STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2011

Du 24 octobre au 28 octobre 2011

Avant-propos

Ce stage olympique a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler des collégiens et lycéens de seconde passionnés par les mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de les préparer aux Olympiades internationales de mathématiques.

Nous tenons à remercier le foyer de Cachan pour son excellent accueil, ainsi que les trois conférenciers qui nous ont fait l'honneur de venir faire un exposé.

Les Animatheux

Pierre Bertin   Raphaël Beuzart   Pierre Bornsztein

Noé de Rancourt   Igor Kortchemski   François Lo-Jacomo

Irène Marcovici   Antoine Taveneaux

Les Élèves

Julien Alamelle	Augustin Bariant	Sébastien Baumert	Marine Bonora
Solange Boucheron	Félix Breton	Vincent Chapuis	Louis Charnavel
Maxence Chauvin-Hameau	Colin Davalo	Charles Gassot	Clément Grzelak
Aurian Klopocki	Ilyas Lebleu	Maxime Lenormand	Clément Lezane

Lilia Martin	Arthur Nebout	Florent Noisette	Clémence Ouyang
Lucas Perotin	Hélène Quach	Timothée Schoen	Adrien Smith
Antoine Taliercio	Julien Vernay	Pascal Wang	Claire Zeng

Patrick Zeng

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour ce troisième stage olympique junior, nous avons poursuivi l'effort des années précédentes, avec davantage de stagiaires et d'animateurs, des élèves plus jeunes (six de quatrième, onze de troisième et douze de seconde), l'intervention de conférenciers extérieurs...

Le premier jour, les élèves sont arrivés entre 9 h 45 et 13 h : en plus des formalités d'accueil et d'une rapide inauguration du stage à 12 h, les premiers arrivés ont écouté un exposé d'Igor Kortchemski. Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial qui nous a permis de répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe : un élève de quatrième était avancé, et des élèves de seconde débutants. Après le goûter, Laurent Desvillettes, professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, leur a présenté une conférence sur Alan Turing, et cette longue journée (certains avaient voyagé plusieurs heures le matin même) s'est achevée, après dîner, par la correction du test initial.

Les horaires étaient presque ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi parfois d'une soirée à 20 h 30. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer mais nous étions plusieurs (François Lo Jacomo, Igor Kortchemski, Pierre Bertin, Antoine Taveneaux côté garçons, Morgane Jançon, Irène Marcovici et Pauline Pommeret côté filles), en moyenne trois chaque soir, à surveiller notamment qu'ils ne se couchent pas après 23 h et n'oublient pas de se réveiller le matin. Les six filles partageaient la même chambre, les 23 garçons étaient dans 7 chambres en fonction notamment de l'âge et de la classe.

En fait, la conférence de Laurent Desvillettes : « à quoi servent les mathématiques ? l'exemple de l'instabilité de Turing », lundi soir, a été avancée à 17 h 30, mais celle de Robert Mansuy, professeur de mathématiques supérieures au lycée Louis le Grand, mardi soir, sur les probabilités, «du jeu de pile ou face à l'ADN», a effectivement eu lieu à 20 h 30. Mercredi, après la photo de groupe, vers 18 h 30, c'est Martin Andler, président d'Animath, qui nous a présenté la carrière de mathématicien, et le dernier soir, Jeudi, est traditionnellement une soirée libre.

Comme le stage commençait par un test, nous n'avons organisé qu'un second test le vendredi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois chapitres abordés durant ces trois jours : géométrie le mardi, arithmétique le mercredi et combinatoire le jeudi. Les énoncés n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Vendredi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié, mais aussi expliquer aux stagiaires comment ils pourront poursuivre cette préparation olympique, qui ne se limite pas aux deux stages organisés par Animath. La fin du stage était prévue vers 16 h.

		Débutants	Avancés
Lundi	10h-12h	Arrivée et installation	
	14h-16	Test initial	
	17h-17h30	Présentation du stage	
	17h30-18h30	**Conférence (Laurent Desvillettes)**	
	20h30-21h30	Correction du test initial	
Mardi	Matin	Cours de Géométrie (François Lo Jacomo)	Cours de Géométrie (Igor Kortchemski)
	Après-midi	TD de Géométrie (Pierre Bertin)	TD de Géométrie (Raphaël Beuzart)
	20h30	**Conférence (Roger Mansuy)**	
Mercredi	Matin	Cours d'arithmétique (Irène Marcovici)	Cours d'arithmétique (François Lo Jacomo)
	Après-midi	TD d'arithmétique (Antoine Taveneaux)	TD d'arithmétique (Noé de Rancourt)
	18h30	**Conférence (Martin Andler)**	
Jeudi	Matin	Cours de Stratégies de Base (François Lo Jacomo)	Cours de Combinatoire (Antoine Taveneaux)
	Après-midi	TD de Stratégies de Base (Igor Kortchemski)	TD de Combinatoire (Pierre Bornsztein)
Vendredi	9h-12h	Test final	
	14h30	Correction du test final - clôture du stage	

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

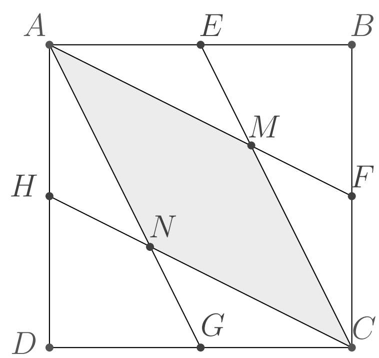
- Le site d'Animath : `www.animath.fr`
- Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Test initial

1 Sujet

Exercice 1 On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et les milieux E, F, G et H de ses côtés. Les droites (AF) et (EC) se coupent en M, les droites (AG) et (CH) se coupent en N.

1. Montrer que $AMCN$ est un losange.
2. Déterminer l'aire du losange $AMCN$.



Exercice 2

1. Calculer les sommes : $a = 99 + 999$, $b = 99 + 999 + 9999$ et $c = 99 + 999 + 9999 + 99999$.
2. On considère le nombre N défini comme la somme :

$$N = 99 + 999 + 9999 + \cdots + 9999999\ldots999.$$

   Le premier terme de cette somme s'écrit avec deux chiffres 9 ; on ajoute les nombres s'écrivant avec trois puis quatre chiffres 9, etc. Le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 9. On effectue la somme et on écrit N en écriture décimale ordinaire. Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans cette écriture ?
3. Même question pour le chiffre $M = 11 + 111 + 1111 + \cdots + 1111111\ldots111$ où le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 1.

Exercice 3 Dans un pays, se trouvent 6 villes reliées deux à deux par des routes, jamais plus d'une seule route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres par des ponts. Chaque route est à sens unique. Des responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sorte d'une ville quelconque, il soit impossible d'y revenir. Un tel réseau de routes entre les dix villes sera dit "catastrophique".

1. Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.
2. Prouver que, dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres.
3. Combien, au minimum, doit-on changer de sens de circulation pour que l'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) dans le nouveau réseau routier obtenu ?
4. Prouver qu'il y a exactement 720 réseaux catastrophiques possibles.

2 Corrigé

Solution de l'exercice 1 Comme la figure a beaucoup de propriétés intéressantes (symétries, angles droits, etc) il y a beaucoup de façons de faire l'exercice. Ici nous n'en présentons qu'une, mais d'autres existent.

1. Faisons cette première question avec les symétries. Regardons d'abord la symétrie par rapport à la diagonale AC elle echange les points B avec D, E avec H, F avec G et finalement M avec N. Cette symétrie transforme donc AM en AN et CM en CN, donc $AM = AN$ et $CM = CN$. À present regardons la symétrie par rapport à la diagonale BD. Il est facile de vérifier que cette symétrie transforme A en C et laisse M et N inchangés, donc $AM = CM$ et $AN = CN$. On a bien $AM = MC = CN = NA$, $AMCN$ est un losange.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire de $AMCN$. On remarque tout d'abord que les triangles AEM, CFM, AHN et CGN sont isométriques (ils sont "égaux"), ils ont donc tous les quatre la même aire que l'on va noter $\mathcal{B}$. Le parallélogramme $AECG$ a une bas de $1/2$ et une hauteur de 1, donc
$$\mathcal{A} + 2\mathcal{B} = \frac{1}{2}.$$
De plus les triangles AME et EMB ont une base de $1/2$ et la même hauteur, ils ont donc la même aire $\mathcal{B}$. Quand on regarde le carré entier on a
$$\mathcal{A} + 8\mathcal{B} = 1.$$
La solution de ces deux équations est $\mathcal{A} = 1/3$ et $\mathcal{B} = 1/12$.

Solution de l'exercice 2

1. Les réponses sont $a = 1098$, $b = 11097$ et $c = 111096$.
2. Soit $N = 99 + 999 + \cdots + \overbrace{99\ldots9}^{100}$. Cette somme a 99 termes.On écrit chaqu terme différemment :
$$99 = 100 - 1,\ \ 999 = 1000 - 1\ldots,\ \text{ et } \overbrace{99\ldots9}^{100} = 1\overbrace{00\ldots0}^{100} - 1$$

$$\begin{aligned} N &= (100-1)+(1000-1)+\cdots+1\overbrace{00\ldots0}^{100}-1 \\ &= \overbrace{11\ldots11}^{99}00-99 \\ &= \overbrace{11\ldots1}^{98}001 \end{aligned}$$

Le chiffre 1 y apparaît 99 fois.

3. On remarque tout d'abord que $M = N/9$. Il faut donc faire la division par 9 de ce gros chiffre.

$$\overbrace{111111111}^{9} \div 9 = 012345679, \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{111111111111111111\ldots1111}^{99} \quad \div \quad 9 = \\ &012345679012345679\ldots5679 \end{aligned}$$

où la séquence 012345679 est répétée 11 fois.

$$\begin{aligned} M &= \left(\overbrace{111111111111111111\ldots11}^{99}00-99\right)\div 9 \\ &= 012345679012345679\ldots567900-11 \\ &= 012345679012345679\ldots567889 \end{aligned}$$

Le chiffre 1 y est écrit 11 fois.

Solution de l'exercice 3 Lorsque j'aurai besoin de nommer les villes, je supposerai que les 6 villes s'appellent Arras, Bergues, Cambrai, Dunkerque, Esquelbecq et Favreuil.

1. Raisonnons par l'absurde : supposons que dans toutes les villes il y ait une route sortante. Un touriste qui se balade de ville en ville (et qui respecte les sens uniques) peut donc toujours continuer à voyager. Mais comme il n'ya que 6 villes différentes il arrivera un moment où il entrera dans une ville qu'il a déjà visitée. Mais ceci signifie qu'il est sorti de la ville et qu'il y est rentré à nouveau, et ça contredit l'hypothèse sur le réseau routier. Il existe donc une ville dont on ne puisse pas sortir.
2. Pour démontrer cette question nous allons utiliser une astuce : démontrons d'abord que si on change le sens de toutes les routes, alors le réseau obtenu sera également catastrophique. En effet, supposons qu'il existe un trajet dont le point de départ et d'arrivée sont la même ville dans le réseau inversé, alors en faisant le trajet dans le sens inverse on aura un trajet qui contredit l'hypothèse du réseau catastrophique. Donc le réseau inversé est aussi catastrophique.

   Dans le réseau inversé, d'après la question 1., il existe une ville (appelons la Arras) dont on ne puisse pas sortir, c-à-d que les 5 routes qui arrivent sont toutes dirigées vers Arras. Comme il s'agit du réseau inversé, cela signifie que dans le réseau normal, toutes les routes reliant Arras sont dans le sens sortant, on peut donc atteindre directement toutes les villes à partir de Arras.

3. Nous allons montrer qu'en changeant le sens d'une seule route il est possible de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre. D'après les deux questions précédentes il existe une ville depuis laquelle on peut atteindre toutes les autres (disons Arras) et une ville dont on ne puisse pas sortir (disons Favreuil). Maintenant nous allons inverser le sens de la route entre Arras et Favreuil : au lieu d'aller de Arras vers Favreuil elle ira de Favreuil vers Arras. Prenons deux autres villes quelconques, Bergues et Cambrai. De Bergues ont peut toujours aller vers Favreuil, puis de Favreuil on peut maintenant aller vers Arras, et de Arras on peut aller directement à Cambrai, on a un trajet de Bergues à Cambrai. Pour bien faire il faut vérifier que ça marche aussi si une des extrémités du trajet est Arras ou Bergues, mais ce n'est pas très dur.
4. Pour savoir combien il y a de réseaux catastrophiques il faut mieux comprendre la structure de ces réseaux. Prenons un réseau catastrophique. D'après la question 1., il existe une ville dont on ne peut pas sortir. Mettons-lui le numéro 1 et retirons-la. Maintenant on regarde les 5 villes restantes avec les routes restantes. Il est facile de vérifier que le réseau sur ces 5 villes est également catastrophique. Il y a donc une ville dont on ne peut pas sortir dans ce nouveau réseau. Mettons-lui le numéro 2 et retirons-la. On considère les 4 villes restantes, etc. À chaque réseau catastrophique on associe une numérotation des ville sde 1 à 6, et pour chaque numérotation on associe un réseau catastrophique : la route entre deux villes va de la ville au plus grand numéro vers la ville au plus petit numéro.

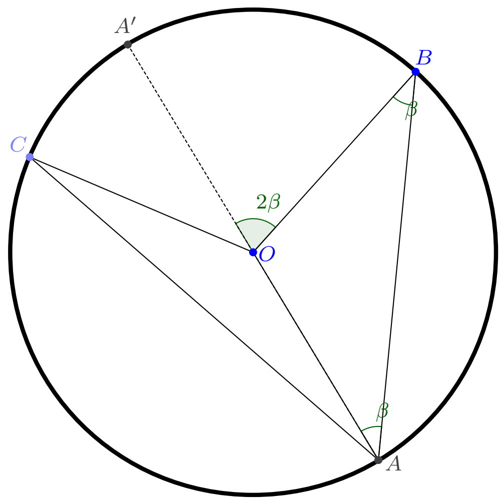
   Il y a donc autant de réseau catastrophiques qu'il y a de façons de numéroter les six villes de 1 à 6 : Il y a six choix possibles pour le numéro 1, puis il reste 5 choix possibles pour le numéro 2, puis 4 pour le numéro 3, etc. Le nombre recherché est donc $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 6! = 720$.

III. Groupe des débutants

1 Géometrie

1 Cours

Les angles interviennent en premier lieu dans la notion de triangle isocèle : un triangle a deux angles égaux si et seulement si il a deux côtés égaux. Mais aussi et surtout dans la notion d'angle inscrit : si B et C sont deux points fixes d'un cercle, et qu'on fait varier un troisième point A sur ce même cercle, l'angle $\widehat{BAC}$ ne dépend pas de la position du point A.



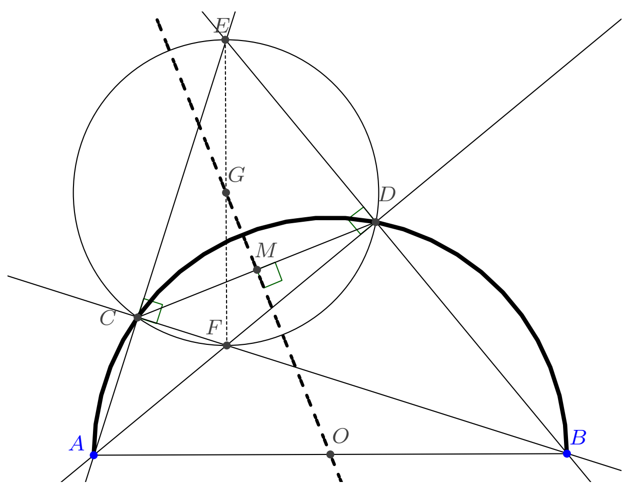
Il existe plusieurs manières d'énoncer ce théorème : si quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux si A et D sont du même côté de la droite (BC), supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de (BC). Réciproquement, quatre points quelconques du plan, A, B, C, D vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ si A et D du même côté de (BC) ou $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^{\circ}$ si A et D sont de part et d'autre de (BC) sont "cocycliques", c'est-à-dire sur un même cercle. La démonstration doit envisager tous les cas de figure, mais l'idée essentielle est que si A et B sont sur un cercle de centre O, le triangle AOB est isocèle. Si la droite (AO) recoupe le cercle en A', comme la somme des trois angles du triangle AOB est égale à 180°, $\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 2.\widehat{BAO}$, d'où l'on déduit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$, qui ne dépend pas de A, est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Si l'on veut un théorème qui ne dépende pas des cas de figures, il faut introduire les angles de droites : l'angle (AB, AC) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AB) pour la faire coïncider avec (AC). Donc $(AB, AC) = -(AC, AB)$ et plus généralement : $(AB, AC) + (AC, AD) = (AB, AD)$ (relation de Chasles) quels que soient les points A, B, C et D. En utilisant ces angles de droites, le théorème de l'angle inscrit s'écrit : quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

Cas particulier important de ce théorème : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si A est situé sur le cercle de diamètre $[BC]$ (donc l'angle au centre est plat).

