 (Olympiade Mathématique Lusophone 2013 – Problème 2), *non traité en cours*

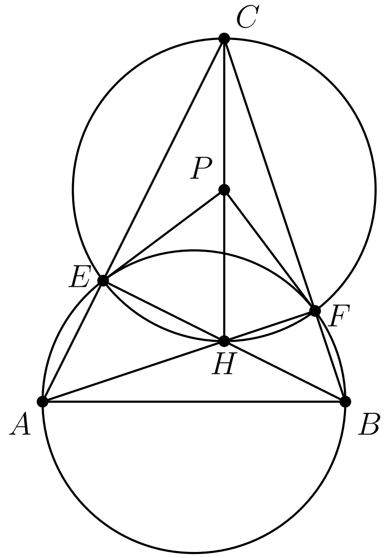
Soit ABC un triangle acutangle, et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe (AC) en E et recoupe (BC) en F. Les tangentes à $\mathcal{C}$, respectivement en E et en F, se recoupent en P. Montrer que $(PC)\perp(AB)$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Puisque $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, on sait que E et F sont les pieds des hauteurs de ABC respectivement issues de B et de A, de sorte que les droites (BE) et (AF) se coupent en l'orthocentre H du triangle ABC. De plus, $\widehat{EHF} = \widehat{BHA} = 180° - \widehat{HAB} - \widehat{ABH} = 180° - (90° - \widehat{FBA}) - (90° - \widehat{EAB}) = \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180° - \widehat{FCE}$, de sorte que les points E, H, F et C sont cocycliques. En outre, puisque $(FH)\perp(FC)$, on sait même que $[CH]$ est un diamètre du cercle circonscrit à $EHFC$.

De sucroà®t, puisque (PF) est tangente à $\mathcal{C}$ en F, on sait que $\widehat{AFP} = \widehat{ABF}$ ou, en d'autres termes, que $\widehat{HFP} = \widehat{ABC}$. On montre de même que $\widehat{PEH} = \widehat{CAB}$, de sorte que $\widehat{FPE} = 360° - \widehat{PEH} - \widehat{EHF} - \widehat{HFP} = 360° - 2(\widehat{CAB} + \widehat{ABC}) = 2\widehat{BCA} = 2\widehat{FCE}$. Soit alors O le centre du cercle circonscrit à $EHFC$: on vient de montrer que E, F, O et P sont cocycliques.

En outre, notons que Il s'ensuit que $\widehat{EFP} = \widehat{HFP} - \widehat{HFE} = \widehat{ABC} - \widehat{AFE} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = \widehat{ABC} - (90° - \widehat{EAB}) = \widehat{ABC} + \widehat{CAB} - 90°$. On montre de même que $\widehat{PEF} = \widehat{ABC} + \widehat{CAB} - 90°$, de sorte que PEF est isocèle en P. Puisque que E, F, O et P sont cocycliques, il s'ensuit que $P = O$. Or, puisque $[CH]$ est un diamètre du cercle circonscrit à $EHFC$, on sait que $P = O$ appartient à $[CH]$. C'est pourquoi $(PC)\|(CH)\perp(AB)$.



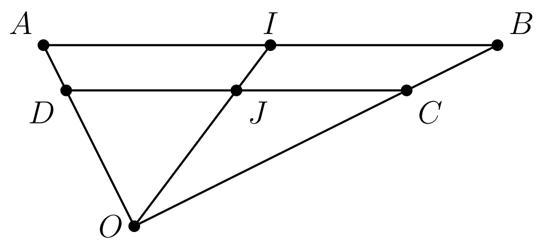
Exercice 5 (JBMO 2006 – Shortlist, Problème G1), *non traité en cours*

Soit $ABCD$ un trapèze, avec $(AB)\|(CD)$ et $\widehat{DAB}+\widehat{ABC}=90°$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Montrer que $2IJ=|AB-CD|$.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, notons que (AD) et (BC) ne peuvent pas être parallèles, car si tel était le cas, on aurait $\widehat{DAB}+\widehat{ABC}=180°$. Soit donc O le point d'intersection de (AD) et (BC). Alors O, I et J sont alignés. En outre, puisque $ABCD$ est convexe, on sait que O n'appartient pas au segment $[IJ]$.

De surcroà®t, $\widehat{COD}=\widehat{BOA}=180°-\widehat{DAB}-\widehat{ABC}=90°$, donc les triangles ABO et DCO sont rectangles en O. Il s'ensuit que $OI=AI=BI=\frac{AB}{2}$ et que $OJ=DJ=CJ=\frac{CD}{2}$, donc que $2IJ=2|OI-OJ|=|AB-CD|$.



Exercice 6 (JBMO 2000 – Shortlist, Problème G6), *traité en cours*

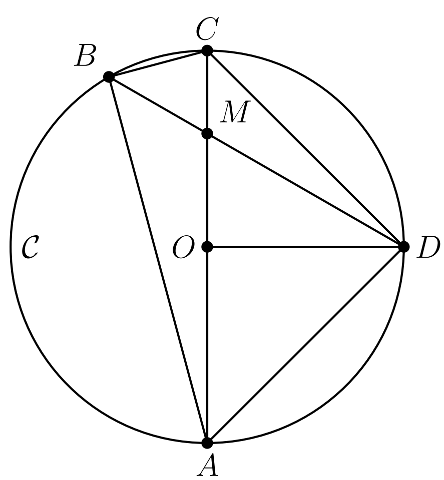
Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\widehat{DAB}=60°$, $\widehat{ABC}=90°$ et $\widehat{BCD}=120°$. Soit M le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Sachant que $BM=1$ et que $DM=2$, calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Solution de l'exercice 6

Puisque ABC est rectangle en B et puisque $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=180°$, le quadrilatère $ABCD$ est donc inscriptible, dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $[AC]$. Soit O le milieu de $[AC]$, c'est-à -dire le centre de $\mathcal{C}$, et soit R le rayon de $\mathcal{C}$. Par théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{DOB}=2\widehat{DAB}=120°$, et par théorème d'Al-Kashi, il vient $BD^2 = R^2(2 - 2\cos(\widehat{DOB}))$; puisque $\cos(\widehat{DOB}) = -1/2$, on en déduit que $9 = BD^2 = 3R^2$, donc que $R = \sqrt{3}$.

En outre, en utilisant la puissance du point M par rapport à $\mathcal{C}$, on obtient : $MA \cdot MC = MB \cdot MD = 2$, cependant que $MA + MC = 2R = 2\sqrt{3}$. Puisque $\widehat{BCD} > \widehat{DAB}$, on sait que $MA > MC$, d'où l'on déduit que $MA = \sqrt{3} + 1$ et $MC = \sqrt{3} - 1$. Il s'ensuit que $OM = OC - MC = 1$; puis, comme $OM^2 + OD^2 = 1+3 = 4 = MD^2$, on en déduit que le triangle MOD est rectangle en O, c'est-à -dire que $(AC) = (OM) \perp (OD)$.

On en déduit que l'aire du triangle ACD vaut R^2. De surcroà®t, puisque $MD = 2BM$, on obtient également que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}R^2$. L'aire du quadrilatère $ABCD$ vaut donc $\frac{3}{2}R^2 = \frac{9}{2}$.



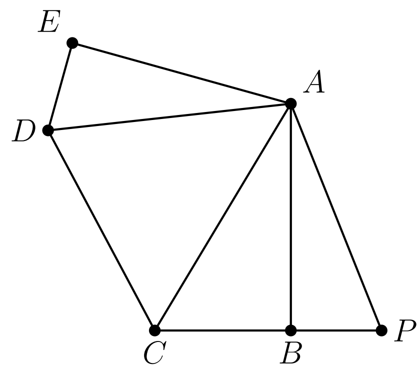
Exercice 7 (JBMO 1998 – Problème 2), *traité en cours*

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $AB = AE = CD = BC + DE = 1$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEA} = 90°$. Calculer l'aire de $ABCDE$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Soit P le point de la demi-droite $[DE)$ tel que $DP = 1$. Puisque $\widehat{AEP} = \widehat{ABC} = 90°$, que $AB = AE = 1$ et que $BC = 1 - DE = EP$, les triangles AEP et ABC sont directement isométriques. Il s'ensuit que $AP = AC$ et que les polygones $ABCDE$ et $ACDP$ ont même aire.