Exercice 1 Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en F, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

Solution de l'exercice 1



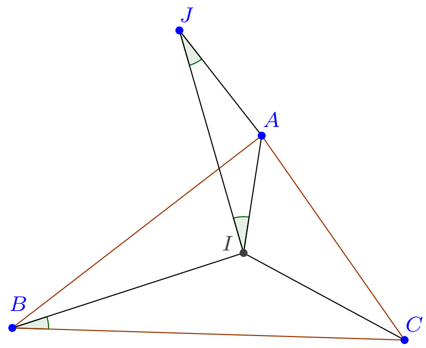
L'hypothèse "C et D sur le cercle de diamètre $[AB]$" se traduit par : $\widehat{ACB} = 90^\circ$ et $\widehat{ADB} = 90^\circ$". Mais cela entraine manifestement : $\widehat{FCE} = 90^\circ$ et $\widehat{FDE} = 90^\circ$, donc (C) et (D) sont également sur le cercle de diamètre $[EF]$. Le milieu M de $[EF]$ est le centre de ce cercle, donc $MC = MD$, ce qui entraine que M est sur la médiatrice de $[CD]$. Or, pour la même raison, le milieu O de $[AB]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$. Et par définition, cette même médiatrice passe par le milieu de $[CD]$.

- Bissectrices et cercle inscrit -

La bissectrice d'un angle partage un angle en deux angles égaux. Les points de la bissectrice sont à égale distance des deux côtés de l'angle. Il en résulte que les trois bissectrices d'un triangle ABC se coupent en un point généralement appelé I, situé à égale distance des trois côtés du triangle. C'est donc le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé "cercle inscrit dans le triangle ABC".

Exercice 2 Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose que : $CA + AI = BC$. Déterminer la valeur du rapport $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$

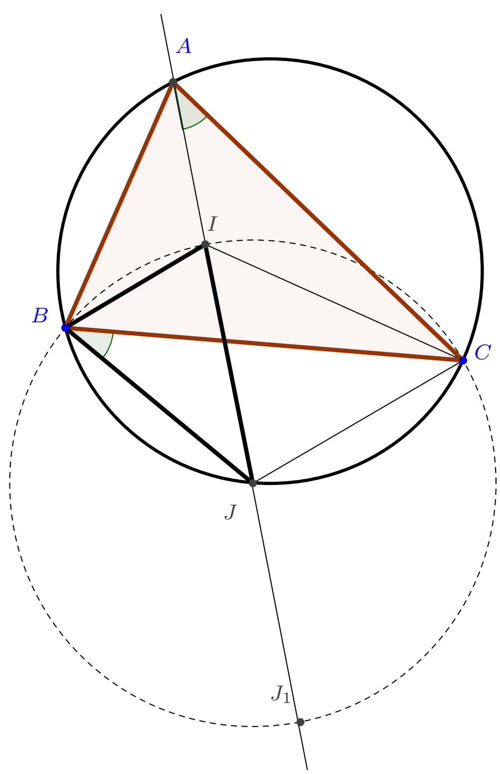
Solution de l'exercice 2



Lorsque deux segments ne sont pas bout à bout sur une même droite, on ne peut pas dire grand-chose de la somme de leurs longueurs. Donc pour utiliser l'hypothèse $CA + AI = BC$, il faut construire un segment AJ sur la droite (CA) tel que : $AJ = AI$ et $CJ = CA + AJ$ (donc C et J de part et d'autre de A). La relation $AJ = AI$ entraine alors que le triangle AJI est isocèle, donc $\widehat{AJI} = \widehat{AIJ}$: appelons α cet angle. $\widehat{IAC} = \widehat{AJI} + \widehat{AIJ} = 2\alpha$. Or $\widehat{IAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ car (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$. Par ailleurs, les triangles IJC et IBC ont un angle égal : $\widehat{ICJ} = \widehat{ICB}$ situé entre deux côtés égaux, CI et $CJ = CB$, ils sont donc isométriques (ils ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux), d'où en particulier : $\alpha = \widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{CBA}}{2}$. Donc en définitive : $\widehat{CBA} = 2\alpha$ alors que $\widehat{BAC} = 4\alpha$, d'où $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

Exercice 3 Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit à ABC en un point J. Montrer que $JB = JC = JI$.

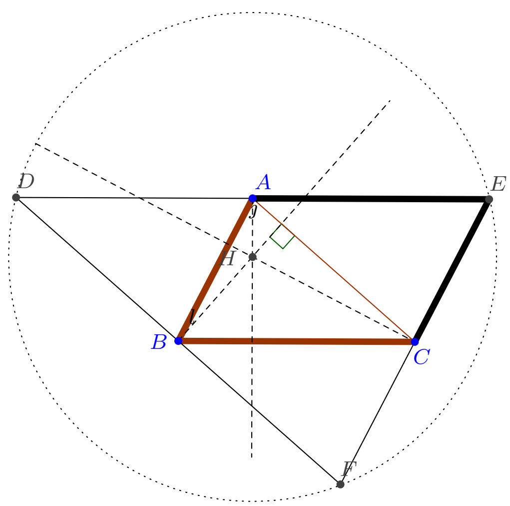
Solution de l'exercice 3



A, B, J et C étant cocycliques, $\widehat{BAJ} = \widehat{BCJ}$ (angles inscrits), tout comme $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$. Comme (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$, on en déduit que $\widehat{BCJ} = \widehat{CBJ}$, donc $JB = JC$ (triangle isocèle). Par ailleurs, on continue la "chasse aux angles" avec $\widehat{BIC}$, somme des deux angles à la base du triangle BAI : $\widehat{BIC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{IBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{IBJ}$, donc IJB est lui aussi un triangle isocèle, ce qui achève la démonstration.

- Hauteurs et orthocentre -

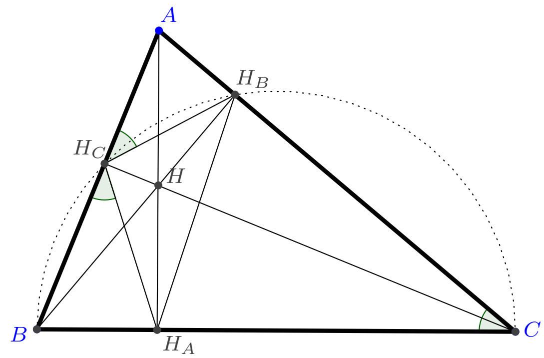
Les hauteurs d'un triangle ABC se coupent en un point nommé orthocentre du triangle, et traditionnellement noté H. En effet, menons par A la parallèle à (BC), par B la parallèle à (CA) et par C la parallèle à (AB) : on voit apparaître trois parallélogrammes $ABCB'$, $ABA'C$ et $AC'BC$, donc la hauteur issue de A est médiatrice de $[B'C']$, lieu des points équidistants de B' et C', celle issue de B est médiatrice de $[C'A']$, celle issue de C, médiatrice de $[A'B']$, et les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois sommets (centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$).



Exercice 4 Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On supposera pour simplifier que H est à l'intérieur du triangle ABC, ce qui revient à dire que tous les angles du triangle sont aigus (un tel triangle est dit acutangle). Déterminer les angles des triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC et $H_AH_BH_C$, en fonction des angles du triangle ABC, que l'on notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

Remarque : on utilise beaucoup de points en géométrie du triangle, et si l'on veut éviter d'utiliser le même nom pour trop de points différents, il arrive qu'on soit à court de notations. Les notations H_A, H_B et H_C ne sont pas courantes, mais elles peuvent rendre des services dans bien des cas.

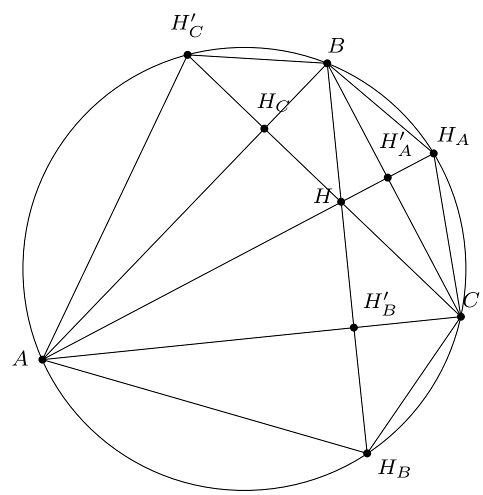
Solution de l'exercice 4



Etant donnés les angles droits $\widehat{BH_BC}$ et $\widehat{BH_CC}$, H_B et H_C sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, d'où les angles inscrits $\widehat{BH_CH_B}$ et $\widehat{BCH_B}$ sont supplémentaires, puisque C et H_C sont de part et d'autre de (BH_B), d'où $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{C}$. De même, $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{B}$, puis $\widehat{BH_CH_A} = \widehat{C}$, $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{A} = \widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{CH_BH_A} = \widehat{B}$. Donc d'une part $\widehat{H_AH_BH_C} = 180^\circ - 2\widehat{B}$, $\widehat{H_BH_CH_A} = 180^\circ - 2\widehat{C}$, $\widehat{H_CH_AH_B} = 180^\circ - 2\widehat{A}$, d'autre part les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$, et l'orthocentre de ABC est centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$.

Exercice 5 Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). Montrer que le symétrique de H par rapport aux côtés (AB), (BC) et (CA) du triangle sont sur le cercle circonscrit à ABC.

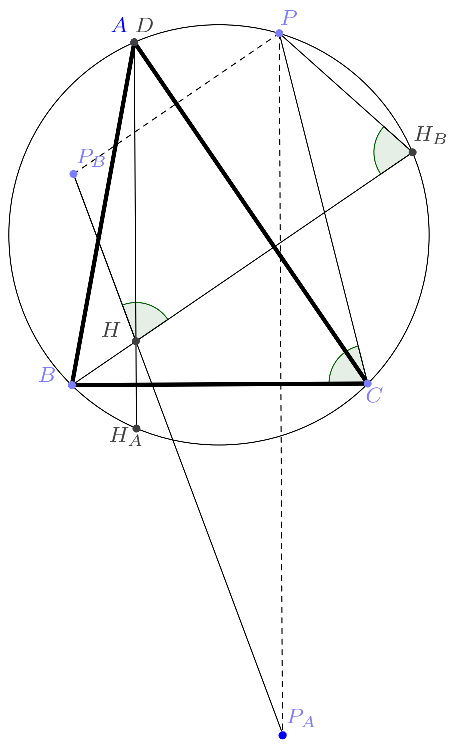
Solution de l'exercice 5



Une simple "chasse aux angles" suffit : en appelant, cette fois, H_A, H_B et H_C les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle, H'_A, H'_B et H'_C les pieds des hauteurs, milieux de HH_A, HH_B et HH_C : dans le triangle rectangle BH'_BC, $\widehat{H'_BBC} = 90^\circ - \widehat{C}$. De même, $\widehat{H'_CCB} = 90^\circ - \widehat{B}$. Donc le troisième angle du triangle BHC : $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BHC}$ sont supplémentaires, mais H et A ne sont pas de part et d'autre de (BC), donc A, B, C et H ne sont pas cocycliques. En revanche, si H_A est le symétrique de H par rapport à (BC), les triangles BHC et BH_AC ont les mêmes angles, donc $\widehat{BH_AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont encore supplémentaires, mais cette fois-ci A et H_A sont situés de part et d'autre de (BC), donc les quatre points A, H_A, B et C sont cocycliques. De même pour H_B et H_C.

- Droite de Steiner, droite de Simson. -

Parmi les propriétés du triangle, ces deux droites (dont on se sert souvent pour résoudre des problèmes olympiques) peuvent être mises en évidence à partir des seules propriétés ci-dessus. Il s'agit de prouver qu'un point P appartient au cercle circonscrit si et seulement si ses trois symétriques P_A, P_B, P_C par rapport aux côtés du triangle sont alignés (droite de Steiner), tout comme ses trois projections sur les côtés du triangle P'_A, P'_B et P'_C (droite de Simson). Les deux propriétés sont équivalentes, vu que les projections P'_A, P'_B et P'_C sont les milieux de $[PP_A]$, $[PP_B]$, $[PP_C]$, mais la droite de Steiner passe par l'orthocentre H du triangle, ce qui permet une démonstration assez rapide. Pour ne pas avoir à étudier différents cas de figures, utilisons les angles de droites définis en introduction du présent chapitre. L'angle (orienté) de droites (AH, P_AH) dont il faut faire tourner la droite (AH) pour l'amener parallèle à (P_AH) vaut $-(AH_A, PH_A) = (PH_A, AH_A)$, car la symétrie par rapport à une droite transforme un angle de droites en son opposé. De même, $(BH, P_BH) = (PH_B, BH_B)$. D'après la relation de Chasles, $(AH, P_BH) = (AH, BH) + (BH, P_BH)$, or d'une part l'angle inscrit $(PH_B, BH_B) = (PC, BC)$, d'autre part, si l'on fait tourner une droite d'un certain angle, on fait tourner sa perpendiculaire du même angle, donc l'angle des hauteurs $(AH, HB) = (BC, CA)$. D'où $(AH, P_BH) = (PC, BC) + (BC, CA) = (PC, CA)$. Comme $(AH, P_AH) = (PH_A, AH_A) = (PC, AC)$ (angles inscrits), $(AH, P_BH) = (AH, P_AH)$, ce qui entraine que (P_BH) et (P_AH) sont parallèles, donc confondues car toutes deux passent par (H). D'où H, P_A et P_B sont alignés, et de même H, P_A et P_C sont alignés : les quatre points P_A, P_B, P_C et H sont sur la même droite appelée "droite de Steiner de P".



L'utilisation des angles de droites nous a permis de rédiger une démonstration plus rigoureuse (moins dépendante des cas de figures), mais cette utilisation d'angles de droites n'est pas si répandue que cela, même dans les problèmes d'Olympiades.

2 TD

- Énoncés -

Exercice 1 Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle si et seulement si $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

Exercice 2 Soient A et B deux points sur un cercle $\mathcal{C}$ et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Les droites (PA) et (PB) coupent le cercle en A' et B' respectivement. Montrer que les triangles PAB et $PA'B'$ sont semblables.

Exercice 3 Soit ABC un triangles et P, Q, R des points placés sur les côtes BC, AC et AB respectivement. On trace les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR et CQP. Montrer que ces trois cercles passent par un même point

Exercice 4 Deux cercles se coupent en P et Q. Une droite passant par P coupe les deux cercles en A et A'. La droite parallèle passant par Q coupe les cercles en B et B'. Montrer que les triangles PBB' et QAA' sont isométriques.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit D l'intersection de la bissectrice de $\widehat{B}$ et du côté AC, et E un point du côté BC tel que $AB = BE$. Montrer que (BO) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 7 Soit ABC un triangle tel que la médiane, la hauteur et la bissectrice issues de A coupent l'angle $\widehat{A}$ en quatre angles égaux α. Exprimer tous les angles de la figure en fonction de α et calculer α.

Exercice 8 (Loi des sinus) Soit ABC un triangle. On note $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et R le rayon du cercle circonscrit. Montrer que

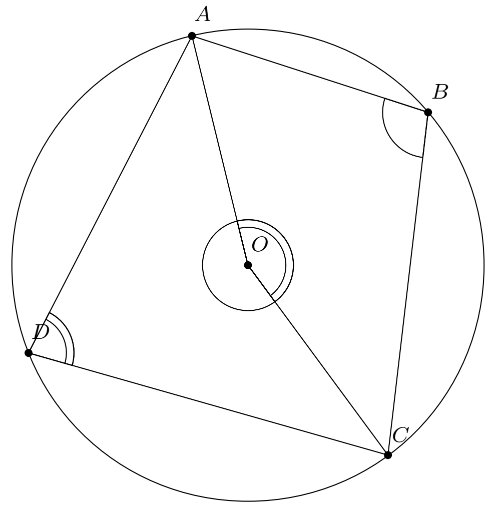
$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R.$$

Indication : Commencez par montrer $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R$ quand ABC est rectangle en B.

Exercice 9 Soit Γ un cercle et BC une corde de Γ. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent BC en F et G. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

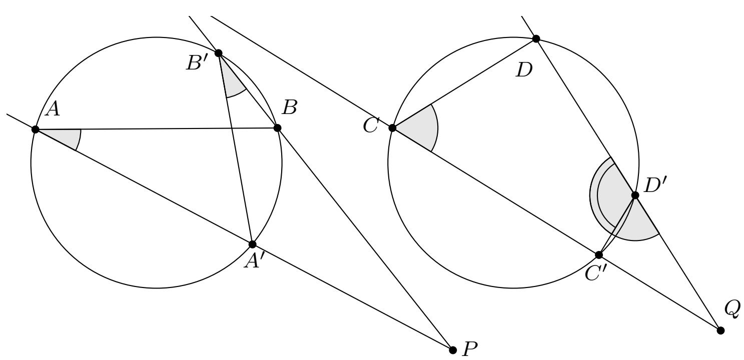
- Corrigés -

Solution de l'exercice 1 Prenons un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle. Par le théorème de l'angle interne et de langle au centre, $\widehat{BOC} = 2 * \widehat{BAC}$ et $\widehat{COB} = 2 * \widehat{CDB}$. Mais comme $\widehat{BOC} + \widehat{COB} = 360°$, on a bien $\widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180°$.