En outre, puisque $AP = AC$ et $CD = DP = 1$, la droite (AD) est in axe de symétrie de $ACDP$, de sorte que l'aire de $ACDP$ vaut 2 fois l'aire du triangle ADP. Enfin, le triangle ADP a pour base $PD = 1$ et pour hauteur $AE = 1$, de sorte que son aire vaut $\frac{1}{2}$, donc que l'aire de $ACDP$ et de $ABCDE$ vaut 1.



Exercice 8 (JBMO 2002 – Problème 2), *non traité en cours*

Soit $APBC$ un quadrilatère convexe inscriptible, tel que $AC = BC$. Soit D le pied de la hauteur issue de C dans le triangle PBC. Montrer que $PA+PB = 2PD$.

Solution de l'exercice 8

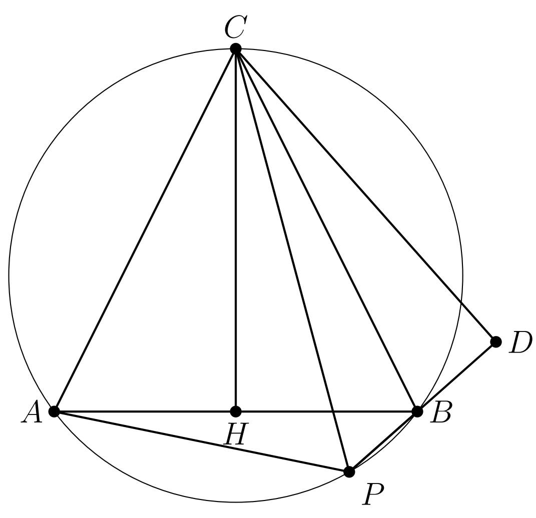
Soit H le milieu de $[AB]$. Puisque $APBC$ est inscriptible et que ABC est isocèle en C, on sait

— que $90° > \widehat{BAC} = \widehat{BPC}$, donc que D est sur la demi-droite $[PB)$ puis que $\widehat{DPC} = \widehat{BPC} = \widehat{BAC} = \widehat{HAC}$;

— que $\widehat{CHA} = 90° = \widehat{CDP}$;

— que $2PC \cdot AH = PC \cdot AB = BC \cdot PA + AC \cdot PB = AC(PA + PB)$, où l'égalité $PC \cdot AB = BC \cdot PA + AC \cdot PB$ est une conséquence de l'identité de Ptolémée [1].

Les deux premiers points indiquent que les triangles HAC et DPC sont directement isométriques. On en déduit que $PD \cdot AC = AH \cdot CP = \frac{1}{2}AC(PA + PB)$, d'où l'égalité $2PD = PA + PB$.



1. L'identité de Ptolémée indique qu'un quadrilatère convexe $UVWX$ est inscriptible si et seulement s'il satisfait l'égalité $UW \cdot VX = UV \cdot WX + XU \cdot VW$.

2 Mercredi après-midi et jeudi : Combinatoire

1 mercredi après-midi : Jean-Louis Tu

Combinatoire avancés : double comptage

Préliminaires de combinatoire. Nous rappelons quelques notions en les présentant sous forme d'exercices.

Exercice 1 Combien y a-t-il de manières de mélanger un jeu de 32 cartes ?

Solution de l'exercice 1 On a 32 choix pour la première carte, puis 31 pour la deuxième, etc. Au total, cela fait $32 \times 31 \times 30 \times \cdots \times 1 = 32!$ possibilités.

De manière plus générale, il y a $n!$ permutations sur un ensemble à n éléments.

Exercice 2 Le poker se joue avec 52 cartes. Au poker, un full consiste en 3 cartes d'une certaine valeur et 2 cartes d'une autre valeur. Combien y a-t-il de fulls possibles ?

Solution de l'exercice 2 On doit sélectionner 2 valeurs (ordonnées) parmi 13, ce qui donne 13×12 choix. Puis, choisir 3 cartes parmi 4 de la première valeur, et 2 cartes parmi 4 de la deuxième valeur.

Le nombre total de fulls est donc égal à $13\times12\times\binom{4}{3}\times\binom{4}{2} = 13\times12\times4\times6 = 3744$.

Notation. Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ le nombre d'éléments de X.

Principe pour compter de deux manières. Supposons que A et B sont deux ensembles finis, et que $\mathscr{R}$ est une relation entre les éléments de A et les éléments de B.

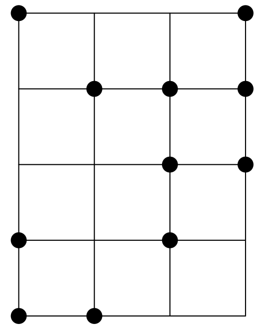
Soit X l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$, $b \in B$ et $a\mathscr{R}b$.

Pour tout $a \in A$, on note X_a l'ensemble des $b \in B$ tels que $a\mathscr{R}b$. De même, pour tout $b \in B$, on note X^b l'ensemble des $a \in A$ tels que $a\mathscr{R}b$. Alors on a

$$\sum_a |X_a| = \sum_b |X^b|.$$

Voici comment visualiser cette égalité. On forme un tableau, tel que chaque élément de A correspond à une ligne et chaque élément de B correspond à une colonne.

On met un point noir à l'intersection de la ligne a et de la colonne b si a et b sont en relation.



Alors $|X_a|$ est le nombre de points noirs dans la ligne a, $|X^b|$ est le nombre de points noirs dans la colonne b, et $\sum_a |X_a| = \sum_b |X^b|$ est le nombre total de points dans le tableau.

Exemple : soit A l'ensemble êtres humains, B l'ensemble des langues $\{$français, anglais$\}$. Chaque personne parle soit l'une des deux langues, soit les deux, soit aucune des deux.

Soit F le nombre de personnes parlant le français et E le nombre de personnes parlant l'anglais.

Pour toute personne a, soit n_a le nombre de langues parlées par a parmi le français et l'anglais.

Alors $\sum\limits_a n_a = F + E$.

Exercices.

Exercice 3 100 clients ont déjeuné dans un restaurant. Le menu comporte 30 plats. Chaque plat a été choisi en moyenne 10 fois. Combien de plats en moyenne chaque client a-t-il commandés ?

Solution de l'exercice 3 Soit X l'ensemble des couples (c, p) où c est un client et p est un plat qui a été mangé par c. On a $|X| = 300$, donc chaque client a commandé en moyenne 3 plats.

Exercice 4 Dans un comité de 360 personnes, chaque membre appartient à exactement trois sous-comités, et chaque sous-comité a exactement 6 membres. Déterminer le nombre de sous-comités.

Solution de l'exercice 4 Soit X l'ensemble des couples (m, s) où m est un membre et s un sous-comité. Notons k le nombre de sous-comités. On a $|X| = 6k = 3 \times 360$ donc $k = 180$.

Exercice 5 Un polyèdre possède 20 faces triangulaires. Combien possède-t-il d'arêtes ? De sommets ?

Solution de l'exercice 5 Soit X le nombre de couples (a, f) où a est une arête de f. On a $|X| = 20 \times 3 = 60$. D'autre part, comme une arête appartient à deux faces, on a $|X| = 2A$ où A est le nombre d'arêtes, donc $A = 30$.

Comme $S - A + F = 2$ où S est le nombre de sommets et F est le nombre de faces, on a $S = 12$.

Exercice 6 Un polyèdre possède 12 faces pentagonales. Combien possède-t-il d'arêtes ? De sommets ?

Solution de l'exercice 6 On a de même 30 arêtes et 20 sommets.

Exercice 7 Dans un établissement scolaire, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et chaque élève a exactement ℓ professeurs. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ.

Solution de l'exercice 7 Soit X le nombre de couples (e, p) où e est un élève de p. Alors on a $|X| = mk = n\ell$.

Exercice 8 Dans un établissement scolaire, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et chaque couple d'élèves distincts a exactement ℓ professeurs. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ.

Solution de l'exercice 8 Soit X le nombre de triplets (e_1, e_2, p) où e_1 et e_2 sont deux élèves différents qui ont p comme professeur. On a $|X| = mk(k-1) = n(n-1)\ell$.