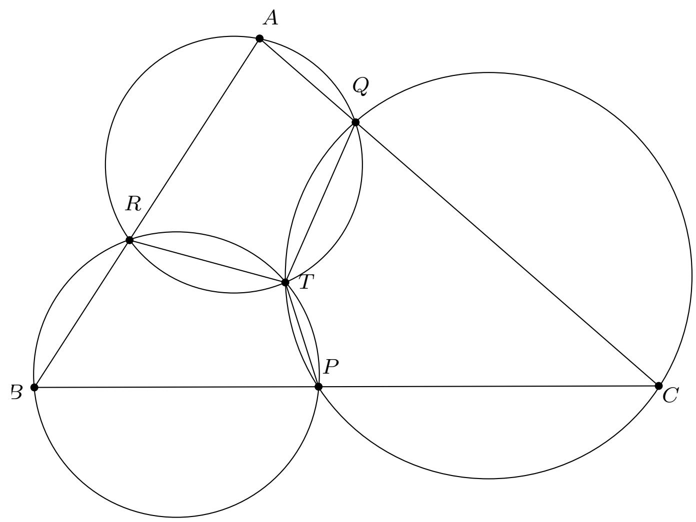
Il faut aussi montrer le sens inverse : supposons que $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$. Soit C' l'intersection du côté BC avec le cercle qui passe par A, B et D. Nous voulons montrer que $C = C'$. Par la question précédente, on sait que $\widehat{BC'D} = 180° - \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Donc les droites (BC) et (BC') sont parallèles et comme elles passent par B toutes les deux elles sont confondues et on a bien $C = C'$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Tout d'abord il faut remarquer qu'il y a deux figures possibles



Dans les deux cas on veut prouver que deux triangles sont semblables. Mais ils ont déja l'angle $\widehat{P}$ en commun, il suffit donc de trouver deux autres angles égaux. Le premier cas est facile, $\widehat{A} = \widehat{B'}$ par le théorème de l'angle inscrit. Le deuxième cas prend un peu plus de temps : $\widehat{DD'C} + \widehat{C'CD} = 180°$ d'après l'exercice précédent, et $\widehat{QD'C'} = 180° - \widehat{C'D'D} = \widehat{QCD}$. Et voila.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Commençons par tracer la figure :

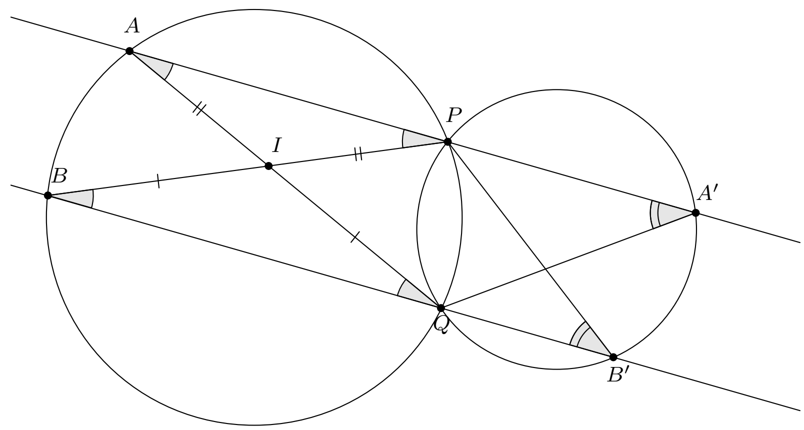


On appelle T le point d'intersection des deux premiers cercles, et on va montrer que T est sur le cercle circonscrit à CQP, c-à-d que le quadrilatère $CQTP$ est inscriptible dans un cercle. Le quadrilatère $ARTQ$ est inscrit dans un cercle, donc $\widehat{RTQ} = 180° - \widehat{A}$. De même, $\widehat{PTR} = 180° - \widehat{B}$. Donc

$$\widehat{QTP} = 360° - \widehat{RTQ} - \widehat{PTR} = \widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{C}.$$

Donc le quadrilatère $CQTP$ est inscriptible dans un cercle.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Traçons la figure pour nous donner une idée.

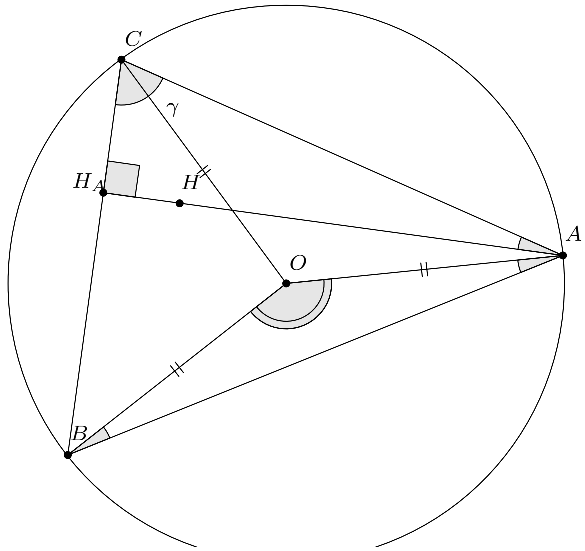


Par les angles inscrits, $\widehat{PAQ} = \widehat{PBQ}$ et $\widehat{PA'Q} = \widehat{PB'Q}$. Les triangles PBB' et QAA' sont donc semblables. Si on trouve deux côtés égaux, on a gagné. On commence par introduire I le point d'intersection de $[PA]$ et $[QB]$. Comme on a des droites parallèles, les angles alternes-internes sont égaux, donc $\widehat{QBI} = \widehat{IPA}$ et $\widehat{IAP} = \widehat{IQB}$. Comme tous ces angles étaient déja égaux par les angles inscrits, on a des triangles isocèles à tire-larigot. Donc

$$AQ = AI + IQ = PI + IB = PB.$$

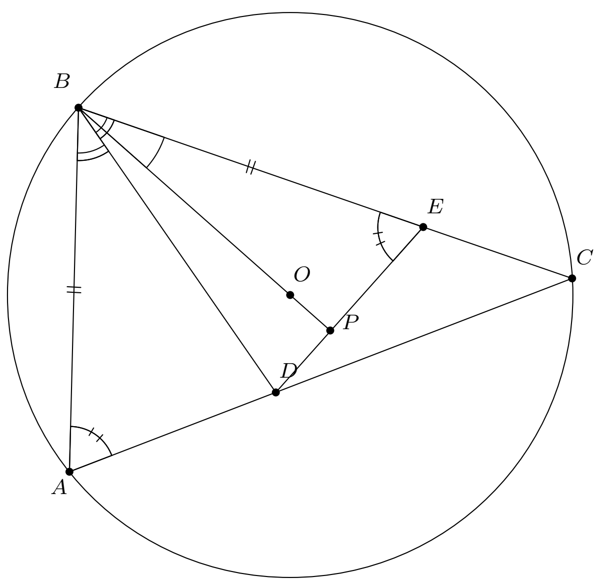
On a nos deux côtés égaux, les deux triangles sont isométriques.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Faisons la figure :



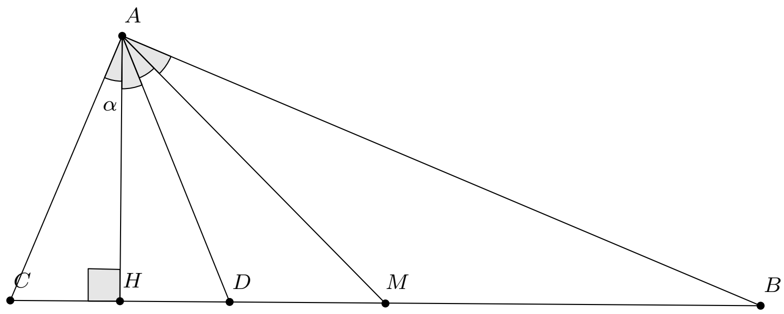
Nous allons calculer les angles en question en fonction de $\gamma = \widehat{BCA}$. Tout d'abord, le triangle CAH_A est rectangle en H_A, donc $\widehat{HAC} = 90° - \gamma$. Pour calculer l'autre angle, on commence par utiliser angle inscrit-angle au centre et on trouve $\widehat{BOA} = 2\gamma$. Ensuite, comme le triangle BOA est isocèle en O, il est facile de calculer $\widehat{OAB} = \frac{180° - \widehat{BOA}}{2} = 90° - \gamma = \widehat{CAH}$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Commençons par faire la figure :



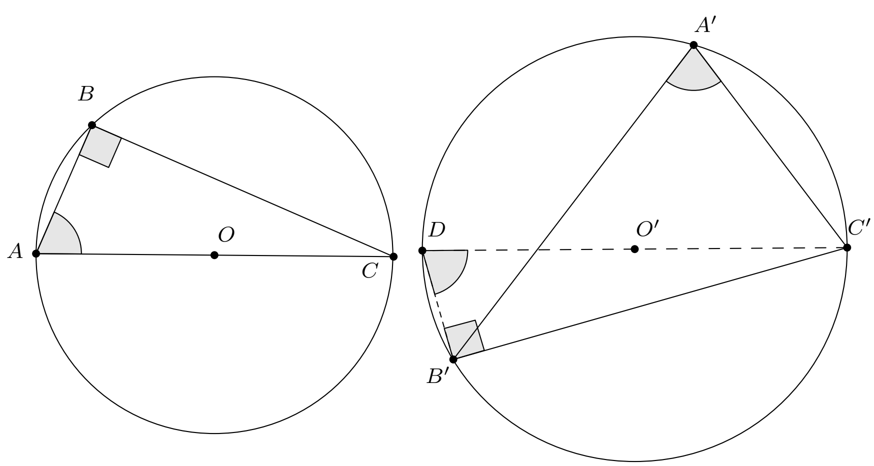
Nous voulons montrer que l'angle $\widehat{BPE}$ est droit, nous allons donc chercher les valeurs des deux autres angles du triangle. Si on note $\alpha = \widehat{A}$, alors l'angle $\widehat{EBP} = 90° - \alpha$ d'après l'exercice précédent. Ensuite on remarque que le point E est le symétrique de A par rapport à la droite BD, donc les triangles BAD et BED sont le symétrique l'un de l'autre et $\widehat{BED} = \alpha$. Donc $\widehat{BPE} = 180° - (90° - \alpha + \alpha) = 90°$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Faisons le dessin :



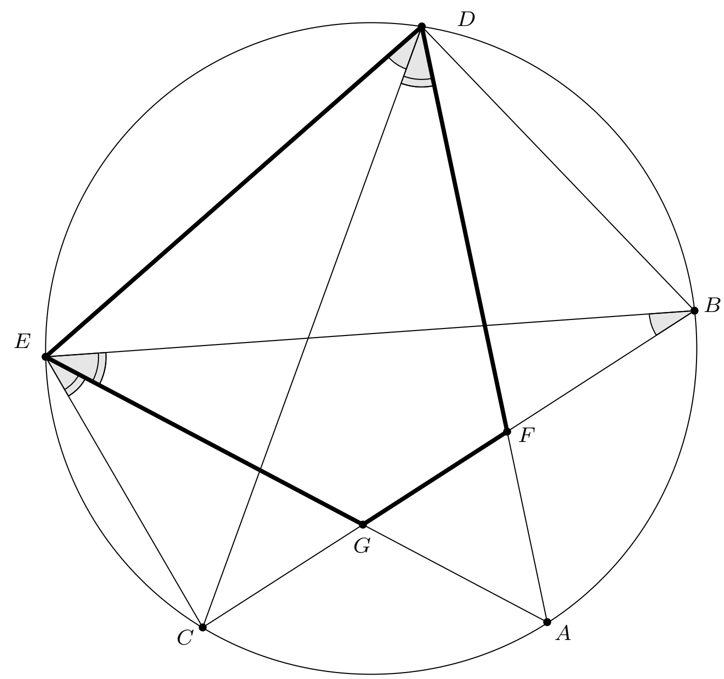
Il est facile de calculer tous les angles en fonction de α : $\widehat{BCA} = \widehat{HDA} = 90° - \alpha$, $\widehat{DMA} = 90° - 2\alpha$ et $\widehat{CBA} = 90° - 3\alpha$. Intéressons nous maintenant au calcul de α. Appelons O le centre du cercle circonscrit de ABC. Nous grâce à l'exercice d'avant d'avant, que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH} = \alpha$. Mais cela signifie que O est sur la médiane (AM). Comme O est également sur la médiatrice de $[BC]$, cela veut dire que $0 = M$. Le rayon du cercle circonscrit et sur le segment $[BC]$, donc le triangle est rectangle en A et $\alpha = \frac{90°}{4} = 22.5°$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> (Loi des sinus) Faisons la figure dans le cas où ABC est rectangle en B et dans le cas général.



Dans le cas rectangle, par définition du sinus, $\sin(\widehat{A}) = \frac{BC}{AC}$, et comme AC est le diamètre du cercle circonscrit, On a bien $\frac{BC}{\sin(\widehat{A})} = 2R$. Dans le cas général on se ramène au cas particulier en créant le point D : on a un triangle rectangle en B', donc $\frac{B'C'}{\sin(\widehat{D}} = 2R$ et comme $\widehat{D} = \widehat{A'}$ on a l'égalité souhaitée.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Comme d'habitude, on commence par une figure :



Nous voulons montrer que le quadrilatère $EDFG$ est inscriptible dans un cercle, essayons de montrer que $\widehat{EDF} + \widehat{FGE} = 180°$. Par les angles inscrits, on a que $\widehat{EDC} = \widehat{EBC}$ et $\widehat{CDA} = \widehat{CEA}$. Comme de plus les arcs CA et AB sont de même longueur, $\widehat{CEA} = \widehat{EAB}$. Maintenant, en faisant la somme des angles dans le triangle EBG on trouve que $\widehat{BGE} = 180° - \widehat{GEB} - \widehat{EBG}$ et en utilisant toutes les égalités obtenues précédemment on a le résultat souhaité.

2 Arithmétique

1 Cours

Ces notes présentent quelques résultats fondamentaux d'arithmétique, agrémentés de petits exercices d'application. Un cours d'arithmétique contenant les démonstrations détaillées de tous ces résultats ainsi que de nombreux exercices complémentaires est disponible sur la page internet d'Animath. [1]

- Division euclidienne et congruences -

Définition 1. Si a et b sont deux entiers, on dit que a *divise* b, ou que b est *divisible* par a, s'il existe un entier q tel que $b = aq$. On dit encore que a est un *diviseur* de b, ou que b est un *multiple* de a. On le note $a|b$.

Quelques remarques :
– tout entier $a \in \mathbb{Z}$ divise 0 et est divisible par 1 et a,
– si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$,
– soit m un entier non nul, $a|b$ est équivalent à $ma|mb$,

1. http://www.animath.fr/spip.php?article255

– si $a|b$ et $a|c$, alors $a|bx + cy$ pour tous entiers x, y. En particulier, $a|b - c$ et $a|b + c$.

Exercice 1 Soient x, y des entiers. Montrer que $3x + 2y$ est divisible par 7 si et seulement si $4x + 5y$ l'est.

Solution. Si 7 divise $3x + 2y$, alors 7 divise $7(x + y) - (3x + 2y) = 4x + 5y$. Réciproquement, si 7 divise $4x + 5y$, alors 7 divise $7(x + y) - (4x + 5y) = 3x + 2y$. □

Définition 2 (Nombres premiers)**.** Un entier naturel $p > 1$ est dit *premier* s'il possède exactement deux diviseurs naturels, à savoir 1 et p.

Exemple : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ sont des nombres premiers.

Exercice 2 Parmi les nombres suivants : $67, 77, 87, 97$, lesquels sont-ils premiers ?

Solution. Le nombre 67 est premier car il n'est divisible par aucun des entiers $2, 3, 5, 7$ et comme $11^2 > 67$, si 67 avait un facteur premier plus grand que 11, il aurait aussi un facteur premier plus petit. Le nombre 77 n'est pas premier car il est divisible par 7. Le nombre 87 n'est pas premier car il est divisible par 3. Le nombre 97 est premier car il n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7$. □

Théorème 3 (Division euclidienne)**.** Soit b un entier strictement positif. Tout entier a s'écrit, de manière unique, sous la forme $a = bq + r$, où q et r sont des entiers, avec $0 \leq r < b$. On appelle q le *quotient* et r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

Définition 4 (Congruences)**.** On dit que a et b sont *congrus* modulo n et on note $a \equiv b \mod n$ si n divise $a - b$. Ainsi, si r est le reste de la division euclidienne de a par n, on a $a \equiv r \mod n$.

Exercice 3 Soit n un entier quelconque. Montrer qu'on a $n^2 \equiv 0 \mod 4$ ou $n^2 \equiv 1 \mod n$.

Solution. Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. D'où $n^2 = 4k^2$, et $n \equiv 0 \mod 4$. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ et $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, donc $n \equiv 0 \mod 4$. □

La relation de congruence vérifie les propriétés suivantes (*pourquoi ?*) :
– si $a \equiv b \mod n$ et $c \equiv d \mod n$, alors $a + c \equiv b + d \mod n$,
– si $a \equiv b \mod n$ et $c \equiv d \mod n$, alors $ac \equiv bd \mod n$.

Exercice 4 Soit n un nombre et $s(n)$ la somme des chiffres de n. Montrer que $n \equiv s(n) \mod 9$.

Solution. Si on écrit $n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$, comme $10^i \equiv 1^i \equiv 1 \mod 9$, on obtient $n \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \mod 9$. D'où $n \equiv s(n) \mod 9$. □

- Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple -

Définition 5 (Plus grand commun diviseur)**.** Un entier divisant à la fois l'entier a et l'entier b (non tous les deux nuls), est appelé *diviseur commun* de a et b. Le plus grand nombre strictement positif parmi ces diviseurs communs est appelé *plus grand commun diviseur* de a et b, on le note $\mathrm{pgcd}(a, b)$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* si $pgcd(a, b) = 1$.

On a les propriétés suivantes :
– pour tout entier c, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a, b + ac) = \mathrm{pgcd}(a + bc, b)$,

– si $d|a$ et $d|b$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = d\,\mathrm{pgcd}(a/d, b/d)$.