Exercice 9 Un carré contient 1004 points, dont 4 sont sur les sommets, de sorte que 3 quelconques de ces points ne sont pas alignés. On trace des segments entre certains points de sorte que le carré est subdivisé en triangles.

Déterminer le nombre de triangles et le nombre d'arêtes.

Solution de l'exercice 9 Soit T le nombre de triangles. On compte de deux manières la somme s des angles des triangles. On a d'une part $s = 180T$. D'autre part, chaque sommet intérieur donne $360°$, tandis que les quatre sommets du carré donnent au total $360°$, donc $180T = 360 \times 1001$. On en déduit qu'il y a 2002 triangles.

Soit maintenant A le nombre d'arêtes. Il y a $A - 4$ arêtes intérieures.

Soit X le nombre de couples (a, t) où a est une arête de t. On a $|X| = 3T = 6006$. D'autre part, si a est une arête intérieure elle appartient à 2 triangles, sinon elle appartient à 1 triangle. On a donc $|X| = 2(A-4) + 4 = 2A - 4$, donc $A = 3005$.

Exercice 10 On note C_n^k le nombre de parties à k éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Solution de l'exercice 10 Soit X l'ensemble des couples (x, A) où x est un élément de A. Pour tout A, il y a k éléments x tels que (x, A) appartient à X, donc $|X| = kC_n^k$.

D'autre part, pour tout x, il y a C_{n-1}^{k-1} parties à k éléments qui contiennent x puisque pour constituer une telle partie on doit choisir $k-1$ éléments parmi l'ensemble des $n-1$ éléments différents de x.

On en déduit que $|X| = nC_{n-1}^{k-1}$.

Exercice 11 Une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est tirée au hasard. Quel est le nombre moyen de points fixes ?

Solution de l'exercice 11 Soit X l'ensemble des couples (x, σ) où x est un point fixe de la permutation σ. Pour tout x, il y a $(n-1)!$ permutations qui fixent x, donc $|X| = n \times (n-1)! = n!$.

D'autre part, on a $|X| = \sum_\sigma |Fix(\sigma)|$, donc le nombre moyen de points fixes est égal à 1.

Exercice 12 Deux cents candidats participent à une épreuve de mathématiques. Ils ont six problèmes à résoudre. Chaque problème a été résolu par moins de 80 participants. Montrer qu'il y a deux participants tels que chaque problème a été résolu par au maximum l'un d'entre eux.

Solution de l'exercice 12 Soit X l'ensemble des triplets (a, b, p) où a et b sont deux candidats différents qui ont résolu le problème p.

Comme chaque problème a été résolu par moins de 80 participants, on a $|X| \leqslant 6 \times 80 \times 79$.

D'autre part, supposons par l'absurde que pour tous a et b il y ait un problème résolu par a et b. Alors $|X| \geqslant 200 \times 199$, donc $200 \times 199 \leqslant 6 \times 80 \times 79$. Impossible.

Exercice 13 Dans une compétition, il y a a candidats et b juges. Chaque juge donne à chaque candidat la note "OK" ou "KO".

Soi k un entier tel que, étant donnés deux juges quelconques, leurs notes coïncident pour au plus k candidats. Montrer que $k \geqslant \frac{a}{2}\frac{b-2}{b-1}$.

Solution de l'exercice 13 Soit X le nombre de triplets (c, j, j') où c est un candidats qui a obtenu la même note des deux juges j et j'.

Comme il y a $b(b-1)$ couples de juges, on a $|X| \leqslant b(b-1)k$.

D'autre part, pour tout candidat c, soit x le nombre de juges qui lui donnent la note "OK". Il y a donc $b - x$ juges qui lui donnent la note "KO". Le nombre de couples (j, j') de juges qui attribuent la même note à c est égal à $x(x-1) + (b-x)(b-x-1) = 2(x^2-bx)+b^2-b = 2(x-\frac{b}{2})^2+\frac{b^2}{2}-b \geqslant \frac{b}{2}(b-2)$, donc $|X| \geqslant a\frac{b}{2}(b-2)$. Il vient $b(b-1)k \geqslant a\frac{b}{2}(b-2)$. On obtient le résultat en simplifiant par b et en divisant membre à membre par $b-1$.

2 jeudi matin : Margaret Bilu

Le principe des tiroirs

Exercices

Nous avons vu quelques exercices classiques utilisant le principe des tiroirs, puis d'autres exercices où le principe des tiroirs était moins apparent et où il fallait recourir à des versions plus complexes des idées utilisées plus haut. Nous avons conclu par un exemple surprenant d'utilisation du principe des tiroirs, le théorème d'Erdös-Szekeres.

Incontournables

Exercice 1 Je voulais peindre en rouge le placard qui fait à peu près $1\text{m} \times 2\text{m}$, mais voilà que mon chat arrive et renverse mon pot de peinture ! Le sol du placard, blanc à l'origine, devient rouge par endroits. Montrer qu'il y a deux points qui sont distants de 1m et qui ont la même couleur.

Exercice 2 Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques soit se connaissent, soit ne se connaissent pas. Montrer qu'on peut trouver parmi ces 6 personnes soit un groupe de trois personnes se connaissant mutuellement, soit un groupe de trois personnes ne se connaissant pas.

Exercice 3 On choisit 11 entiers dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints et non-vides de l'ensemble de ces 11 entiers dont la somme des éléments est la même.

Exercice 4 On se donne 7 droites dans le plan, deux quelconques d'entre elles n'étant jamais parallèles. Montrer qu'il en existe deux tel que l'angle qu'elles forment soit inférieur ou égal à $26°$.

Exercice 5 Il y a 25 élèves dans une classe. Parmi 3 quelconques d'entre eux, il y en a toujours au moins deux qui sont amis (la relation d'amitié étant réciproque). Montrer qu'il existe un élève ayant au moins 12 amis.

Le principe des tiroirs peut également être utile en arithmétique : les restes modulo un entier sont des tiroirs bien commodes !

Exercice 6

1. Montrer que parmi $n + 1$ entiers, il y en a toujours deux divisibles par n.
2. Montrer que dans tout ensemble de n entiers quelconques, on peut trouver un sous-ensemble non-vide dont la somme des éléments est divisible par n.

Variantes

Exercice 7 Soit n un nombre à 16 chiffres. Montrer qu'il existe une suite d'un ou plusieurs chiffres consécutifs de n dont le produit est un carré parfait.

Exercice 8 On munit le plan d'un repère orthonormé et on colorie chaque point du plan à coordonnées entières en rouge ou en bleu. Montrer qu'on peut trouver un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes et dont les quatre sommets sont des points à coordonnées entières de même couleur.

Parfois, on doit recourir à une version infinie du principe des tiroirs : si on range une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs, il y aura un tiroir qui contiendra une infinité d'objets.

Exercice 9 Chaque case d'un quadrillage 100×100 contient une flèche qui pointe vers le haut, vers le bas, vers la droite ou vers la gauche. Le quadrillage est entouré de murs infranchissables, à l'exception d'une ouverture au niveau du côté droit de la case située au coin supérieur droit. Une puce se promène sur le quadrillage de la manière suivante : lorsqu'elle se trouve sur une case, elle se déplace si possible d'une case dans la direction indiquée par la flèche contenue dans cette case. Ensuite la flèche en question tourne d'un angle de 90 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre. Si la puce ne peut pas faire de mouvement dans ces conditions, elle reste sur place temporairement mais la flèche tourne quand même. Est-il possible que la puce ne sorte jamais du quadrillage ?

Pour aller plus loin

Exercice 10 Un disque de rayon $n \geq 1$ contient $4n$ segments de longueur 1. Montrer que si on munit le plan d'un repère orthonormé, il existe une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées et intersectant au moins deux de ces segments.

Exercice 11 Les nombres 1 à 101 sont écrits dans le désordre au tableau. Montrer que l'on peut en effacer 90 de sorte que les 10 restants soient rangés ou bien par ordre croissant, ou bien par ordre décroissant.

Solutions

Solution de l'exercice 1 On considère un triangle équilatéral de côté 1 ayant ses trois sommets dans le placard. D'après le principe des tiroirs, deux des trois sommets ont la même couleur, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2 On représente les personnes par des points, et on relie deux points par un segment bleu si les personnes correspondantes se connaissent et par un segment rouge si elles ne se connaissent pas. Il suffit alors de montrer que nous avons ou bien un triangle bleu, ou bien un triangle rouge. Considérons un point P. Parmi les 5 segments partant de se points, par le principe des tiroirs au moins 3 sont de la même couleur. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'ils sont bleus. Soient Q_1, Q_2, Q_3 les points reliés par ces segments bleus à P. Si deux quelconques d'entre eux sont reliés également par un segment bleu, nous avons un triangle bleu. Dans le cas contraire, le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est rouge, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3 Notons A l'ensemble de nos 11 entiers. Il a $2^{11} - 2 = 2046$ sous-ensembles non-vides et différents de lui-même. D'autre part, la somme des éléments d'un sous-ensemble d'au plus 11 éléments de $\{1, 2, \dots, 100\}$ est inférieure ou égale à $90 + 91 + \ldots + 100 = \frac{1}{2}190 \times 11 = 1045$. Parmi les sous-ensembles de A, il en existe donc deux non-vides et distincts ayant la même somme. En particulier aucun des deux n'est inclus dans l'autre. Si on leur enlève les éléments qu'ils ont en commun, cela ne change pas la différence de leurs sommes et cela ne rend aucun des deux vide. Quitte à leur enlever des éléments, on peut donc supposer qu'ils sont disjoints, et ils répondent donc au problème.

Solution de l'exercice 4 On choisit un point A du plan, et pour chacune des 7 droites, on trace la droite qui lui est parallèle et qui passe par A. Ainsi, on ne change pas les angles entre les droites, et on voit que les droites forment 14 angles de sommet A et de somme $360°$. Il y en a donc au moins un inférieur ou égal à $\frac{360}{14} = \frac{180}{7} = 25 + \frac{5}{7} \leq 26$ degrés.

Solution de l'exercice 5 Si tout le monde est ami avec tout le monde, on a fini. On peut donc supposer qu'il existe deux élèves A et B qui ne sont pas amis. Alors d'après l'hypothèse chacun des 23 élèves restants est ami soit avec A, soit avec B (soit les deux). Par le principe des tiroirs, cela nous fait au moins 12 amis soit pour A, soit pour B.

Solution de l'exercice 6

1. Il y a n restes possibles modulo n, donc parmi les $n+1$ entiers, il y en a deux qui ont le même reste. Alors leur différence est divisible par n.

2. Soit $\{a_1, \ldots, a_n\}$ l'ensemble considéré. On pose $A_0 = 0$, et pour tout i, $A_i = a_1 + \ldots + a_i$. D'après la question précédente, parmi les $n+1$ entiers $A_0, \ldots, A_n$ il y en a deux dont la différence est divisible par n. Appelons les A_k et A_l, avec $k < l$. Alors $A_l - A_k = a_{k+1} + \ldots + a_l$ est divisible par n, et le sous-ensemble $\{a_{k+1}, \ldots, a_l\}$ convient.

   Remarque : en fait, nous avons montré plus précisément que dans toute suite d'entiers $a_1, \ldots, a_n$, il existe une sous-suite de termes consécutifs de somme divisible par n.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Nous allons adapter le raisonnement de l'exercice précédent en remplaçant les sommes par des produits. On note $c_1, \ldots, c_{16}$ les chiffres de n. Soit $x_0 = 1$ et pour tout i, $x_i = c_1 \ldots c_i$ le produit des i premiers chiffres de n. Les facteurs premiers possibles des chiffres de n sont $2, 3, 5, 7$, donc il existe des entiers p_i, q_i, r_i, s_i tels que $x_i = 2^{p_i} 3^{q_i} 5^{r_i} 7^{s_i}$. Chacun des entiers p_i, q_i, r_i, s_i est pair ou impair. Pour tout $i \in \{0, \ldots, 17\}$ y a $2^4 = 16$ possibilités pour la parité du quadruplet (p_i, q_i, r_i, s_i) donc d'après le principe des tiroirs, il existe $i < j$ tel que

$$p_j - p_i,\ q_j - q_i,\ r_j - r_i,\ s_j - s_i$$

soient tous divisibles par 2. Alors $\frac{x_j}{x_i} = c_{i+1} \ldots c_j$ est un carré parfait.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On considère neuf droites verticales, que l'on intersecte avec trois droites horizontales. Chacune des neuf droites verticales contient donc trois points d'intersection avec les droites horizontales, et nous ne considèrerons plus que ces points-là. Comme il existe $2^3 = 8$ coloriages possibles d'un triplet quelconque de points, d'après le principe des tiroirs il y a deux droites verticales dont les triplets de points sont coloriés de la même manière. Encore par le principe des tiroirs, dans un triplet de points coloriés avec deux couleurs, il y a deux points de même couleur. Le rectangle passant par les points de même couleur qui se correspondent sur les deux droites verticales sélectionnées est monochromatique.

Autre solution : on considère 5 droites horizontales, que l'on intersecte avec 5 droites verticales (d'équations $x = 1, 2, 3, 4, 5$), et on considère les 25 points d'intersection ainsi obtenus. Par le principe des tiroirs, sur chaque droite horizontale, il existe au moins 3 points d'une même couleur. On appelle dominante cette couleur-là. Ensuite, parmi les 5 droites verticales, encore par le principe des tiroirs, il y en a au moins 3 qui ont la même couleur dominante. Disons que cette couleur dominante est le vert. Prenons deux de ces droites. Sans perte de généralité, quitte a permuter les droites verticales, nous pouvons supposer que les points d'abscisses 1, 2 et 3 de la première droite sont verts. Comme la deuxième droite a 3 points verts au moins, elle en a un d'abscisse 1,2 ou 3. Si elle en a deux, on a terminé. Sinon, cela impose que les points verts de la deuxième droite soient d'abscisses 4 et 5. Mais exactement le même raisonnement s'applique également à la troisième droite de couleur dominante vert, ce qui nous crée un rectangle bordé par ces deux droites et les droites verticales d'équations $x = 4$ et $x = 5$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On raisonne par l'absurde en supposant que la puce ne sort pas du quadrillage. Alors elle se promène indéfiniment sur le quadrillage, et il y a donc au moins une case qu'elle visite une infinité de fois. Puisque le flèche tourne

entre deux visites consécutives, la puce passe également une infinité de fois dans toutes les cases voisines. Par le même raisonnement, elle visite une infinité de fois toutes les cases du quadrillage. Mais alors elle passe en particulier une infinité de fois dans la case dont le côté droit n'a pas de mur. Puisque la flèche de cette case tourne de 90 degrés entre deux passages de la puce, il existe un moment où la puce passe alors qu'elle pointe vers la droite, et cela veut dire que la puce sort du quadrillage, contradiction.

Solution de l'exercice 10 L'idée qu'on va utiliser est la suivante : si un point appartient aux projections de deux segments sur une droite, alors la droite perpendiculaire à cette dernière et passant par le point en question intersecte les deux segments. Il suffit donc de montrer que deux des segments ont des projections qui se chevauchent sur l'un des axes de coordonnées. On numérote les segments de 1 à $4n$, et pour chaque segment i, on note a_i la longueur de sa projection sur l'axe des abscisses et b_i celle de sa projection sur l'axe des ordonnées.

D'après le théorème de Pythagore, pour tout i $a_i^2 + b_i^2 = 1$, donc $(a_i + b_i)^2 = a_i^2 + b_i^2 + 2a_ib_i \geq 1$, d'où $a_i + b_i \geq 1$. Ainsi,

$$a_1 + \ldots + a_{4n} + b_1 + \ldots + b_{4n} \geq 4n.$$

Ainsi, quitte à faire une rotation, nous pouvons supposer que $a_1 + \ldots + a_{4n} \geq 2n$. De plus, tous les segments étant situés à l'intérieur du disque de rayon n, leurs projections se trouvent sur un segment de longueur $2n$. Il existe donc deux projections qui se chevauchent.