Exercice 5 Montrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Solution. On a $\mathrm{pgcd}(21n+4, 14n+3) = \mathrm{pgcd}(7n+1, 14n+3) = \mathrm{pgcd}(7n+1, 1) = 1$, d'où le résultat. □

Théorème 6. Les entiers qui s'écrivent sous la forme $ax + by$, où x et y sont des entiers relatifs, sont exactement les multiples de $\mathrm{pgcd}(a,b)$.

Ce théorème a deux conséquences particulièrement importantes :
– il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = \mathrm{pgcd}(a,b)$,
– les entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème 7 (Lemme de Gauss)**.** Si $a|bc$ et $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, alors $a|c$.

Démonstration. Comme a et b sont premiers entre eux, il existe des entiers relatifs x et y tels que $ax + by = 1$. En multipliant par c, on obtient $axc + byc = c$. D'où $c = a \cdot xc + bc \cdot y$. Comme $a|bc$, on en déduit que $a|c$. □

Proposition 8. Si deux entiers premiers entre eux a et b divisent n, alors le produit ab divise également n.

Démonstration. Comme a divisie n, il existe un entier k tel que $n = ak$. L'entier b divise $n = ak$ et est premier avec a, donc d'après le lemme de Gauss, b divise k. On en déduit que ab divise n. □

Exercice 6 Montrer que pour tout entier n, l'entier $n^3 - n$ est divisible par 6.

Solution. On a $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$. Parmi les entiers $n-1, n, n+1$, l'un d'entre eux au moins est pair, et l'un est divisible par 3. Donc $2|n^3 - n$ et $3|n^3 - n$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on en déduit le résultat. □

Définition 9 (Plus petit commun multiple)**.** Un entier à la fois divisible par a et par b est appelé un *multiple commun* de a et b. Le plus petit nombre strictement positif parmi ces multiples communs est appelé le *plus petit commun multiple* de a et b et noté $\mathrm{ppcm}(a,b)$.

Théorème 10. Tout multiple commun de a et b est un multiple de $\mathrm{ppcm}(a,b)$.

Proposition 11. Pour tous entiers $a, b \geq 1$, on a $ab = \mathrm{ppcm}(a,b)\,\mathrm{pgcd}(a,b)$.

Démonstration. Soit $m = \mathrm{ppcm}(a,b)$, et posons $d = ab/m$. Comme ab est un multiple commun de a et b, d est un entier. De plus, comme $a = \frac{m}{b}d$ et $b = \frac{m}{a}d$, l'entier d divise a et b. Donc $\mathrm{pgcd}(a,b) = kd$ pour un certain entier k. Comme $\frac{m}{k} = \frac{ab}{\mathrm{pgcd}(a,b)}$ est un entier qui est un multiple commun de a et b on en déduit que $k = 1$ (sinon, cela contredirait le fait que $m = \mathrm{ppcm}(a,b)$). □

- Nombres premiers -

Théorème 12 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** Tout entier naturel $n > 1$ se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.

Théorème 13. L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini n de nombre premiers. Notons ces nombres preiers $p_1, \ldots, p_n$, et posons $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. L'entier N n'est divisible par aucun des p_i. Donc soit il est premier, soit il admet un diviseur premier différent de $p_1, \ldots, p_n$. Dans tous les cas, on obtient une contradiction. ☐

Exercice 7 Montrer que pour tout entier naturel k, il est possible de trouver un entier n tel que les nombres $n+1, \ldots, n+k$ soient tous composés.

Solution. Il suffit de prendre $n = (k+1)! + 1$. ☐

Exercice 8 Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Solution. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de cette forme, notés $p_1, p_2, \ldots p_k$. On considère alors $N = 4p_1 p_2 \ldots p_k - 1$. Les diviseurs premiers de N sont distincts de 2 et des p_i, $1 \leq i \leq k$, et il en existe un qui est de la forme $4n+3$, car sinon on vérifie immédiatement que N ne pourrait être congru à 3 modulo 4. ☐

2 TD

"Celui qui pose une question risque cinq minutes d'avoir l'air bête, celui qui ne pose pas de questions restera bête toute sa vie". Proverbe chinois

- Énoncés -

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercice 1 Combien peut-il y avoir de vendredi 12 dans une année ? (au maximum ? au minimum ?) Et si l'année est bissextile ?

Exercice 2 Montrer que si (x, y, z) est une solution de l'équation suivante alors x ou y est un multiple de 2 :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Exercice 3 Écrire sous forme d'une fraction (si possible) le nombre :

$$x = 0,5\ 12341234123412341234123412341234\ldots$$

Pouvez-vous généraliser cette méthode à tous les nombres réels avec un développement périodique ? Et réciproquement ?

Exercice 4 En partant d'un nombre vous pouvez le passer au cube ou le diviser par 8. En partant du nombre 2 et avec ces deux opérations pouvez-vous atteindre 64 ? et 2^{2011} ?

Exercice 5 Montrer que parmi les nombres 1, 11, 111, 1111, …, 111…111 (le denier contient 2011 fois le chiffre 1) au moins un est divisible par 2011.

Exercice 6 Combien y a t'il de 0 à la fin du nombre $100!$? On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Exercice 7 Un capitaine pirate a fait naufrage et on ne retrouve de lui que sa carte vitale (moderne le pirate !). Mais par manque de chance deux numéros sont effacés.

$$1\ ??\ 12\ 71\ 153\ 044\ 67$$

De plus, comme vous le savez, les deux derniers chiffres servent de contrôle (pour savoir si vous n'avez pas commis d'erreur). Si vous additionnez le nombre constitué des 13 premiers chiffres au nombre constitué des deux derniers chiffres vous obtenez toujours un multiple de 97. Quel est l'âge du capitaine ?

Exercice 8 Il y a 40 passagers dans un bus. ils ont sur eux des pièces de monnaie de 10,15 et 20 euros. Ils ont en tout 49 pièces de monnaie. Le prix du ticket d'autobus est égal à 5 euros. Montrer qu'il est impossible que tout le monde paye le prix du ticket et obtienne la monnaie en retour.

Exercice 9 Montrer que le nombre

$$\underbrace{111\ldots111}_{3^{3^n}\text{ fois}}$$

est divisible par 9.

Exercice 10 Le premier terme d'une suite est égal à 3^{2012}. Tout terme suivant est égal à la somme des chiffres du terme précédent. Trouver le 10-ième terme.

Exercice 11 Prouver que pour tout n entier positif la fraction

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

est irréductible.

Exercice 12 Montrer que l'équation :

$$x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$$

n'a pas d'autre soltion rationnelle que $x=y=z=0$. Indice : commencer par chercher les soltions entières.

Exercice 13 Trouver tous les entiers n tels que 2^n+3 est un carré parfait. Même question avec 2^n+1.

Exercice 14 Déterminer les entiers n tel qu'il y ait un nombre impair de soltions (x, y) telles que :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

Exercice 15 Une cellule peut se diviser en 42 ou en 44 petites cellules. Combien de divisions faut-il pour obtenir, à partir d'une cellule exactement 1993 cellules ?

- Corrigés -

Solution de l'exercice 1 Nous ne traitons que le cas de l'année non bissextile (le cas de l'année bissextile se traite exactement de la même façon). Avoir un vendredi 12 revient exactement à avoir un lundi 1, nous allons alors compter les lundis 1. De plus $31 \equiv 3 \pmod 7$, ainsi on obtient le décalage dans la semaine entre le 1 janvier et le 1 février (il est de 3 jours : si le 1 janvier est un lundi alors le 1 février sera un jeudi). On fait alors ceci pour tous les mois :

$$3+28 \equiv 3 \pmod 7 \text{ pour mars}$$

$$3+31 \equiv 6 \pmod 7 \text{ pour avril}$$
$$6+30 \equiv 1 \pmod 7 \text{ pour mai}$$
$$1+31 \equiv 4 \pmod 7 \text{ pour juin}$$
$$4+30 \equiv 6 \pmod 7 \text{ pour juillet}$$
$$6+31 \equiv 2 \pmod 7 \text{ pour août}$$
$$2+31 \equiv 5 \pmod 7 \text{ pour septembre}$$
$$5+30 \equiv 0 \pmod 7 \text{ pour octobre}$$
$$0+31 \equiv 3 \pmod 7 \text{ pour novembre}$$
$$3+30 \equiv 5 \pmod 7 \text{ pour décembre}$$

On obtient donc 2 fois 0 modulo 7, 1 fois 1, 1 fois 3, 3 fois 3, 1 fois 4, 2 fois 5 et 2 fois 6. Ainsi il n'y aura qu'un seul vendredi 12 si l'année commence par un dimanche (jour -1 de la semaine qui fait apparaitre un seul 1 dans les résidus modulo 7), un samedi ou un jeudi, il en a 2 si l'année commence par un lundi, un mardi ou un mercredi et enfin il y en aura 3 si l'année commence par un vendredi. Notez que si l'année est bissextile alors il peut avoir 4 vendredi 12.

Solution de l'exercice 2 Regardons l'équation modulo 4. Si x et y sont impairs alors on aurait $1+1=z^2 \pmod 4$ ce qui est impossible car un carré ne peut pas être congru à 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 3 On a

$$10x = 5,12341234123412341234123412341234123412341234\ldots \text{ et}$$

$$100\,000x = 51234,12341234123412341234123412341234\ldots$$

Donc $100\,000x - 10x = 99\,990x = 51\,229$ et finalement :

$$x = \frac{51\,229}{99\,990}$$

qui est irréductible. Cette méthode se généralise facilement et montre que tout nombre qui admet un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme d'une fraction. Et réciproquement, dans le calcul du développement décimal on a seulement un nombre fini de restes et donc le développement décimal d'une fraction est nécessairement périodique.

Solution de l'exercice 4 On peut atteindre 64 car $64 = (2^3)^3/8$. En revanche on constate qu'après toutes les opérations on obtient une puissance de 2 avec un exposant multiple de 3 et comme 2011 n'est pas divisible par 3 il est impossible d'obtenir 2^{2011}.

Solution de l'exercice 5 Si un de ces nombres est congru à 0 modulo 2011 alors on a terminé. Sinon, par le principe des tiroirs, deux des nombres (notons les a et b et on peut supposer $a > b$) ont le même reste par la division par 2011. Alors $a-b$ est divisible par 2011 mais $a-b$ est de la forme $111\ldots111000\ldots000$ et ce nombre se factorise par $111\ldots111 \times 10^k$ et donc par le lemme de Gauss, comme 2011 est premier avec 10^k alors 2011 divise $111\ldots111$ (le nombre de 1 est nécessairement inférieur à 2011 par construction).

Solution de l'exercice 6 Le problème revient à compter le nombre de facteurs 5 dans le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ (car il y a autant de 0 que de facteur 10 et clairement il y a plus de facteur

2 que de facteur 5). Tous les 5 nombres on a un facteur 5, mais tous les $5^2 = 25$ il y en a un second (il n'y en a jamais 3 dans un seul nombre car ce nombre serait supérieur à $5^3 = 125$). Il y a donc $\frac{100}{5} = 20$ facteurs 5 et $\frac{100}{25} = 4$ facteurs 25. Il y a donc $20 + 4 = 24$ fois le chiffre 0 à la fin de $100!$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On a donc

$$1??1271153044 + 67 = 0 \pmod{97}$$

$$(1??) \times 10^{10} + 1271153044 + 67 = 0 \pmod{97}$$

Or on a $10^{10} = 49 \pmod{97}$ et $1271153044 = 54 \pmod{97}$ donc on a

$$(1??) \times 49 + 54 + 67 = 0 \pmod{97}$$

Et donc :

$$(1??) \times 49 = 73 \pmod{97}$$

Et comme $49 \times 2 = 1 \pmod{97}$ donc on peut multiplier les deux membres pour obtenir :

$$(1??) = 73 \times 2 = 146 \pmod{97}$$

La seule possibilité satisfaisant cette condition est : $(1??) = 146$ Donc le capitaine est né en 1946 et en octobre 2011 le capitaine a 65 ans.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Le prix total des quarante tickets est 200 euros. Supposons le problème possible. Après avoir réglé les comptes entre eux pour faire l'appoint, chaque passager a récupéré au moins une pièce. Le règlement des tickets a donc nécessité au plus 9 pièces. Mais $9.20 = 180 < 200$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Montrons qu'un nombre est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9, ainsi le résultat découlera immédiatement. Si en base 10 le nombre n s'écrit $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ alors

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \dots a_1.10 + a_0$$

Donc si on considère ce nombre modulo 9 on a (puisque $10 = 1 \pmod{9}$) :

$$n = a_k.1^k + a_{k-1}.1^{k-1} + \dots a_1.1 + a_0 = a_k + a_{k-1} + \dots a_1 + a_0 \pmod{9}$$

Ainsi n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 9.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> D'après la correction de l'exercice précédent, on sait que tous les termes sont divisibles par 9. D'autre part $a_1 = 3^{2012} = 9^{1006} < 10^{1006}$, donc le nombre de chiffres de a_1 est inférieur à 1005 et comme chaque chiffre est inférieur à 10 on a $a_2 \leq 9.1005 < 10\ 000$. De même $a_3 < 40$, $a_4 < 13$, et $a_5 < 10$. Donc à partir de a_5 la suite est constante et egale à 9.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On a $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$ donc par le théorème de Bezout on sait que $14n + 3$ et $21n + 4$ sont premiers entre eux et donc la fraction est irréductible.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Si on a une soltion rationnelle non nulle alors en multipliant par le cube du PPCM des dénominateurs de x, y et z alors on obtient une soltion entière non nulle.

Il suffit donc de prouver le théorème pour les valeurs entières. Supposons qu'on ait un triplet d'entiers (x_0, y_0, z_0) dont au moins un est non nul qui vérifie l'équation. Si on regarde l'équation modulo 3 alors on a

$$x_0 = 0 \pmod 3$$

donc x_0 doit être multiple de 3, on peut donc noter $x_0 = 3x_1$ pour un x_1 entier. Donc l'équation devient :

$$27x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 27x_1y_0z_0 = 0 \text{ donc :}$$

$$y_0 + 3z_0 + 9x_1 - 9x_1y_0z_0 = 0$$

donc une autre soltion est (y_0, z_0, x_1) et de la même façon on peut montrer que $y_0 = 3y_1$ et $z_0 = 3z_1$ avec y_1 et z_1 entiers et donc (x_1, y_1, z_1) est une nouvelle soltion. Ainsi x_0, y_0 et z_0 sont divisibles par toute puissance de 3, ce qui est impossible pour des entiers non nuls.

Solution de l'exercice 13 Un carré n'est jamais congru à 3 modulo 4 (si vous ne me croyez pas, essayez vous verrez !), donc $2^n + 3$ ne peut pas être un carré si $n \geq 2$. Et si $n = 1$ alors $2^1 + 3 = 5$ n'est pas un carré et si $n = 0$ alors $2^0 + 2 = 3$ est un carré. La deuxième question est moins facile. On cherche n et x, deux entiers, tels que $2^n + 1 = x^2$. Autrement dit :

$$2^n = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

donc $x + 1$ et $x - 1$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 sont 2 et 4 donc $2^n = (x - 1)(x + 1) = 2.4 = 8$ donc $n = 3$ est la seule soltion.

Solution de l'exercice 14 L'équation se re-écrit :

$$(x - n)(y - n) = n^2$$

Il y a donc autant de soltions que de diviseur de n. Pour chaque diviseur a de n on peut associer un autre diviseurs n/a, ce diviseur est toujours différent si et seulement si n n'est pas un carré. Donc n a un nombre pair de diviseurs si et seulement si n n'est pas un carré. Donc l'équation précédente a un nombre impair de soltions si et seulement si n est un carré.

Solution de l'exercice 15 Chaque division ajoute à la population soit 41 soit 43 nouvelles cellules (car la cellule initiale disparait). On note a le nombre de divisions en 42 et b le nombre de divisions en 44. On doit ajouter 1992 cellule à la cellule initiale donc :

$$41a + 43b = 1992$$

Donc on a $41(a + b) + 2b = 1992$ et comme $b \geq 0$ on a $41(a + b) \leq 1992$ et donc $a + b \leq \frac{1992}{41} = 45,8\ldots$. Mais on a aussi $43(a + b) - 2a = 1992$ et comme $a \geq 0$ on a $43(a + b) \geq 1992$ et donc $a + b \geq \frac{1992}{43} = 46,3\ldots$. De plus $41(a + b) = 1992 - 2b$ montre que $a + b$ doit être pair et donc finalement comme $47 \leq a + b \leq 48$ on a que $a + b = 48$.

3 Stratégies de base

1 Cours

Ce cours n'est pas à proprement parler de la combinatoire, mais la présentation de deux "stratégies de base" qu'il est important de savoir manipuler tant en combinatoire que dans bien d'autres chapitres des mathématiques. Un très grand nombre de démonstrations d'arithmétique, notamment, font appel au principe des tiroirs.

- Principe des tiroirs -

Si l'on range au moins $n+1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets. En plus généralement, si l'on range au moins $kn+1$ objets dans ces mêmes n tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins $k+1$ objets. Par exemple : sachant qu'un humain a moins de 300 000 cheveux et qu'il y a 3 000 000 de parisiens, au moins deux parisiens ont le même nombre de cheveux. On peut même préciser qu'il existe 10 parisiens au moins ayant le même nombre de cheveux. S'il existait 3 000 001 parisiens ayant chacun au plus 300 000 cheveux, on pourrait affirmer qu'au moins 11 d'entre eux ont le même nombre de cheveux.