Solution de l'exercice 11 Notons $a_1, \ldots, a_{101}$ les nombres dans l'ordre dans lequel ils sont écrits. Pour tout i, on note x_i (respectivement y_i) la longueur de la plus longue sous-suite croissante (respectivement décroissante) de la suite $a_1, \ldots, a_{101}$ démarrant en a_i. Notre but est de montrer qu'il existe i tel que soit x_i ou y_i soit supérieur ou égal à 11. Dans le cas contraire, il y a au plus $10^2 < 101$ couples (x_i, y_i) possibles. Ainsi, il existe deux indices $k < l$ tels que $x_k = x_l$ et $y_k = y_l$. Mais cela est impossible : En effet, si $a_k < a_l$, alors toute sous-suite croissante démarrant en a_l donne une sous-suite croissante plus longue démarrant en a_k, donc $x_k > x_l$. De même, si $a_k > a_l$, alors $y_k > y_l$. Nous obtenons donc une contradiction.

Remarque : par le même raisonnement, on peut montrer plus généralement que dans toute suite de $mn + 1$ nombres distincts, on peut trouver une sous-suite croissante de longueur $m + 1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$. On appelle ce résultat le théorème d'Erdös et Szekeres.

3 jeudi après-midi : Pierre Bornsztein

Jeux et Stratégies.

Exercice 1 (Fort-Boyard).

On dispose de 21 allumettes. Chacun à son tour, l'un des deux joueurs prend $1, 2$ ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette gagne.
Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Solution.

Le premier joueur prend une seule allumette à son premier coup. Puis, à chaque coup suivant, si son adversaire vient de prendre a allumettes, il en choisit alors $4 - a$. Ainsi, après chacun de ses coups, le nombre d'allumettes prises augmente de 4. En particulier, le premier joueur prendra la $21^{ième}$, et gagne ainsi la partie.

C'est un exemple de stratégie basée sur le principe "si tu peux jouer, alors je pourrai jouer après toi". Dans un jeu qui doit nécessairement s'arrêter, un joueur qui possède une telle stratégie est alors sûr de gagner, puisqu'il ne sera pas le premier à être bloqué...
La difficulté est de trouver la façon adéquate de jouer : si l'exemple est ici assez simple, il peut ne pas paraître évident tout de suite qu'une bonne façon de jouer est de compléter à 4 ce qu'a fait son adversaire au coup précédent...
Nous verrons ci-dessous une autre façon d'analyser la situation, qui rendra la solution trouvée plus naturelle.

Exercice 2.

On dispose d'un jeu complet de dominos. Deux joueurs jouent, chacun à son tour, selon la règle suivante : Le joueur choisit un domino parmi ceux non encore utilisés, et le place à l'une des extrémités de la chaîne déjà formée, de sorte que deux dominos adjacents aient toujours les mêmes numéros marqués sur leurs cases adjacentes.
Le premier qui ne peut jouer perd.
Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Solution.

On peut trouver une stratégie du même type pour le premier joueur, mais un peu plus subtile :
Le premier joueur choisit le domino $(0, 0)$. Alors, le second joueur est obligé de choisir un domino $(0, a)$ (qu'il peut évidemment placer en $(a, 0)$) avec $a \neq 0$. Le premier joueur choisit alors le domino (a, a). Dans cette situation, on constate que l'on a la propriété suivante :
pour tout entier k, le domino $(0, k)$ est encore disponible si et seulement si le domino (a, k) est encore disponible. De plus, le second joueur ne peut choisir un double.
Donc, à partir de maintenant, si le second joueur choisit un domino, il est forcément de la forme $(0, k)$ ou (a, k) et le premier peut alors choisir à son tour suivant celui de ces dominos qui reste disponible, et le mettre à la suite du domino du second joueur. Ce faisant, le second joueur se retrouve dans une situation où la propriété ci-dessus est à nouveau vraie. En procédant ainsi, le premier joueur est sûr de ne pas être le premier bloqué et donc de gagner la partie

Exercice 3.

a) Sur un tableau 2012×2012 formé exclusivement de cases blanches, Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice commence par noircir la case en haut à gauche. Bob doit alors noircir une case non encore noircie et adjacente (i.e. ayant un côté commun) à celle que vient de noircir Alice. Puis c'est au tour d'Alice de jouer, et de noircir une case blanche adjacente à la case précédemment noircie par Bob, et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.
Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.
b) Et s'ils jouaient sur un tableau 2011×2011 ?

Solution.

a) Là encore, on peut trouver une stratégie de ce type, mais pour le second joueur. Celui-ci doit imaginer que le tableau est pavé par des dominos, ce qui possible puisqu'il y a un nombre pair de cases. Un tel pavage étant fixé une fois pour toutes, la stratégie de Bob est alors très simple : il "complète" à chaque fois le domino que vient juste de commencer à colorier Alice. Ainsi, à son premier coup, il colorie la case qui forme un domino avec la case en haut à gauche. Alice est alors obligée de noircir une case d'un domino non encore utilisé, ce qui laisse à Bob la possibilité de compléter à nouveau le domino à son prochain coup. À chacun de ses coups, Alice est alors obligée "d'ouvrir" un domino, pour autant qu'elle puisse jouer, et laisse à Bob la possibilité de jouer en le complétant.
S'il adopte cette stratégie, c'est donc Alice qui va être bloquée la première, et Bob qui va gagner la partie.
b) Cette fois, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante : c'est exactement la même qu'au a), mais en ne considérant que le pavage du tableau dont on a éliminé la case en haut à gauche (il est facile de vérifier qu'une fois cette case éliminée, un tel pavage existe puisque $2011 - 1 = 2010$ est pair).

Remarque.
On aura évidemment observé que les valeurs 2012 ou 2011 sont anecdotiques, dans le sens où seule la parité du nombre choisi est importante.

Nous allons maintenant nous intéresser à une deuxième approche : l'analyse des positions gagnantes, le plus souvent à partir de ce qui est supposé être la fin du jeu (on parle alors d'*analyse rétrograde*). Une position est dite *gagnante* lorsque le joueur qui doit jouer à partir de cette position est sûr de gagner (en jouant au mieux évidemment). Si le jeu doit nécessairement se terminer avec la victoire de l'un ou de l'autre, les positions qui ne sont pas gagnantes sont alors *perdantes*.

Revenons sur l'exercice 1 :
Les positions $1, 2, 3$ sont évidemment gagnantes puisque le joueur à qui c'est le tour peut prendre toutes les allumettes d'un seul coup. Mais la position 4 est perdante car le joueur qui doit jouer est obligé de laisser $1, 2$ ou 3 allumettes et donne ainsi une position gagnante à son adversaire. Du coup, les positions $5, 6, 7$ sont gagnantes puisque le joueur concerné peut ne laisser que 4 allumettes et donne ainsi une position perdante. On en déduit que la position 8 est perdante.

Et ainsi de suite, on prouve que les positions perdantes sont exactement les multiples de 4. En y regardant de plus près, on constate que cela correspond à la stratégie décrite initialement.

Exercice 4.

Partant de 0, Alice et Bob ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne.
Qui a une stratégie gagnante ?

Solution.

C'est Alice, qui commence, qui a une stratégie gagnante.
Pour le prouver, on va étudier les positions (i.e. les quantités obtenues) gagnantes de ce jeu :
Clairement, 100 est perdante (le jeu vient de se terminer par la victoire de l'adversaire...). Et donc, les quantités $90, 91, ..., 99$ sont gagnantes (un joueur qui part d'une telle quantité gagne à son prochain coup). Par suite, 89 est perdante, puisque le joueur qui doit alors jouer laissera une quantité égale à l'un des nombres $90, 91, ..., 99$.
Comme ci-dessus, on en déduit que $79, 80, ..., 88$ sont gagnantes. Puis, que 78 est perdante. Et ainsi de suite, on vérifie facilement que les positions perdantes sont de 11 en 11, à savoir $100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1$.
Puisque 1 est perdante, Alice commence par choisir 1, laisse donc une position perdante à Bob, et assure alors sa victoire en pouvant rester à chaque coup sur des positions gagnantes.

Généralisation.
Si l'on joue avec les entiers de 1 à n, et qu'à chaque coup on ajoute un nombre entre 1 et p, le raisonnement ci-dessus s'adapte en tout point pour montrer que les positions perdantes sont tous les entiers de la forme $n - k(p+1)$. Si $n = q(p+1) + r$ est la division euclidienne de n par $p+1$, alors $r \in \{0, ..., p\}$ et les positions perdantes sont les entiers de la forme $(q-k)(p+1)+r$, avec $0 \leq k \leq q$.
En particulier :
- Si $r = 0$, la position perdante la plus proche du départ (hormis 0) est $p+1$. Le premier joueur ne peut l'atteindre à son premier coup, et quel que soit ce premier coup, le second joueur, lui, pourra s'y placer. C'est donc le second joueur qui a une stratégie gagnante.
- Si $r \neq 0$, le premier joueur peut alors se placer en r à son premier coup et assurer sa victoire comme ci-dessus.

Exercice 5.

On place un jeton sur la case $C1$ d'un échiquier classique. Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une, soit vers la droite, soit vers le haut soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en $H8$ gagne.

Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Solution.

Si le jeton est au départ en $C1$, c'est le premier joueur qui possède une stratégie gagnante.
En fait, pour toute case de départ, via une analyse des positions, on peut déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante : la case $H8$ est perdante puisque le joueur qui doit jouer alors que le jeton est dans cette case vient juste de perdre... Du coup, toutes les cases de la ligne n°8 ou de la colonne H ou de la diagonale $A1-H8$ sont des positions gagnantes. Mais alors, les positions $F7$ et $G6$ sont perdantes puisqu'un joueur qui doit jouer à partir d'une telle case met forcément le jeton sur une des cases gagnantes ci-dessus. On en déduit que toutes les cases non encore déterminées dans les colonnes, lignes ou diagonales respectives de ces deux cases sont gagnantes. Comme ci-dessus, cela entraine que les cases $C5$ et $E3$ sont perdantes. De même, les cases non encore déterminées dans les lignes, colonnes ou diagonales respectives de ces deux cases sont alors gagnantes. Par suite, les cases $A4$ et $D1$ sont perdantes, et les autres sont gagnantes.
En particulier, la case $C1$ est gagnante. Donc, le premier joueur possède une stratégie gagnante, décrite ci-dessus : son premier coup consiste à amener le jeton en $D1$ (ou $C5$) qui est perdante puis, selon le coup du second joueur à amener à chaque fois le jeton dans des positions perdantes.

Exercice 6.

Sur la table se trouvent 1999 jetons. Tour à tour, Albert et Barbara doivent enlever au moins un jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Albert qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Solution.

C'est Albert qui possède une stratégie gagnante. Analysons les positions :
Clairement, 1 est gagnante (puisque le joueur qui doit jouer vient de gagner la partie...), et 2 est perdante car celui qui doit jouer est obligé de laisser un seul jeton et perd la partie. On en déduit que 3 et 4 sont gagnantes (le joueur peut laisser 2 jetons et donne ainsi une position perdante à son adversaire). Du coup, 5 est perdante car le joueur doit alors laisser 3 ou 4 jetons, et donne alors une position gagnante à son adversaire. Cela entraine que $6, 7, 8, 9, 10$ sont gagnantes (le joueur laisse alors 5, qui est perdante), mais que 11 est perdante (le joueur est obligé de laisser $6, 7, 8, 9$ ou 10 qui sont gagnantes).
Afin d'éviter de tout faire à la main, il est judicieux de prendre un peu de hauteur. Pour cela, on constate que si k est perdante alors $k+1, k+2, ..., 2k$ sont gagnantes (le joueur laisse alors k, dont on vient de dire qu'elle était supposée perdante), et $2k+1$ est perdante (le joueur est obligé de laisser $k+1, k+2, ..., 2k-1$ ou $2k$, qui sont gagnantes). Cela permet de déterminer les positions perdantes (et

les positions gagnantes) de proche en proche, mais plus rapidement... Ainsi, les positions perdantes sont
$2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071, ...$
Et donc, 1999 est gagnante, ce qui conclut.

Remarque.
De façon plus générale, à l'aide de ce que l'on vient de faire, on peut prouver que les positions perdantes sont les nombres de la forme $3 \times 2^n - 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

Exercice 7.

Alice et Bob jouent aux échecs, mais en ayant le droit d'enchaîner deux coups par tour. C'est Alice qui commence. Prouver qu'elle peut s'assurer de ne pas perdre.

Solution.

Qu'Alice soit assurée de ne pas perdre, c'est dire que Bob ne possède pas de stratégie gagnante.
Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.
Alors Alice commence par déplacer son cavalier de $B1$ en $A3$ et retour. C'est donc Bob qui doit jouer, comme s'il était le premier joueur. Or, puisque le second joueur possède une stratégie gagnante, Alice peut l'utiliser et donc s'assurer de battre Bob. Ainsi, Bob possède une stratégie gagnante mais est sûr de perdre. Contradiction.
Donc, Bob n'a pas de stratégie gagnante, ce qui assure qu'Alice est sûre de pouvoir éviter de perdre.

Remarques.
Attention, qu'Alice soit sûre de ne pas perdre ne signifie pas qu'elle soit sûre de gagner, car il pourrait y avoir partie nulle... De plus, nous n'avons finalement pas décrit de stratégie adéquate pour Alice.
Cela dit, l'exemple ci-dessus est un exemple de ce que l'on peut appeler un "vol de stratégie" : afin de prouver qu'un joueur ne possède pas de stratégie gagnante, on suppose (par l'absurde) qu'il en a une et on prouve que l'autre joueur peut l'utiliser à son tour (i.e. la lui voler), d'où la contradiction.
Pour que tout fonctionne au mieux, et que l'on soit assuré que l'un des joueurs ait effectivement une stratégie gagnante (là, on a juste prouvé qu'un joueur n'en avait pas, ce qui n'est pas du tout pareil), il serait idéal que l'on soit sûr que le jeu se finisse, jamais sur une partie nulle, et qu'il soit possible de prouver que, pour un tel jeu, l'un des deux joueurs possède toujours une stratégie gagnante (du coup, si on a éliminé une possibilité, c'est donc que l'autre joueur possède la stratégie désirée). Et justement, c'est exactement ce que dit le théorème suivant, dû à Zermelo :

Théorème (Zermelo)

Dans un jeu fini à deux joueurs, à information parfaite et n'ayant que deux issues possibles (à savoir la victoire du joueur n°1 ou la victoire du joueur n°2), l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Quelques précisions : dire que le *jeu est fini* signifie que l'arbre de toutes les positions possibles, aussi gigantesque soit-il, est tout de même fini, et dire qu'il est *à information parfaite* signifie que l'on exclut toute intervention du hasard (ainsi, on ne parle pas ici de la plupart des jeux de dés, par exemple).
Pour ceux qui voudraient en savoir plus et, en particulier, lire la démonstration de ce théorème, que nous n'allons pas faire ici, peuvent se reporter à l'adresse suivante :
http ://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/jeux/strategies.pdf
Disons juste, qu'en gros, il s'agit de remonter l'arbre de toutes les positions possibles du jeu, à partir des feuilles (les situations finales) pour remonter à la racine (la position de départ) en controlant à chaque étape lequel des deux joueurs est en position gagnante. C'est, en plus raffiné, ce que nous avons fait dans les exercices précédents.

On constate que le type d'approche ci-dessus est "non constructive" dans la mesure où l'on ne décrit pas ce que serait alors une stratégie gagnante. Il peut alors être un peu difficile d'accepter l'idée que l'on sache qu'un joueur donné ait une stratégie gagnante sans pour autant être capable d'en expliciter une...
Et pourtant, c'est bien ce que l'on va voir dans les exercices ci-dessous :

Exercice 8.

On inscrit $n = 2$ sur un tableau. A tour de rôle, Alice (la première) et Bob ajoutent un diviseur d du nombre n qui est inscrit au moment où ils jouent, avec $0 < d < n$ (et laissent donc $n + d$).
(a) Le premier joueur qui fait dépasser 2011^{2012} perd. Qui a une stratégie gagnante ?
(b) Le premier joueur qui fait dépasser 2012^{2011} perd. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution.
a) Bon, là, on peut encore s'en sortir facilement. En effet, Alice peut décider d'ajouter 1 à chaque tour. Ce faisant, il est facile de vérifier qu'elle laisse un nombre impair à Bob, qui est donc obligé de choisir un nombre d impair et de laisser alors un nombre pair. Quel que soit ce nombre pair, soit Bob vient de perdre (et donc le premier vient de gagner) soit il vient de laisser un nombre qui est strictement inférieur à 2011^{2012} (qui est impair !). Ainsi, en ajoutant à nouveau 1, Alice ne dépasse toujours pas 2011^{2012} et laisse encore un nombre impair à Bob.
On retrouve une stratégie du type "si tu peux jouer, alors moi aussi", qui assure que ce n'est pas Alice qui va être bloquée la première. Or, il est clair que le jeu se finira après un nombre fini de coups (pas plus de $2011^{2012} - 1$ coups) et que l'un des deux joueurs finira par gagner.