Un des premiers résultats mathématiques qu'on peut en déduire, c'est que le développement décimal de la fraction $\frac{p}{q}$ est périodique de période strictement inférieure à q. En effet, lorsqu'on pose la division, à chaque nouvelle décimale correspond un nouveau reste. Parmi q restes consécutifs, soit l'un est nul (et la division s'arrête, ce qui correspond à une période 1 puisque à partir d'un certain rang, toutes les décimales sont égales à 0), soit ces q restes sont tous entre 1 et $q-1$, ce qui prouve que deux d'entre eux au moins, r_i et r_j sont égaux. Comme chaque reste détermine toute la suite de la division, $r_{i+1}=r_{j+1}$, $r_{i+2}=r_{j+2}$... donc le développement décimal sera périodique de période au plus $|i-j|<q$.

Exercice 1

1) Montrer que quel que soit n, parmi $(n+1)$ entiers quelconques a_0, a_1 ... a_n, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.
2) Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

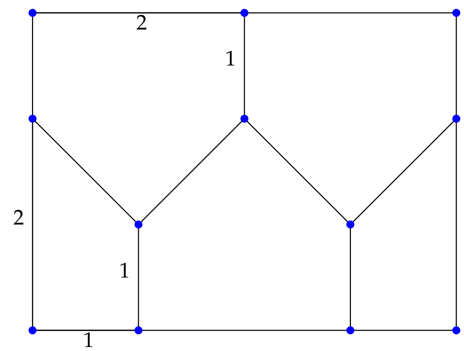
1) On classe les nombres dans les n classes modulo n : $\{kn\}, \{kn+1\}...\{kn+(n-1)\}$. Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par n.
2) On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0=0, a_1=1, a_2=11, a_3=111$ etc... : a_i est l'entier formé de i chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont une différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 2 On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

Exercice 3 On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles 2×1. Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à $\sqrt{5}$.



- Invariants -

Un invariant est une caractéristique d'une situation qui ne peut pas changer pour un problème donné, quels que soient les choix arbitraires que l'on fait. On regroupera dans ce chapitre différents types de problèmes : des problèmes de coloriages ou une caractéristique est vraie pour toutes les situations autorisées par l'énoncé, et ceux où l'on étudie un processus qui se déroule de manière imprévisible si ce n'est qu'une caractéristique reste invariante tout au long du processus.

Exercice 4 On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2011. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> C'est encore un argument de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve, à chaque étape du processus, la même parité. Or au départ elle vaut : $1+2+...+2011 = \frac{2011\times2012}{2}$ qui est pair. Cette somme restera donc toujours paire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre pair, ce ne peut pas être 1.

Pour prouver que ce peut être 0 (bien que ce ne soit pas demandé), il faudrait un tout autre raisonnement. On grouperait les nombres ainsi : $(1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), ...(2008, 2009, 2010, 2011)$. Le premier triplet peut être ramené à 0 en remplaçant $(2, 3)$ par 1 puis $(1, 1)$ par 0. Et de même pour chacun des quadruplets suivants, en remplaçant $(4n, 4n + 2)$ par 2, $(4n + 1, 4n + 3)$ par 2, puis $(2, 2)$ par 0. Prouver que la réponse est "oui" ou que la réponse est "non" nécessite des raisonnements totalement différents, il est donc impératif de deviner le plus vite possible la bonne réponse car on perd beaucoup de temps lorsqu'on part dans la mauvaise direction. La technique des invariants est utilisable pour prouver une impossibilité. Pour prouver que quelque chose est possible, habituellement on montre qu'on peut le construire explicitement.

Exercice 5 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Solution de l'exercice 5 Si la réponse était "oui", il faudrait décrire une suite de déplacements aboutissant à la solution. Pour prouver que la réponse est "non", on peut faire appel à un invariant. Considérons un triangle équilatéral formé de trois arbres non voisins. Ce triangle contient au départ 3 oiseaux. Si tous les oiseaux sont sur le même arbre, le triangle contiendra 0 ou 6 oiseaux. Or il est facile de voir que chaque déplacement laisse invariante la parité du nombre d'oiseaux perchés sur le triangle : comme chaque arbre du triangle a ses voisins hors du triangle et inversement, soit les deux oiseaux qui s'envolent étaient sur le triangle et le nombre d'oiseaux sur le triangle diminue de 2. Soit aucun n'était sur le triangle et le nombre augmente de 2. Soit l'un était sur le triangle et l'autre hors du triangle, auquel cas le nombre d'oiseaux reste inchangé. Dans tous les cas, le nombre d'oiseaux sur le triangle restera impair et ne vaudra jamais 0 ni 6.

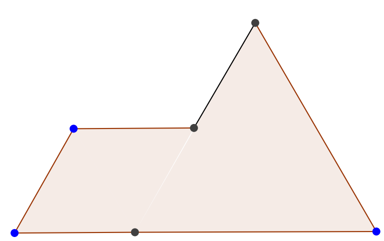
- Pavages -

Nous conclurons par des problèmes qui ne sont pas vraiment des problèmes d'invariants : peut-on paver telle surface avec des objets de telle forme ? Là encore, il faut distinguer clairement le cas où la réponse est oui (il suffit alors de montrer un exemple de pavage solution) du cas où la réponse est non : souvent, on a alors recours à un coloriage pour montrer que, si l'on pouvait paver, le nombre de cases de telle couleur ne serait pas ce qu'il est effectivement. Ci-dessous trois exemples typiques :

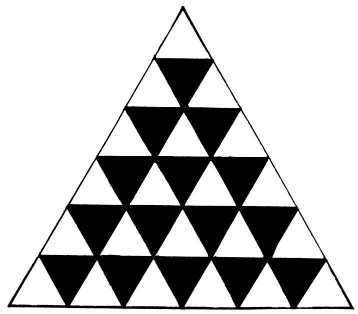
Exercice 6 On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

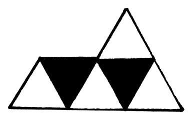
Solution de l'exercice 6 Problème très clasique : chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit 30 cases noires et 32 cases blanches soit 32 noires et 30 blanches. Si l'on parvient à placer 30 dominos (ce qui reste à prouver), les deux dernières cases seront obligatoirement de même couleur, et on ne pourra pas y placer un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.

Exercice 7 Peut-on paver un triangle équilatéral de coté 6 avec des "sphinx" de forme ci-dessous ?



<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Le triangle équilatéral de côté 6 peut être divisé en 36 triangles de côté 1, dont $15 = 1+2+3+4+5$ sont "pointe en haut" (colorions-les en gris) et $21 = 1+2+3+4+5+6$ "pointe en bas" :

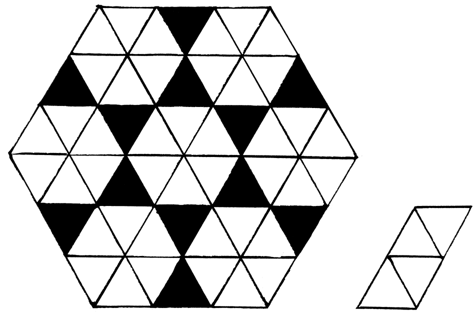




Or un sphinx est composé de 6 triangles (qui est bien un diviseur de 36, ce n'est pas là que se situe l'impossibilité), mais parmi ces $-$ triangles, 4 sont dans un sens et 2 dans l'autre. Quelle que soit l'orientation de mon sphinx, celui-ci couvrira donc soit 2 cases grises et 4 cases blanches, soit 2 cases blanches et 4 cases grises, mais avec un nombre quelconque de sphinx on ne pourra couvrir qu'un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases grises. En particulier, on ne couvrira jamais 15 cases grises et 21 cases blanches : il restera un nombre impair de cases grises non pavées et un nombre impair de cases blanches non pavées.

Exercice 8 Combien peut-on placer au maximum de parallélogrammes de cotés 1 et 2, d'angles 60° et 120°, dans un hexagone régulier de coté 3 ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Appelons s l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1. L'hexagone régulier peut être découpé en 6 triangles équilatéraux de côtés 3, donc d'aire $9s$: son aire totale est $54s$. Or les parallélogrammes ont chacun pour aire $4s$: comme $\frac{54s}{4s} > 13$, on devrait pouvoir en placer 13. Mais une fois encore, ce n'est pas possible : il suffit de colorier l'hexagone en 12 triangles noirs et 42 triangles blancs de sorte qu'un parallélogramme, quelles que soient les quatre cases qu'il occupe, couvre obligatoirement un et un seul triangle noir. On peut donc placer au maximum 12 parallélogrammes, mais il faut encore prouver qu'on peut effectivement en placer 12, ce qui est relativement facile (en ne couvrant pas du tout l'hexagone blanc du centre par exemple).



2 TD

- Énoncés -

Exercice 1 On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 2 15 stagiaires ont mangé 100 gauffres. Prouver qu'au moins deux de ces stagiaires ont mangé le même nombre de gauffres.

Exercice 3 Sur un tableau sont écrits les nombres de 1 jusqu'à 2011. On choisit deux nombres, et, à leur place, on écrit leur différence. On procède de la sorte jusqu'à obtenir un seul nombre. Montrer que celui-ci est forcément pair.

Exercice 4 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu. Montrer que pour tout réel $x > 0$ il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Exercice 5 On considère un échiquier 8×8, chacune des cases étant blanches ou noire de manière usuelle.

a) On a le droit de changer la couleur des cases constituant une ligne ou une colonne. Peut-on arriver à n'avoir plus qu'une seule case noire ?

b) Même question si on a le droit de changer la couleur des cases constituant n'importe quel carré de taille 2×2.

Exercice 6 29 stagiaires se rencontrent au foyer de Cachan, chacun serrant la main à tous les autres. Montrer qu'à n'importe quel moment de la rencontre, il y a toujours deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

Exercice 7

a) Les nombres $1, 2, \ldots, 20$ sont écrits au tableau. On peut effacer deux nombres quelconques a et b et écrire à leur place le nombre $a + b - 1$. Quel nombre sera au tableau après 19 opérations ?

b) Et si l'on remplace deux nombres a et b par $a + b + ab$?

Exercice 8 Est-il possible de paver avec des triminos 3×1 :

(i) un damier 8×8 ?

(ii) un damier 8×8 auquel manque le coin en haut à gauche ?

Exercice 9 On coupe un coin de l'échiquier $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Pour quelles valeurs de n peut-on recouvrir les cases restantes par des dominos 2×1 de telle sorte que la moitié des dominos soient horizontaux ?

- Corrigés -

Solution de l'exercice 1

(i) Les deux mots sont équivalents : $xxyy \mapsto xyyxy \mapsto xyyyyx$.

(ii) Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.

(iii) Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 2 Supposons le contraire. Alors les stagiaires ont mangé au moins $0 + 1 + \cdots + 14 = \frac{14(14+1)}{2} = 105 > 100$ gauffres. Contradiction.

Solution de l'exercice 3 La somme $S = 1 + 2 + \cdots 2011 = 2011 \cdot 2012/2$ est paire. On voit que la parité de la somme de tous nombres écrits au tableau est un invariant. Le nombre restant sera donc forcément pair.

Solution de l'exercice 4 On considère un triangle équilatéral de côté x. Il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.

Solution de l'exercice 5

(i) Une figure pavée entièrement par des triminos 3×1 possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.

(ii) On colorie la deuxième figure avec 3 couleurs différentes en les alternant de sorte que la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur et de sorte qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. La réponse est encore *non*.

Solution de l'exercice 6 Dans les deux cas de figure, on voit que c'est impossible car la parité du nombre de cases noires est un invariant.

Solution de l'exercice 7 À n'importe quel moment, chaque stagiaire a serré un nombre de mains variant entre 0 et 28. Comme il ne peut pas y avoir à la fois quelqu'un ayant serré aucune main et quelqu'un ayant serré toutes les mains, d'après le principe des tiroirs, il y a deux stagiaires qui ont serré exactement le même nombre de mains.

Solution de l'exercice 8

a) Si sur le tableau sont écrits n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors l'expression $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n$ reste constante. Au début elle est égale à $S_{20} = 1 + 2 + \cdots + 20 - 20 = (1+20)20/2 - 20 = 190$. Ainsi, si à la fin il reste le nombre r, alors $190 = S_1 = r - 1$, d'où $r = 191$.

b) On vérifie aisément qu'étant donnés n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sur le tableau, l'opération ne change pas le produit $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$. Soit r le nombre qui reste, alors $r + 1 = (1+1)(2+1) \cdots (20+1) = 21!$, d'où $r = 21! - 1$.

Solution de l'exercice 9 Si n est pair, on trouve aisément un recouvrement qui convient. Lorsque n est impair, montrons qu'il est impossible de satisfaire les conditions. On colorie l'échiquier en deux couleurs : on colorie les cases des première, troisième, etc. lignes en bleu et les cases des seconde, quatrième, etc. lignes en rouge. Il y a alors $2n^2 + n$ cases rouges et $2n^2 + 3n$ cases bleues, soit un total de $4n^2 + 4n$ cases. On aura donc besoin de $2n^2 + 2n$ dominos. Il y aura donc $n^2 + n$ dominos horizontaux et autant de verticaux.

Chaque domino vertical recouvre une case de chaque couleur. Une fois les dominos verticaux placés, il reste n^2 cases rouges et $n^2 + n$ cases bleues à recouvrir par des dominos horizontaux. D'après le coloriage, un domino horizontal recouvre des cases de la même couleur. Il faut donc que n soit pair. Autrement dit, lorsque n est impair, il sera impossible de recouvrir l'échiquier suivant les conditions de l'énoncé.

IV. Groupe des avancés

1 Géometrie

1 Cours

Le groupe des avancés a étudié la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, et chemin faisant quelques propriétés des vecteurs et du produit scalaire ont été mentionnés. Nous renvoyons au cours de Pierre Dehornoy disponible sur le site d'Animath à l'adresse `http://www.animath.fr/IMG/pdf/cours-geom.pdf` pour les théorèmes relatifs à la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Voici les différents exercices d'application qui ont été vus en cours.

- Énoncés -

Exercice 1 Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et en B. Soit Δ une droite tangente aux deux cercles en M et en N. Montrer que (AB) coupe le segment $[MN]$ en son milieu.

Exercice 2 Soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles Γ_1, Γ_2. On suppose que parmi les droites (AB), (CD) et (EF) il n'y en a pas deux qui soient parallèles. Alors les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes si, et seulement si, les points A, B, E et F sont cocycliques.

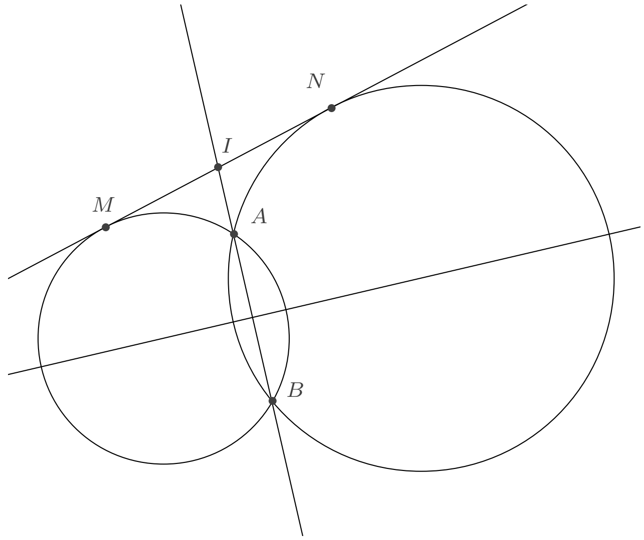
Exercice 3 Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 4 Soit ABC un triangle qui n'est ni rectangle, ni isocèle. Notons respectivement A_1, B_1 et C_1 les projetés orthogonaux de A sur (BC), B sur (CA) et C sur (AB). Notons A_2 le point d'intersection des droites (BC) et (B_1C_1), B_2 celui des droites (AC) et (A_1C_1), C_2 celui des droites (AB) et (A_1B_1). Montrer que les points A_2, B_2, C_2 sont alignés.

Question bonus : montrer que la droite qui passe par A_2, B_2 et C_2 est orthogonale à (OH), où O est le centre du cercle circonscrit de ABC et H son orthocentre.

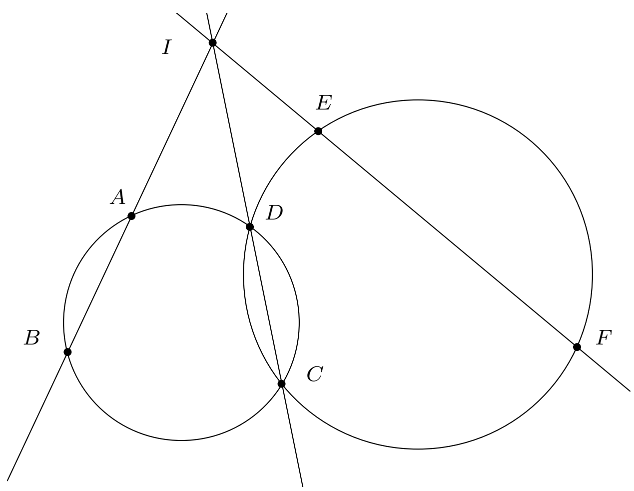
- Corrigés -

Solution de l'exercice 1



La puissance de I par rapport au premier cercle vaut $IM^2 = IA \cdot IB$. La puissance de I par rapport au deuxième cercle vaut $IA \cdot IB = IN^2$. On en déduit que $IM^2 = IN^2$, d'où $IM = IN$.