Ainsi, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante, et celle-ci est particulièrement simple à mettre en oeuvre...

b) En fait, quel que soit le nombre $N \geq 6$ que l'on ne doit pas dépasser, c'est toujours Alice qui possède une stratégie gagnante. Evidemment, si N est impair, la stratégie du a) fonctionne parfaitement. Par contre, dans le cas où N est pair, si Alice décide de jouer de cette façon, il est facile pour Bob de faire de même et de gagner, ce qui montre que la façon de jouer d'Alice est alors une stratégie...perdante ! Alice va donc devoir trouver autre chose. Mais le théorème de Zermelo lui dit qu'elle a bien raison d'y croire : en effet, comme on l'a signalé cidessus, le jeu est clairement fini, sans partie nulle et à information parfaite, donc l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.
Lors de son premier tour, Alice est obligée de laisser $n = 3$ (elle ne peut choisir que $d = 1$). Du coup, Bob est obligé de choisir $d = 1$ et laisse $n = 4$. Á partir de là, deux options sont possibles pour Alice : laisser $n = 5$ ou $n = 6$.
Mais, puisque Bob possède une stratégie gagnante, c'est donc que si Alice laisse $n = 5$, Bob qui est alors obligé de laisser $n = 6$ va gagner. Cela assure que le joueur qui laisse $n = 6$ gagne. Dans ces conditions, Alice peut choisir de directement laisser $n = 6$ puis, en utilisant la stratégie de Bob, gagner la partie. Cela contredit donc que Bob possède une stratégie gagnante.

Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante, et le théorème de Zermelo assure que c'est donc Alice qui en possède une. Par contre, à la différence du a), sauf à étudier toutes les parties possibles, il paraît difficile de donner une description simple d'une telle stratégie...

Exercice 9.

Une plaquette de chocolat est un rectangle de $m \times n$ carrés-unité. Seul le carré en bas à gauche est empoisonné. A tour de rôle, Achille, en premier, et Béatrice découpe la plaquette selon la règle suivante : on choisit un carré c et prend tout le rectangle dont c est le coin inférieur gauche (il se peut que certains des carrés de ce rectangle aient déjà été pris auparavant). Evidemment, celui des deux qui prend le carré empoisonné perd.
Quel est celui qui a une stratégie gagnante ?

Solution.

Il est évident que si $m = n = 1$, le premier joueur va perdre... On suppose donc que $m \geq 2$ ou $n \geq 2$.

Clairement, nous sommes face à un jeu pour lequel le théorème de Zermelo s'applique. L'un des deux joueurs possède donc une stratégie gagnante.
Par l'absurde : supposons que ce soit Béatrice.
Si Achille choisit le carré situé en haut et à gauche, il laisse la plaque quasi entière à Béatrice qui, à partir de cette position, possède une stratégie qui va lui assurer

la victoire. En particulier, selon cette stratégie, Béatrice va choisir un carré c et découper le "rectangle" correspondant. On note qu'à ce rectangle il manque en fait exactement le carré choisi par Achille pour être complet. Mais alors, Achille pourrait dès le départ choisir le carré c et découper le rectangle tout entier, et laisser ainsi Béatrice dans la position exacte dans laquelle lui-même se trouvait selon sa première option. Il n'a alors plus qu'à suivre la stratégie gagnante de Béatrice pour gagner lui-même, privant ainsi celle-ci de la victoire qu'elle était assurée d'obtenir, ce qui est absurde.
Ainsi, Béatrice n'a pas de stratégie gagnante, et c'est donc Achille qui en possède une.

Remarque.
Ce jeu est connu sous le nom de *Chomp* et a été inventé par le mathématicien David Gale. Sauf dans certain cas très simples (par exemple, si $m = 1$ auquel cas le premier joueur ne laisse directement que le carré empoisonné), on ne connaît pas de description d'une stratégie gagnante sans recours à un ordinateur afin d'analyser toutes les positions possibles.

Exercice 10.

Soit $n > 0$ un entier. A tour de rôle, Alice et Bob écrivent au tableau un entier strictement positif et ne dépassant pas n. Aucun nombre n'est effacé, et il est interdit d'écrire un nombre qui divise un nombre déjà écrit au tableau. C'est Alice qui commence et le premier qui ne peut plus jouer perd la partie. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution.

C'est Alice qui posède une stratégie gagnante. Le raisonnement est très proche de celui de l'exercice précédent.
D'après le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs possède une telle stratégie. Par l'absurde : supposons que ce soit Bob.
Si Alice écrivait 1, Bob écrirait alors un certain nombre k de façon à suivre sa stratégie et à assurer sa victoire. Mais alors, Alice peut directement écrire k, ce qui interdit à chacun des deux joueurs d'écrire ultérieurement 1, et laisse donc Alice dans la situation exacte où était Bob lorsqu'il suivait sa stratégie. En suivant cette même stratégie, Alice a donc assurer sa victoire, en contradiction avec notre hypothèse.
Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante et, selon ce qui a été dit au départ, c'est donc qu'Alice en a une.

VI. Vendredi : Test final

4 Enoncé

Instructions

- Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.
- Toute affirmation doit être soigneusement justifiée. Travaillez d ?abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des re ?sultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercices débutants

Exercice 1 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 2 Soit ABC un triangle équilatéral, Γ son cercle circonscrit et M un point sur l'arc BC ne contenant pas A. Soit N le point de (BM) sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B tel que $NM = NC$.
a) Montrer que MNC est équilatéral.
b) Montrer que $AM = BM + CM$.

Exercices communs

Exercice 3 Soit $AFBDCE$ un hexagone convexe inscriptible (c'est-à-dire dont les sommets sont sur un même cercle) tel que

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}, \quad \widehat{CBE} = \widehat{EBA} \quad \text{et} \quad \widehat{ACF} = \widehat{FCB}.$$

Montrer que les droites (AD) et (EF) sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Exercice 4 Un club de jeux de société compte 50 membres et organise des soirées jeux. Au cours de l'année, deux membres quelconques se sont rencontrés lors d'exactement une soirée jeux, et aucune soirée jeux n'a regroupé tous les membres du club. Montrer qu'il existe un membre qui a participé à au moins 8 soirées jeux.

Exercices avancés

Exercice 5 Soient Γ et ω deux cercles tangents intérieurement en T, avec ω à l'intérieur de Γ. Soient A et B sur Γ tels que $[AB]$ est tangent au cercle ω en un point K. Montrer que $\widehat{ATK} = \widehat{BTK}$.

Exercice 6 1) Anna et Bob jouent au jeu suivant : c'est Anna qui commence et, à tour de rôle, ils mettent chacun une croix dans les cases d'un tableau carré 2013×2013. Celui qui met la troisième croix dans un carré 2×2 a perdu. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

2) Qu'en est-il s'ils jouent avec un tableau 2014×2014 ?

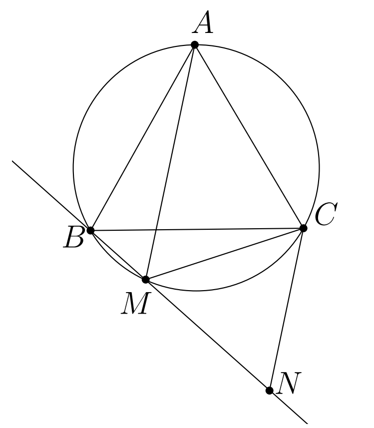
5 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On raisonne par récurrence. Soit $P(n)$ la proposition à démontrer.
$P(2)$ équivaut à $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$, ce qui est vrai.
Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 1 - \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \frac{-(n+1)+1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \frac{-n}{n(n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

ce qui démontre $P(n+1)$.
Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



a) On a $\widehat{NMC} = 180° - \widehat{CMB} = \widehat{BAC}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Or, $\widehat{BAC} = 60°$ car ABC est équilatéral, donc $\widehat{NMC} = 60°$.

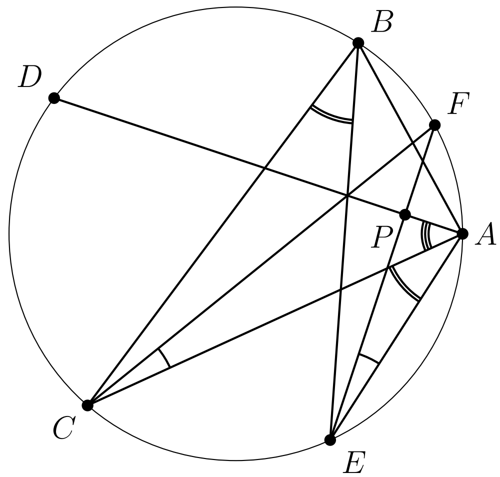
De plus, $MN = MC$ donc les deux angles $\widehat{CNM}$ et $\widehat{MCN}$ sont égaux. Comme leur somme vaut $180° - \widehat{NMC} = 120°$, on en déduit que $\widehat{CNM} = \widehat{MCN} = 60°$, ce qui montre que MNC est équilatéral.

b) La rotation de centre C et d'angle $60°$ envoie A sur B et M sur N, puisque ABC et CMN sont des triangles équilatéraux. Elle envoie donc le segment $[AM]$ sur le segment $[BN]$. Comme une rotation conserve les longueurs, on en déduit que $AM = BN = BM + MN = BM + MC$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit P le point d'intersection de (AD) et (EF). Alors

$$\begin{aligned}
\widehat{DPE} &= 180° - \widehat{PED} - \widehat{EDP} \\
&= 180° - (\widehat{FEB} + \widehat{BED}) - \widehat{EDA} \\
&= 180° - (\widehat{FCB} + \widehat{BAD}) - \widehat{EBA} \\
&= 180° - (\frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}) - \frac{1}{2}\widehat{CBA} \\
&= 180° - \frac{1}{2}(\widehat{ACB} + \widehat{BAC} + \widehat{CBA}) \\
&= 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° \\
&= 90°,
\end{aligned}$$

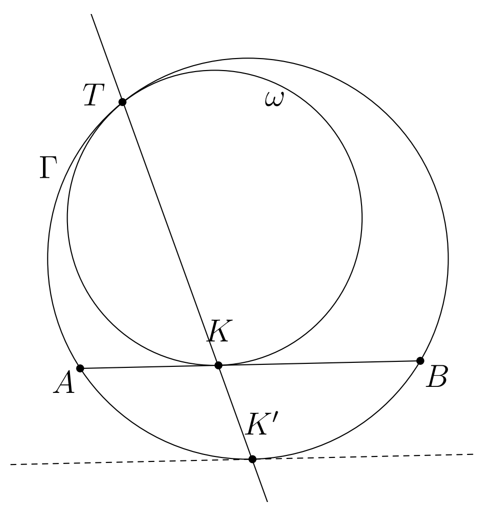
ce qui signifie exactement que $(AD)\perp(EF)$.



Remarque : il est facile de montrer que D, E, F sont les milieux des arcs BC, CA et AB.

Solution de l'exercice 4 On raisonne par l'absurde. Soit A un membre quelconque du club. Il a participé à au plus 7 soirées jeux. D'après le principe des tiroirs, parmi les 49 autres, il y en a 7 qui ont participé à l'une de ces soirées jeux. Cela nous fait donc une soirée jeux S avec au moins 8 participants (dont A). Soit B une personne n'ayant pas participé à cette soirée (elle existe d'après l'énoncé). Montrons qu'il a participé à des soirées différentes avec les participants de S. En effet, deux participants quelconques de S n'ont, par hypothèse, pas participé à une autre soirée jeux simultanément. Or B a rencontré chacun d'eux lors d'une soirée jeux, donc il a participé à au moins 8 soirées jeux, contradiction.

Solution de l'exercice 5



Comme les deux cercles sont tangents intérieurement en T, il existe une homothétie h de centre T et de rapport > 1 telle que $h(\omega) = \Gamma$.
Soit $K' = h(K)$. Alors K' appartient à $h(\Gamma) = \omega$. De plus, comme (AB) est tangente en K à ω, $h(AB)$ est tangente en K' à Γ. D'autre part, $h(AB)$ est parallèle à (AB), donc la tangente en K' à Γ est parallèle à (AB). Ceci montre que K' est le milieu d'un des arcs délimités par A et B. De plus, comme h est une homothétie de

rapport strictement positif, K' ne peut pas être sur l'arc contenant T, donc (TK') est la bissectrice de l'angle $\widehat{ATB}$. On en déduit que

$$\widehat{ATK} = \widehat{ATK'} = \widehat{BTK'} = \widehat{BTK}.$$

Solution de l'exercice 6 De façon générale, pour un tableau $n \times n$:
- Lorsque n est impair, c'est Anna qui possède une stratégie gagnante :
Il lui suffit de jouer son premier coup dans la case centrale, puis de répondre à chaque coup de Bob par symétrie par rapport à cette case centrale. Comme n'importe quelle case et sa symétrique par rapport à la case centrale ne sont jamais dans un même carré 2×2, Anna s'est ainsi trouvé une stratégie du type "si tu peux jouer alors moi aussi", ce qui conclut.

- Lorsque n est pair, c'est Bob qui possède une stratégie gagnante :
Il lui suffit de jouer symétriquement à ce que joue Anna par rapport au centre Ω du tableau carré. L'argument précédent s'applique alors sauf pour le carré 2×2 central (i.e. dont le centre est aussi Ω), car alors un coup et son symétrique appartiennent à un même carré 2×2. Mais, on note alors que ce carré central est justement invariant par la symétrie centrale de centre Ω.
Par l'absurde : si Bob devait perdre en jouant un coup dans ce carré, c'est qu'il s'agirait de la troisième croix contenue dans ce carré. D'après la stratégie de Bob, c'est donc que la seconde provenait du coup précédent d'Anna et est inscrite dans la case symétrique à celle qui vient de faire perdre Bob. Mais alors la première n'a pu être jouée ni par Anna, ni par Bob car alors sa symétrique par rapport à Ω aurait également été utilisée et il y aurait alors déjà trois croix dans le carré avant le dernier coup de Bob. Contradiction.
Ainsi, cette stratégie est bien une stratégie gagnante pour Bob.

VII. Conférences

1 Animath et les Olympiades de Mathématiques

La traditionnelle présentation d'Animath et des Olympiades Internationales, créées en 1959, qui réunissent aujourd'hui une centaine de pays. Chaque pays envoie ses six meilleurs lycéens, qui composent deux fois quatre heures et demi sur deux fois trois problèmes. Les Olympiades Balkaniques Junior, elles, durent une seule journée, quatre problèmes en quatre heures. Pendant longtemps, la France n'organisait aucune préparation aux Olympiades Internationales, et Animath a été créée notamment pour remédier à cela. Outre les stages d'août (Montpellier) et de toussaint (Cachan), elle assure une préparation par correspondance sur toute l'année - six problèmes par mois à résoudre chez soi et à renvoyer -, pour une centaine de lycéens et collégiens sélectionnés par le test de l'Olympiade Française de Mathématiques (1er Octobre 2014), que la plupart des stagiaires ont passé - près de la moitié ont été admis. L'Olympiade Française de Mathématiques organise en outre des tests en temps limité, dans les établissements scolaires, ainsi qu'un stage du 16 au 21 février 2015. Un mot également des olympiades académiques de première et de quatrième.

2 Conférence de François Lo Jacomo

Les nombres irrationnels

Une rapide présentation des nombres irrationnels, notamment $\sqrt{2}$. La conférence démontre l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ainsi que de e définie comme somme des inverses des factorielles. Puis, une petite digression concernant $\sqrt{2}$ pour expliquer à quoi correspondent mathématiquement les différents formats de papier A0, A1, ... A4. Enfin, la question de l'approximation d'un nombre irrationnel par des rationnels, dans le cas de $\sqrt{2}$, en donnant l'algorithme : $\frac{p}{q} \to \frac{p+2q}{p+q}$ permettant de construire, à partir de $\frac{1}{1}$, les meilleures approximations rationnelles de $\sqrt{2}$.