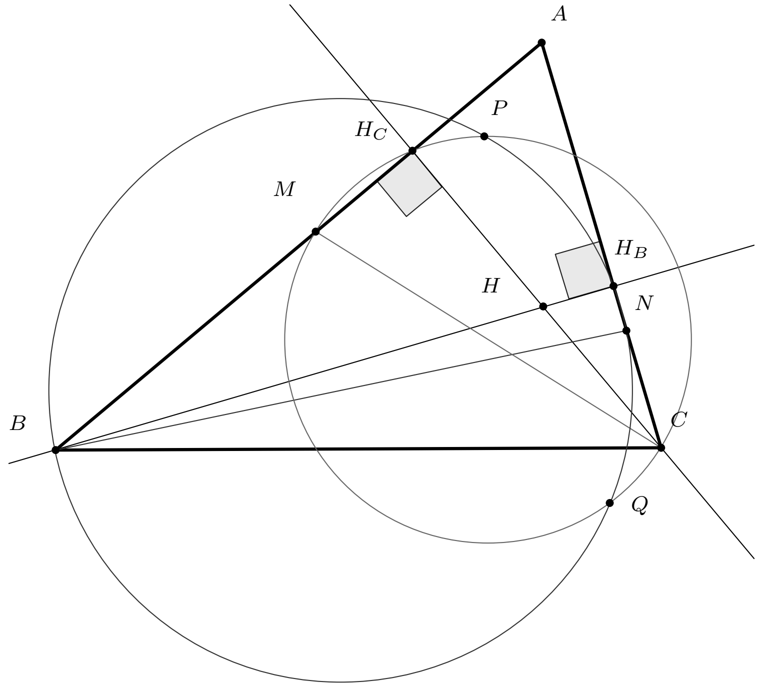
<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à $ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

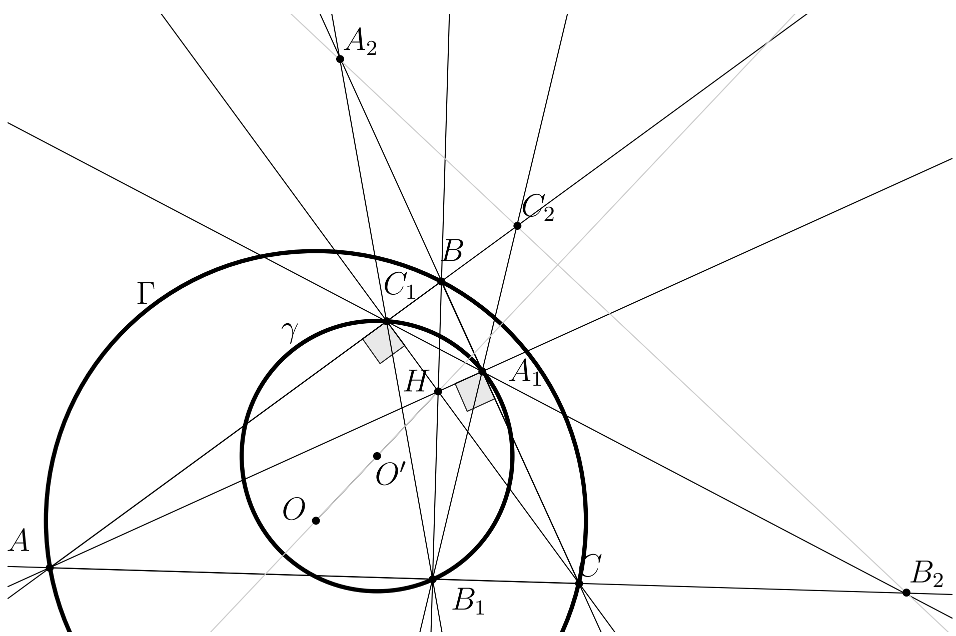


Nous allons montrer que H a la même puissance par rapport aux deux cercles de la figure, ce qui impliquera que H est sur leur axe radical, qui est (PQ).

Pour cela, comme $(BH_B) \perp (AC)$, H_B est sur le cercle de diamètre $[BN]$. La puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BN]$ vaut donc $-HB \cdot HH_B$. De même, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ vaut $-HC \cdot HH_C$.

Or les points B, H_C, H_B, C sont cocycliques : ces points sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$. On en déduit que $-HB \cdot HH_B = -HH_C \cdot HC$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4



Notons γ le cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$ (qu'on appelle cercle d'Euler de ABC) et Γ le cercle circonscrit à ABC. Nous allons montrer que les points A_2, B_2, C_2 ont même puissance par rapport à γ et Γ, ce qui impliquera qu'ils sont alignés sur l'axe radical de γ et Γ.

La puissance de B_2 par rapport à Γ vaut $B_2C \cdot B_2A$ et la puissance de B_2 par rapport à γ vaut $B_2A_1 \cdot B_2C_1$. Or, comme dans l'exercice précédent, A, C_1, A_1, C sont cocyliques. Donc $B_2A_1 \cdot B_2C_1 = B_2C \cdot B_2A$. Ainsi B_2 est sur l'axe radical de γ et Γ. De la même manière, on montre qu'il en est de même pour C_2 et A_2.

Pour résoudre la question bonus, on sait que l'axe radical de γ et Γ est orthogonal à la droite joignant les centres de γ et Γ. Notons donc O le centre du cercle circonscrit de ABC et O' le centre du cercle circonscrit de $A_1B_1C_1$, de sorte que la droite passant par A_2, B_2, C_2 est orthogonale à (OO'). Il suffit donc de montrer que $H \in (OO')$. D'après les propriétés du cercle d'Euler du triangle ABC, O' est en fait le milieu de $[OH]$ (pour le retrouver, considérer l'homothétie de centre le centre de gravité de ABC et de rapport $-1/2$), ce qui conclut.

2 TD

- Énoncés -

Exercice 1 Soit ABC un triangle.

1) Montrer que le point d'intersection de la médiane issue de A et de la médiane issue de B se coupent en l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection des médianes s'appelle le centre de gravité du triangle.

2) Montrer que la hauteur issue de A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}$. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point qu'on appelle l'orthocentre du triangle.

Exercice 2 Dans un triangle ABC on note O et G le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité.

1) Reconnaître le point X tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2) En déduire que si H est l'orthocentre du triangle ABC, on a la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Exercice 3 On note par h_1, h_2, h_3 les longueurs des trois hauteurs d'un triangle et par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle. Montrer que

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, la médiatrice de $[AB]$ et la hauteur issue de B sont concourantes. Montrer que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$, la médiatrice de $[AC]$ et la hauteur issue de C sont aussi concourantes.

Exercice 5 Soit $\mathcal{C}$ un cercle et BC une corde de $\mathcal{C}$. Soit A le milieu de l'arc BC. Par A on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent le segment $[BC]$ en F et G respectivement. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible.

Exercice 6 Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Montrer que l'on a

$$\frac{AC}{BC}\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 7 Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et soient A', B' et C' les symétriques de I par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Le cercle circonscrit à $A'B'C'$ passe par B. Trouver $\widehat{ABC}$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle. On note H l'orthocentre et A', B' et C' les milieux des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que les symétriques de H par rapport aux cotés du triangle ainsi que les symétriques de H par rapport à A', B' et C' sont tous sur le cercle circonscrit à ABC.

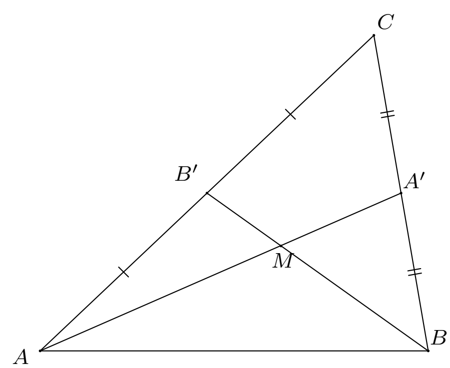
Exercice 9 Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus et dans lequel $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre $[BC]$ rencontre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en M et N. On note O le milieu du côté $[BC]$. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BMR et CNR se rencontrent en un point du côté $[BC]$.

Exercice 10 Soit un triangle ABC dont on note Γ le cercle inscrit. Soit Γ_A l'unique cercle tangent aux cotés $[AB]$ et $[AC]$ ainsi qu'à Γ. On définit de même Γ_B et Γ_C. Soient r, r_A, r_B, r_C les rayons respectifs des cercles $\Gamma, \Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$. Montrer que

$$r \leqslant r_A + r_B + r_C.$$

- Corrigés -

Solution de l'exercice 1



1) On note A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[AC]$, on a alors par la relation de Chasles et puisque $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'M} \\ &= \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{A'M}\end{aligned}$$

Puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M}$ sont parallèle à (AA'), le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ est parallèle à la droite (AA'). De la même façon le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ est parallèle à la droite (BB'). Comme les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèle on a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
Soit N le point d'intersection de la médiane issue de A et de la médiane issue de C, on a de la même façon $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$. En soustrayant les deux égalités, on obtient

$$3\overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

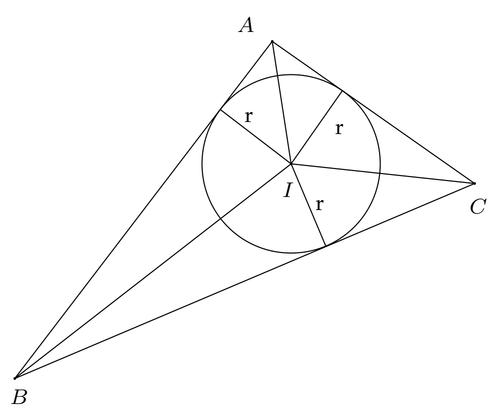
Donc $M = N$ et les trois médianes sont concourantes.

2) La hauteur issue de A est constituée de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$ ce qui revient à dire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$ c'est équivalent à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}$.
De la même façon la hauteur issue de B est l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}$ et la hauteur issue de C est l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$.
Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B on a alors les égalités

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}$$
$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH}$$

Comme les deux memebres de gauches sont égaux, on en déduit l'égalité $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH}$ c'est-à-dire que H est sur la hauteur issue de C. Les trois hauteurs sont donc concourantes en C.

Solution de l'exercice 2



1) Par la relation de Chasles on a $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Si on note A' le milieu de $[BC]$ on a aussi $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'}$ car $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$. On sait que (OA') est la médiatrice de $[BC]$ on a donc

$$\overrightarrow{AX}.\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{BC} = 0$$

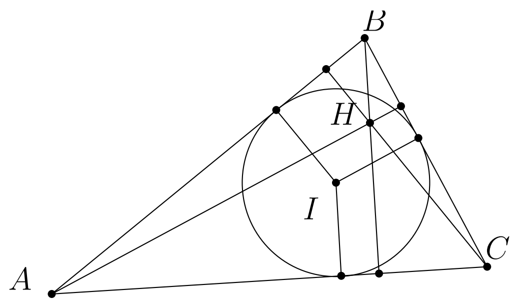
Par conséquent, X est sur la hauteur issue de A. de la même façon X est sur les hauteurs issues de B et C : X est donc l'orthocentre H du triangle ABC.

2) D'après la question précédente on a $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Par la relation de Chasles on a

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

Or, d'après l'exercice 1 on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. On obtient alors l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 3



On note a, b et c les longueurs respectives de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et I le centre du cercle inscrit. Puisque I est à distance r de chacun des cotés du triangle ABC, les aires des triangles BIC, AIC et AIB sont les suivantes

$$\mathcal{A}(BIC) = \frac{1}{2}ra$$

$$\mathcal{A}(AIC) = \frac{1}{2}rb$$

$$\mathcal{A}(AIB) = \frac{1}{2}rc$$

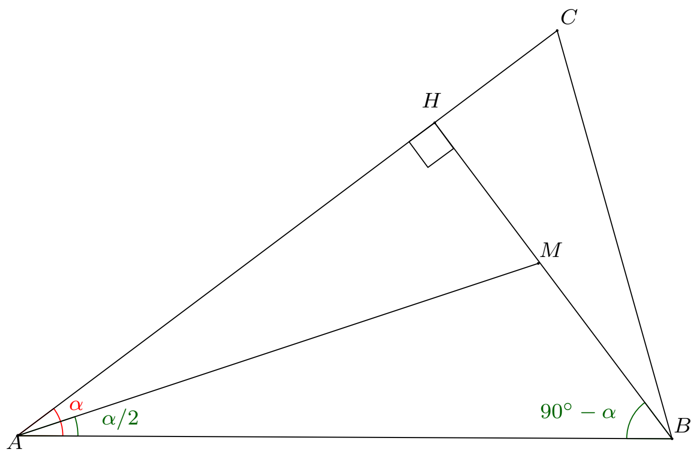
L'aire du triangle ABC est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$. Si h_1, h_2 et h_3 sont les longueurs des hauteurs issues de A, B et C respectiveùent on a aussi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}h_1a = \frac{1}{2}h_2b = \frac{1}{2}h_3c$$

On a donc $h_1a = r(a+b+c)$ et $\frac{1}{h_1} = \frac{a}{r(a+b+c)}$. De la même façon $\frac{1}{h_2} = \frac{b}{r(a+b+c)}$ et $\frac{1}{h_3} = \frac{c}{r(a+b+c)}$, d'où

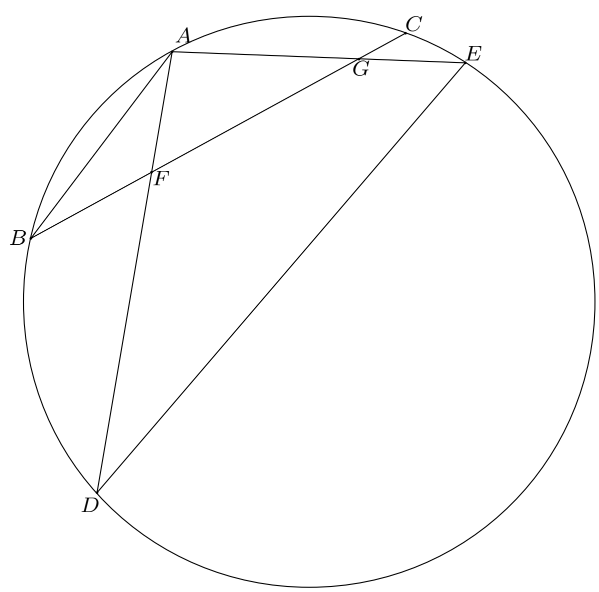
$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a}{r(a+b+c)} + \frac{b}{r(a+b+c)} + \frac{c}{r(a+b+c)} = \frac{1}{r}.$$

Solution de l'exercice 4



On appelle triangle spécial un triangle ABC tel que la bissectrice de l'angle en A, la hauteur issue de B et la médiatrice de $[AB]$ sont concourantes. On va montrer qu'un triangle est spécial si et seulement si $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ce qui résoudra l'exercice. Pour cela on considère un triangle ABC quelconque, on note H le pied de la hauteur issue de B, M le point d'intersection de (BH) et la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Puisque BHA est rectangle en H, on a $\widehat{ABM} = 90^\circ - \alpha$. Comme (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ on a $\widehat{BAM} = \frac{\alpha}{2}$.
Le triangle ABC est spécial si et seulement si M est sur la médiatrice de $[BC]$ c'est-à-dire si et seulement si BMC est isocèle en M ce qui est aussi équivalent à $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$. d'après ce qui précède c'est la même chose que $90^\circ - \alpha = \frac{\alpha}{2}$ c'est-à-dire $\alpha = 60^\circ$.

Solution de l'exercice 5



On a $180^\circ - \widehat{DFG} = 180^\circ - \widehat{AFB} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$. Par la propriété de l'angle inscrit, on a $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$. Comme A est le milieu de l'arc BC on a aussi $\widehat{AEC} = \widehat{AEB}$. On en déduit que $180^\circ - \widehat{DFG} = \widehat{AEB} + \widehat{BED} = \widehat{AED} = \widehat{GED}$ donc D, F, G et E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6

Par la propriété de l'angle inscrit, on a $\widehat{EAC} = \widehat{BDE}$ et comme évidemmment $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ les triangles ACE et DBE sont semblables dans cet ordre, on a donc

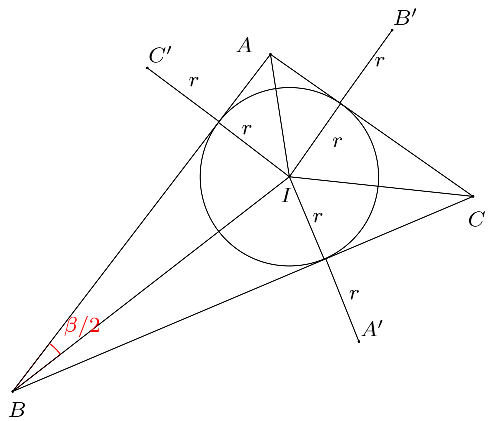
$$\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{DE}$$

De la même façon les triangles ADE et CBE sont semblables dans cet ordre, on a donc

$$\frac{AD}{CB} = \frac{DE}{BE}$$

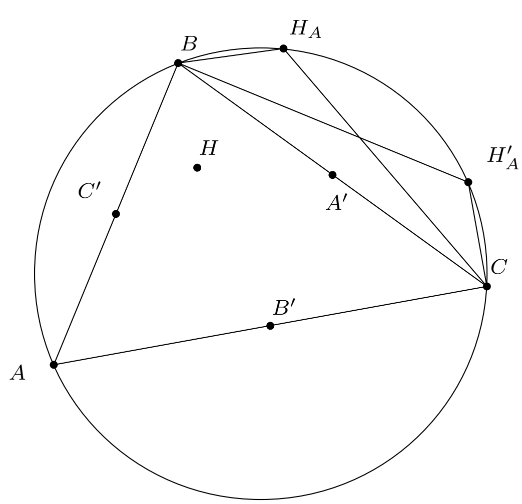
En multipliant les deux égalités on obtient celle de l'énoncé.

Solution de l'exercice 7



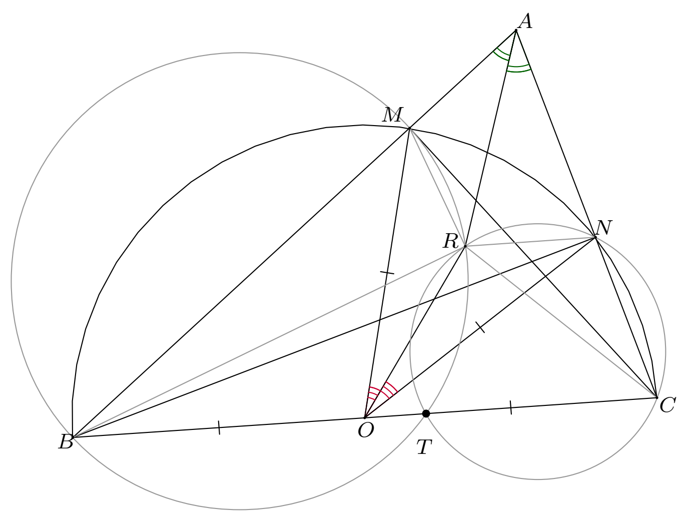
Notons r le rayon du cercle inscrit. On a alors $IA' = IB' = IC' = 2r$, donc le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est le cercle de centre I et de rayon $2r$. Puisque B est sur ce cercle on a $IB = 2r$. Notons $\beta = \widehat{ABC}$ et H le projeté orthogonal de I sur $[AB]$. On a alors $\widehat{ABI} = \frac{\beta}{2}$ et dans le triangle rectangle IHB on a $\sin(\beta/2) = \frac{r}{2r} = 1/2$ donc $\beta/2 = 30^\circ$ et $\beta = 60^\circ$.

Solution de l'exercice 8



Soit H_A le symétrique de H par rapport à (BC) et H'_A le symétrique de H par rapport à A'. On veut montrer que A, B, H_A, H'_A et C sont des points cocycliques ce qui revient à montrer que $\widehat{BH_AC} = \widehat{BH'_AC} = 180° - \widehat{BAC}$. Or, on a $\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC} = \widehat{BH'_AC}$. Tout revient donc à montrer que $\widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$, une simple chasse aux angles donne le résultat.

Solution de l'exercice 9



Soit T l'autre point d'intersection des cercles circonscrits à BMR et CNR. On doit montrer que $\widehat{BTR} + \widehat{CTR} = 180°$. Mais on a $\widehat{BTR} = 180 - \widehat{BMR} = \widehat{AMR}$ et $\widehat{CTR} = 180 - \widehat{CNR} = \widehat{ANR}$. Tout revient donc à voir que $\widehat{AMR} + \widehat{ANR} = 180°$ ou encore que R est sur le cercle circonscrit à MAN.

Les points M et N sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, on a donc $OM = ON$ et le triangle MON est isocèle en O, par conséquent la droite (OR) qui est la bissectrice de $\widehat{MON}$ est aussi la médiatrice de $[MN]$: R est donc aussi le point d'intersection de la médiatrice de $[MN]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$.

Soit R' le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$ et du cercle circonscrit à MAN, R' est alors le milieu de l'arc MN donc est aussi sur la médiatrice de $[MN]$. Par conséquent R' est aussi l'intersection de la bissectrice de $\widehat{MAN}$ et la médiatrice de $[MN]$ donc $R = R'$.

2 Arithmétique

1 Cours

- Équations diophantiennes-

Les équations diophantiennes sont des équations dont on recherche des solutions entières (ou rationnelles). Trouver deux réels x et y tels que $y^2 = x^2 + x + 1$ est facile, il suffit de choisir par exemple : $x = 1$ et $y = \sqrt{3}$, mais on ne peut pas trouver deux entiers (hormis $x = 0$ et $y = 1$)

vérifiant cette équation car x^2+x+1 est compris entre x^2 et $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ et il ne peut pas exister de carré entre ces deux carrés consécutifs. Certaines équations diophantiennes sont parmi les problèmes les plus difficiles de toute l'histoire des mathématiques, par exemple le célèbre "grand théorème de Fermat" : montrer que pour $n \geq 3$, on ne peut pas trouver d'entiers strictement positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, que les plus grands mathématiciens du monde ont cherché pendant plus de trois siècles, découvrant à cette occasion beaucoup de nouveaux outils mathématiques, jusqu'à ce que l'équation soit totalement résolue en 1995.

Exercice 1 Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (x, y, z) avec $x \leq y \leq z$, tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Q}$, l'équation : $2x^3 + xy - 7 = 0$

Exercice 3 Trouver deux solutions simples de l'équation : $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$, x et y étant des entiers positifs ou nuls.

Trouver trois entiers a, b et c tels que, si (x, y) est solution de l'équation, $(ax + by, cx + ay)$ est lui aussi solution.

En déduire que l'équation admet une infinité de solutions.

Exercice 4 Trouver tous les entiers x solutions de l'équation : $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$

Solution de l'exercice 1 Comme $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, on doit avoir nécessairement $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$ soit $x \leq 3$. Si $x = 3$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$, donc $y \leq 3$: seule solution possible $(3, 3, 3)$. Si $x = 2$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, donc $y \leq 4$: deux solutions, $(2, 4, 4)$ et $(2, 3, 6)$. Et il est clair que $x = 1$ ne convient pas, car $\frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ne peut pas être nul.

Solution de l'exercice 2 L'équation peut s'écrire : $x\left(2x^2 + y\right) = 7$. Dans $\mathbb{Z}$, cela nécessite que x soit un diviseur de 7, auquel cas $y = \frac{7}{x} - 2x^2$, d'où quatre possibilités :

$x = 1, y = 5, x = -1, y = -9, x = 7, y = -97, x = -7, y = -99$.

Dans $\mathbb{Q}$, x peut être quelconque (non nul) : pour tout x rationnel non nul, $y = \frac{7}{x} - 2x^2$ est un rationnel tel que (x, y) vérifie l'équation.

Solution de l'exercice 3 Les solutions les plus simples sont celles vérifiant : $(x-1)^2 = 1, y = x+1$, mais il n'y en a que deux : $(0, 1)$ et $(2, 3)$. C'est à partir d'elles qu'on peut construire une infinité d'autres solutions de l'équation diophantienne.

Si l'on développe, l'équation s'écrit : $y^2 - 2x^2 = 1$. Pour que $(ax + by, cx + ay)$ soit solution lorsque (x, y) est solution, il suffit donc que pour tout (x, y), $(cx+ay)^2 - 2(ax+by)^2 = y^2 - 2x^2$. En étudiant séparément le terme en x^2, celui en xy et celui en y^2, on remarque que ceci est vrai si l'on a simultanément : $c^2 - 2a2 = -2$,$2ac - 4ab = 0$, $a^2 - 2b^2 = 1$. La condition du milieu entraîne $c = 2b$ auquel cas les deux autres conditions sont équivalentes. Or $a^2 - 2b^2 = 1$ est précisément l'équation que l'on étudie, dont on connait une racine autre que $(1, 0)$: $(3, 2)$. Si (x, y) est solution, $(3x + 2y, 4x + 3y)$ est aussi solution, strictement supérieure ($3x + 2y > x, 4x + 3y > y$), ce qui permet de construire une infinité de solutions : à partir de $(2, 3)$, on obtient $(12, 17)$, puis $(70, 99)$ etc... car $12 = (3 \times 2) + (2 \times 3)$, $17 = (4 \times 2) + (3 \times 3)$, et l'on a bien $17^2 - (2 \times 12^2) = 1$, et ainsi de suite... On pourrait montrer qu'on atteint ainsi toutes les solutions de l'équation diophantienne, mais ce n'est pas demandé.

Solution de l'exercice 4 En développant le membre de gauche, on a : $3x^3+9x^2+15x+9 = (x+3)^3$. Il en résulte que $x + 3$ est divisible par 3, donc x également, et on peut poser : $x = 3t$, ce qui nous conduit à : $81t^3 + 81t^2 + 45x + 9 = 27\left(t^3 + 3t^2 + 3t + 1\right)$ soit, après simplifications :

$3t^3-2t-1=0$. 1 est racine évidente, et on peut factoriser : $3t^3-2t-1=(t-1)(3t^2+3t+1)$. Le terme $3t^2+3t+1$ étant toujours strictement positif, cette équation admet pour unique racine (entière ou non) : $t=1$, donc l'équation initiale admet pour unique racine, a fortiori pour unique racine entière : $x=3$. La relation ; $3^3+4^3+5^3=6^3$ est classique.

- Rappel sur les congruences-

Deux entiers a et b sont congrus modulo n : $a \equiv b \pmod n$ si leur différence est divisible par n. C'est une relation d'équivalence, permettant de répartir tous les entiers en n classes de congruences : ceux de la forme nk, $nk+1$, ... $nk+(n-1)$. Ces classes se manipulent presque comme des nombres, avec des propriétés supplémentaires, notamment le (petit) théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Ceci se démontre en remarquant que modulo p, a, $2a$, ... $(p-1)a$ sont chacun dans une classe différente, donc $a \times 2a \times ... \times (p-1)a \equiv 1 \times 2 \times ... \times (p-1)$ (car à gauche et à droite, on retrouve toutes les classes non nulles modulo p), ce qui se simplifie.

Exercice 5 Montrer que, modulo 13, x^3 ne peut prendre que 5 valeurs distinctes.

Existe-t-il des couples (x,y) d'entiers tels que $x^4+6=y^3$?

Exercice 6 Montrer que l'équation : $4xy-x-y=z^2$ n'admet pas de solutions entières strictement positives, mais qu'elle admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7 Trouver tous les couples d'entiers positifs (x,y) tels que $7^x-3.2^y=1$

Solution de l'exercice 5 Pour trouver toutes les valeurs possibles de x^3 modulo 13, il suffit de faire le calcul pour $0,1,...12$ car au delà, si $a \equiv b \pmod{13}$, $a^3 \equiv b^3 \pmod{13}$. On fait un tableau :

$x \mod 12$	$x^3 \mod 13$	$x^4 \mod 13$
0	0	0
1	1	1
2	8	3
3	1	3
4	12	9
5	8	1
6	8	9
7	5	9
8	5	1
9	1	9
10	12	3
11	5	3
12	12	1

Les valeurs 1, 5 et 8 12 sont chacune prises trois fois : un cube est obligatoirement congru à 0, 1, 5 ou 12 modulo 13, et de même x^4 est obligatoirement congru à 0, 1, 3 ou 9 modulo 13, les valeurs 1, 3 et 9 étant chacune prises quatre fois. Ceci n'est pas une coïncidence : d'après le théorème de Fermat, tout a non multiple de 13 vérifie : $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, or $12 = 3 \times 4$, donc par $a^3 \equiv b \pmod{13}$ entraine $b^4 \equiv a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ tout comme $a^4 \equiv b \pmod{13}$ entraine $b^3 \equiv a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

Toujours est-il que x^4+6 est nécessairement congru, modulo 13, à 6, 7, 9 ou 2, et un cube ne peut pas être congru à l'une de ces valeurs, donc x^4+6 ne peut pas être un cube.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Il faut d'abord transformer l'équation avant de pouvoir dire quelque chose : dans le membre de gauche, on remarque le début d'un produit du type $a(x-b)(y-c) = axy - acx - aby + abc$. En comparant terme à terme, on trouve $a = 4$, $c = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, mais il faut ôter le terme constant $abc = \frac{1}{4}$. Autrement dit, $4xy - x - y = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(y - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = z^2 - \frac{1}{4}$. Ou encore, en multipliant par 4 : $(4x-1)(4y-1) = 4z^2+1$.

Les deux termes $(4x-1)$ et $(4y-1)$ du produit de gauche sont tous deux congru à 3 modulo 4, et c'est cela qui pose problème. En effet, un entier positif congru à 3 modulo 4 possède nécessairement au moins un facteur premier congru à 3 modulo 4, puisque un nombre impair a tous ses facteurs premiers impairs, donc congrus à 1 ou 3 modulo 4, et un produit de nombres tous congrus à 1 modulo 4 est nécessairement lui-même congru à 1 modulo 4. Soit p un facteur premier de $4x-1$ congru à 3 modulo 4 : $p = 4k+3$. Dire que p divise $4z^2+1$ revient à dire que $4z^2 \equiv -1 \pmod p$. Donc $\left(4z^2\right)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod p$. C'est impossible, car $\left(4z^2\right)^{2k+1} = (2z)^{2(2k+1)} = (2z)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, d'après le théorème de Fermat, et hormis pour $p = 2$, on ne peut pas avoir $-1 \equiv 1 \pmod p$. Ceci suffit à prouver que l'équation diophantienne n'admet pas de solution strictement positive.

En revanche, mis à part la solution triviale : $x = y = z = 0$, il existe des solutions négatives. En effet, si l'on choisit par exemple $x = -1$, l'équation devient : $-5y+1 = z^2$. Il suffit de choisir par exemple $z = 5k+1$, soit $z^2 = 25k^2+10k+1$ pour voir que l'équation est vérifiée avec $y = -5k-2$. Quel que soit k, $(-1, -5k-2, 5k+1)$ est solution de l'équation diophantienne.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> L'équation possède une première solution assez évidente : $x = y = 1$, manifestement la seule solution pour $y = 1$. L'énoncé n'exclut pas la possibilité que y soit nul, mais pour $y = 0$, il est clair qu'on ne peut pas avoir $7^x = 4$. Supposons maintenant $y \geq 2$: 3.2^y est divisible par $3.2^2 = 12$, donc une condition nécessaire pour que l'équation soit vérifiée est que $7^x \equiv 1 \pmod{12}$. Modulo 12, 7^x ne prend que deux valeurs : 7 lorsque x est impair, 1 lorsque x est pair. Donc pour $y \geq 2$, toute solution (x, y) vérifie nécessairement : x pair. Or si $x = 2k$, l'équation s'écrit : $3.2^y = 7^{2k} - 1 = \left(7^k+1\right)\left(7^k-1\right)$. Le facteur 3 divise nécessairement $7^k - 1$ car $7 \equiv 1 \pmod 3$, donc pour tout k, $7^k \equiv 1 \pmod 3$. Donc $7^k - 1 = 3.2^z$ et $7^k+1 = 2^{y-z}$. A priori, on ne connait pas z, mais pour que $7^k+1 = 2^{y-z} > 3.2^z = 7^k - 1$, il faut que $y - z > z$. Dès lors, $2^{y-z} - 3.2^z = \left(7^k+1\right) - \left(7^k-1\right) = 2$ est nécessairement divisible par 2^z, ce qui entraîne $z = 1$ ou $z = 0$, soit $7^k - 1 = 6$ ou $7^k - 1 = 3$. Seule la possibilité première fournit une solution : $k = 1$ donc $x = 2$ et $y = 4$. L'équation diophantienne admet donc en tout deux solutions : $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

2 TD

- Énoncés -

Exercice 1

a) Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ qui possèdent un nombre impair de diviseurs (positifs).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d le nombre de diviseurs de n, et D le produit de ses diviseurs. Montrer que $n^d = D^2$.

c) On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Exprimer le nombre de diviseurs de n en fonction des α_i.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 3

a) Soit a un entier supérieur ou égal à 2, et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $m \mid n$, alors $(a^m - 1) \mid (a^n - 1)$.

b) On suppose toujours que $m \mid n$. A quelle condition a-t-on $(a^m + 1) \mid (a^n + 1)$? Que peut-on dire dans le cas contraire ?

Exercice 4

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 8a + 7$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}^3$.

b) Trouver tous les entiers naturels n tels que $7^n + 8$ soit un carré parfait.

Exercice 5 Soit p un nombre premier. Montrer que si $a \equiv b \mod p$, alors $a^p \equiv b^p \mod p^2$.

Exercice 6 Les systèmes suivants admettent-ils des solutions ?

a) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 6 \mod 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 5 \mod 12 \\ x \equiv 7 \mod 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 10 \mod 12 \\ x \equiv 16 \mod 21 \end{cases}$

Exercice 7 Soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrer que pour tous entiers a et b, $(b-a) \mid (P(b) - P(a))$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = 0$.

Exercice 9

a) Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4, et a et b deux entiers tels que $p \mid (a^2 + b^2)$. Montrer que $p \mid a$ et $p \mid b$.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 10 (Théorème de Wilson) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

Exercice 11 Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe des entiers x et y tels que $x^2 + y^2 + 2$ soit divisible par p.

Exercice 12 On définit la suite (u_n) par $u_0 = u_1 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que u_n et u_{n+1} soient divisibles par 2011^{2012}.

- Corrigés -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

a) Le point important est de remarquer que si d est un diviseur de n, alors $\frac{n}{d}$ aussi. (En fait, la fonction $f : d \mapsto \frac{n}{d}$ de l'ensemble des diviseurs de n dans lui même est une *involution*, c'est-à-dire que pour tout d, $f(f(d)) = d$). Si pour tout diviseur d de n, on a $d \neq \frac{n}{d}$, alors on peut partitionner l'ensemble des diviseurs de n en paires $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$, et cet ensemble est donc de cardinal pair. Sinon, il existe un diviseur d_0 de n tel que $\frac{n}{d_0} = d_0$, c'est-à-dire $n = d_0^2$, et n est un carré parfait. Dans ce cas, on peut partitionner l'ensemble des diviseurs de n en un certain nombre de paires $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$ et un singleton $\{d_0\}$, et cet ensemble est donc de cardinal impair. Les $n \in \mathbb{N}^*$ qui possèdent un nombre impair de diviseurs sont donc exactement les carrés parfaits.

b) On utilise encore la remarque de la question précédente. Si l'ensemble des diviseurs de n est $\{x_1, ..., x_d\}$, alors on peut réécrire cet ensemble $\left\{\frac{n}{x_1}, ..., \frac{n}{x_d}\right\}$. Donc $D = x_1 \cdot ... \cdot x_d = \frac{n}{x_1} \cdot ... \cdot \frac{n}{x_d}$, d'où $D^2 = \left(x_1 \frac{n}{x_1}\right) \cdot ... \cdot \left(x_d \frac{n}{x_d}\right) = n^d$.

c) On remarque qu'un entier naturel divise n si et seulement si il s'écrit $p_1^{\beta_1}...p_r^{\beta_r}$, avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout i. Le nombre de diviseurs de n est donc égal au nombre de choix possibles de la suite des β_i vérifiant ces conditions. i étant fixé, on a $\alpha_i + 1$ choix possibles pour la valeur de β_i. On a donc $(\alpha_1 + 1)...(\alpha_r + 1)$ choix possibles pour toute la suite, et c'est le nombre de diviseurs de n.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On rappelle que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si et seulement si a et b sont premiers entre eux. Ici, on a $3 \cdot (14n + 3) - 2 \cdot (21n + 4) = 1$ pour tout n, donc par le théorème de Bézout, $14n + 3$ et $21n + 4$ sont premiers entre eux. La fraction $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ est donc irréductible.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

a) Remarquons que quitte à poser $b = a^m$ et $d = \frac{n}{m}$, on est ramené à montrer que $(b - 1) \mid (b^d - 1)$. On peut alors utiliser l'identité $(b^d - 1) = (b - 1)(b^{d-1} + b^{d-2} + ... + b + 1)$, qui donne immédiatement le résultat. On peut aussi travailler modulo $b - 1$: comme $b \equiv 1 \mod b - 1$, on en déduit que $b^d \equiv 1 \mod b - 1$, d'où le résultat.

b) On cherche cette fois à quelle condition $(b + 1) \mid (b^d + 1)$. On va montrer que c'est vrai lorsque d est impair. L'identité $b^d + 1 = (b+1)(b^{d-1} - bd - 2 + ... - b + 1)$ (vraie uniquement lorsque d est impair) le montre immédiatement. On retrouve ce résultat en regardant modulo $b + 1$: comme $b \equiv -1 \mod b + 1$, alors $b^d \equiv (-1)^d \equiv -1 \mod b + 1$. Si, par contre, d est pair, on a $b^d \equiv (-1)^d \equiv 1 \mod b + 1$, donc $(b + 1) \mid (b^d - 1)$.
Conclusion : si $\frac{n}{m}$ est impair, alors $(a^m + 1) \mid (a^n + 1)$, et sinon, $(a^m + 1) \mid (a^n - 1)$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

a) Pour se ramener à une équation à inconnues entières, on pose $x = \frac{X}{T}$, $y = \frac{Y}{T}$ et $z = \frac{Z}{T}$, où X, Y, $Z \in \mathbb{Z}$, et où $T \in \mathbb{N}^*$ est l'entier minimal permettant cette écriture (autrement

dit, T est le PPCM des dénominateurs de x, y, et z écrits sous forme irréductible). On a alors $X^2+Y^2+Z^2=(8a+7)T^2$. Motivés par la présence de carrés, on regarde modulo 8 (auquel un carré peut être congru à 0, 1 ou 4 uniquement). L'équation devient alors $X^2+Y^2+Z^2+T^2 \equiv 0 \mod 8$.
Or, au moins un des entiers X, Y, Z et T est impair, sinon on pourrait les remplacer respectivement par $\frac{X}{2}$, $\frac{Y}{2}$, $\frac{Z}{2}$ et $\frac{T}{2}$, ce qui contredirait la minimalité de T. Sans perte de géneralité, on peut supposer que c'est X. On a alors $X^2 \equiv 1 \mod 8$, d'où $1+Y^2+Z^2+T^2 \equiv 0 \mod 8$. En regardant les valeurs pouvant être prises modulo 8 par X^2, Y^2 et Z^2, on voit que cette égalité ne peut pas être vérifiée.

b) On doit résoudre l'équation diophantienne $7^n+8=x^2$ (dans laquelle on peut considérer, sans perte de géneralité, que $x \geqslant 0$). La présence du carré nous incite à regarder modulo 4. x^2 peut être congru à 0 ou à 1, et $7^n \equiv (-1)^n \equiv \pm 1 \mod 4$. On a donc forcément $7^n \equiv (-1)^n \equiv 1 \mod 4$, donc n est pair ; on peut écrire $n=2m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. On a alors $8 = x^2-(7^m)^2 = (x-7^m)(x+7^m)$, donc $x+7^m \leqslant 8$ et à fortiori, $7^m \leqslant 8$. Donc $m=0$ ou 1, et on vérifie réciproquement que $m=0$ est la seule solution. Le seul entier n tel que 7^n+8 soit un carré parfait est donc 0.

Solution de l'exercice 5 Comme $a \equiv b \mod p$, alors il existe un entier k tel que $b=a+kp$. On utilise alors la formule du binôme :

$$b^p-a^p=(a+kp)^p-a^p=\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}(kp)^i a^{p-i}$$

Or, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on a $p! = i!(p-i)!\binom{p}{i}$, et p divise $p!$ mais ne divise ni $i!$, ni $(p-i)!$, donc par le théorème de Gauss, $p \mid \binom{p}{i}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on a donc $p^2 \mid \binom{p}{i}(kp)^i a^{p-i}$, ceci restant vrai pour $i=p$. Donc $p^2 \mid (b^p-a^p)$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 6

a) 3 étant premier avec 14, d'après le théorème chinois, le système admet des solutions.

b) La congruence $x \equiv 5 \mod 12$ implique $x \equiv 2 \mod 3$, et $x \equiv 7 \mod 15$ implique $x \equiv 1 \mod 3$. Ces deux congruences sont incompatibles, donc le système n'admet pas de solutions.

c) La congruence $x \equiv 10 \mod 12$ implique $x \equiv 1 \mod 3$ et $x \equiv 2 \mod 4$. Or, 3 et 4 étant premiers entre eux, le théorème chinois nous dit que le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

est équivalent à une unique congruence modulo 12, c'est donc forcément $x \equiv 10 \mod 12$.
De la même façon, on montre que la congruence $x \equiv 16 \mod 21$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$$

qui par le théorème chinois admet des solutions.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On regarde modulo $n = b - a$. On a $a \equiv b \mod n$, et comme la relation de congruence est compatible avec l'addition et la multiplication, ceci implique que $P(a) \equiv P(b) \mod n$, donc $n \mid (P(b) - P(a))$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Considérons une solution rationnelle éventuelle $\frac{p}{q}$ (écrite sous forme irréductible) de l'équation. On a alors

$$5\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\frac{p}{q} - 2 = 0$$

donc $5p^3 + 3p^2q + 3pq^2 - 2q^3 = 0$.

On a donc $5p^3 = q(-3p^2 - 3pq + 2q^2)$, donc $q \mid 5p^3$, et comme q est premier avec p (donc avec p^3), on en déduit par Gauss que $q \mid 5$. Par une méthode tout à fait analogue, on montre que $p \mid 2$. Les seules solutions rationnelles possibles de l'équation sont donc ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{5}$, et $\pm\frac{2}{5}$. On n'a plus qu'à vérifier, à la main, si chacune des solutions potentielles est réellement solution ou non, et on voit que la seule solution est $\frac{2}{5}$.

Remarque : Cette méthode fournit un moyen de résoudre dans $\mathbb{Q}$ n'importe quelle équation polynômiale à coefficients entiers (et donc à coefficients rationnels, puisqu'on peut se ramener à une équation à coefficients entiers quitte à multiplier par une bonne constante).

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

a) La condition $p \mid (a^2 + b^2)$ se réécrit $b^2 \equiv -a^2 \mod p$. Raisonnons par l'absurde et supposons que a ne soit pas divisible par p. a admet alors un inverse a^{-1} modulo p (i.e. un entier tel que $aa^{-1} \equiv 1 \mod p$), et on a $(ba^{-1})^2 \equiv -1 \mod p$. -1 est donc un carré modulo p.

   Par le critére d'Euler, cela implique que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$, donc que $\frac{p-1}{2}$ est pair. On en déduit que $p \equiv 1 \mod 4$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc $p \mid a$, et par la même occasion, $p \mid b$.

b) On va faire un démonstration analogue à celle d'Euclide pour montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Par l'absurde, supposons que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 soit fini, et notons ses éléments $p_1, ..., p_n$. On pose $M = (2p_1...p_n)^2 + 1$. M n'est clairement divisible par aucun des p_i, ni par 2, donc tous ses diviseur premiers sont congrus à 3 modulo 4. Notons p un tel diviseur ; alors en appliquant la première question à p avec $a = 2p_1...p_n$ et $b = 1$, on en déduit que $p \mid 1$, ce qui est absurde. Donc l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 est infini.

Solution de l'exercice 10 Le point clé de cette preuve est le fait que tout entier premier avec p admet un inverse modulo p ; en particulier, si p est premier, c'est le cas de tout entier non nul modulo p. De plus, l'inversion est involutive, c'est-à- dire que $(a^{-1})^{-1} \equiv a \mod p$ pour tout a.

Si p n'est pas premier, l'un des facteurs du produit $(p-1)!$ est un diviseur de p, donc est non inversible modulo p. Donc $(p-1)!$ n'est pas inversible modulo p, et n'est donc pas congru à -1, qui, lui, est inversible.

Réciproquement, si p est premier, alors on va partitionner l'ensemble $\{1, ..., p-1\}$ en paires d'entiers deux à deux inverses modulo p. Pour cela, il faut connaître les entiers x qui sont leur propre inverse ; ceux-là sont solutions de l'équation $x^2 \equiv 1 \mod p$, de degré 2, donc qui admet au plus deux solutions : ce sont donc 1 et -1 (ce dernier étant congru à $p-1$ modulo p). On regroupe les autres par paires d'inverses $\left\{x_i, x_i^{-1}\right\}$, de sorte que $\{1\}$, $\{p-1\}$ et les $\left\{x_i, x_i^{-1}\right\}$ forment une partition de $\{1, ..., p-1\}$.

En réorganisant l'ordre des facteurs du produit, on a alors

$$(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \cdot (x_1 x_1^{-1}) \cdot ... \cdot (x_r x_r^{-1}) \equiv p-1 \equiv -1 \mod p$$

Solution de l'exercice 11 L'idée est de montrer que les ensembles des valeurs prises modulo p par x^2 et par $-2-y^2$ sont suffisamment gros, donc s'intersectent. Il faut donc calculer leur cardinal.

Si $p=2$, le résultat est trivial. Sinon, considérons l'ensemble $A = \left\{-\frac{p-1}{2}, ..., -1, 0, 1, ..., \frac{p-1}{2}\right\}$ qui forme un système de résidus modulo p. Pour tout $i \in A$, on a $i^2 = (-i)^2$. Réciproquement, si $a^2 \equiv b^2 \mod p$, alors $p \mid (a+b)(a-b)$ donc $a \equiv b \mod p$ ou $a \equiv -b \mod p$. On en déduit qu'il y a exactement $\frac{p+1}{2}$ carrés modulo p, qui sont exactement 0^2, 1^2, ..., $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

Lorsque x parcourt un système de résidus modulo p, x^2 prend donc exactement $\frac{p+1}{2}$ valeurs modulo p, et il en est de même pour $-2-y^2$. Deux ensembles de cardinal $\frac{p+1}{2}$ contenus dans un même ensemble de cardinal p ayant une intersection non vide, on peut choisir x et y de telle sorte que $x^2 \equiv -2-y^2 \mod p$. x^2+y^2+2 est alors divisible par p.

Solution de l'exercice 12 Posons $N = 2011^{2012}$. Lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, le couple (u_n, u_{n+1}) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs modulo N. Il existe donc deux entiers naturels distincts s et t (avec par exemple $s < t$) tels que $u_s \equiv u_t \mod N$ et $u_{s+1} \equiv u_{t+1} \mod N$. La définition de la suite montre que dès que $s \geqslant 1$, cela implique que $u_{s-1} \equiv u_{t-1} \mod N$. Par réccurence, on peut donc montrer que pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant s$, on a $u_{s-i} \equiv u_{t-i} \mod N$. En particulier, on a $u_{t-s} \equiv u_0 \equiv 0 \mod N$ et $u_{t+1-s} \equiv u_1 \equiv 0 \mod N$, donc $n = t-s$ est solution du problème.

3 Combinatoire

1 Cours

Ces notes de cours ne sont pas exhaustives et ne comportent pas les preuves. Ils ont pour but de servir d'aide-mémoire aux élèves ayant suivis le cours.

Apprendre à compter

- Opérations ensemblistes -

Pour compter les éléments d'un ensemble il peut être utile de simplifier le problème en sous-problèmes plus simples, ou de regarder les éléments qui ne sont justement pas dans l'ensemble considéré. On notera dans toute la suite Card(A) le cardinal de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble A. Voici quelques idées utiles pour faire de telles décompositions.

Proposition 14. Pour toutsensembles finis A et B, on a :

- On a $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$
- On a $\mathrm{Card}(A \cup B) \leq$ Card(A) + Card(B) et plus précisément :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

- Plus généralement le **principe d'inclusion exclusion** nous apprend que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

- Si A est un sous-ensemble d'un ensemble fini E alors le complémentaire de A dans B est l'ensemble de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A, si on le note A^{C}, on a :

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A^{\mathrm{C}})$$

- Le comptage par bijection -

Pour dénombrer les éléments d'un ensemble, il peut-être plus simple de voir les objets de cet ensemble comme d'autres objets plus simples à compter.

Attention :

- Il faut que pour chaque objet de l'ensemble de départ il n'existe qu'un seul élément dans les objets simples à dénombrer.
- À l'inverse, il faut faire attention à ce que pour chaque élément facile à dénombrer il existe un et un seul élément de l'ensemble de départ qui lui soit associé.

Si vous avez seulement la première propriété alors vous pouvez seulement dire que le cardinal de l'ensemble de départ est plus petit que le cardinal des objets facile a dénombrer. A l'inverse le second point vous assure que la cardinal que l'ensemble de départ est plus grand que celui de l'ensemble des objets facile à compter.

Exercice 1 Quel est le plus petit nombre de poids nécessaires pour mesurer un nombre arbitraire de grammes de 1 a 1000 en se servant d'une balance à bascule (on peut mettre des poids sur n'importe lequel des plateaux de la balance) ?

Exercice 2 Déterminer les entiers n tel qu'il y ait un nombre impair d'entiers (x, y) telles que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

- Des sous-ensembles -

En combinatoire il est très important de savoir compter le nombre de sous-ensembles d'un ensemble (dans différents sens). Nous récapitulons ici quelques résultats provenant de cette idée :

– De façon simple, le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n.
– Le nombre de sous ensemble contenant k éléments dans un ensemble à n éléments est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

– Le nombre de k-uplet (on regarde l'ordre des éléments) d'un ensemble à n élément.

Le formule du triangle de Pascal permet de calculer par récurrence les coefficient binomiaux :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

Et les coefficients binomiaux sont aussi être tuiles dans le calcul du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Exercice 3 Soient n et k, deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir k nombres entiers naturels $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$?

Exercice 4 Un ticket comporte six chiffres a, b, c, d, e, f. Ce ticket est dit "heureux" si $a+b+c = d+e+f$. Combien y a t'il de tickets heureux (le ticket 000000 y compris) ?

Graphes

Nous ne présenterons pas les résultats sur les graphes car ils reprennent le polycopié sur les graphes du site d'Animath.

Exercice 5 Un graphe est connexe quand on peut toujours passer d'un sommet a un autre en passant par un nombre fini d'arêtes. Prouver qu'un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Exercice 6 On donne $2n$ points dans l'espace. On trace au total n^2+1 segments entre ces points. Montrer qu'il y a au moins un ensemble de trois points reliés deux à deux. Le résultat est-il toujours vrai pour n^2 arêtes ?

Exercice 7 Prouver que dans tout groupe de 50 personnes, il en existe toujours au moins deux qui ont un nombre pair (éventuellement nul) de connaissances communes dans le groupe (la relation “se connaitre" est considérée comme réciproque, et Hélas !, on ne se connaît jamais soi-même).

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 Nous allons montrer que le plus petit nombre de poids est 7. D'abord, on remarque que 6 poids ne suffisent pas. En effet, pour tout poids, il n'y a que trois possibilités, on peut le mettre sur l'un des deux plateaux ou nul part. Donc on a 3^6 possibilités de pesés au plus, mais comme $3^6 = 729 < 1000$, 6 poids ne suffisent pas. Maintenant on écrit un nombre $n \leq 1000$ dans un système triadique de la forme :

$$n = a_k 3^k + a_{k-1}3^{k-1} + \cdots + a_1 3 + a_0$$

avec $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ et on remarque que tout nombre $n \leq 1000$ peut s'écrire de cette façon,avec $k \leq 6$, puisque : $3^6 + 3^5 + \cdots + 1 = \frac{1}{2}(3^7 - 1) > 1000$. Il suffit alors de se munir de poids de $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots 3^6$ grammes. Pour peser un nombre n, on le met sur un plateau et on met le poids 3^i sur le même plateau si $a_i = -1$, sur l'autre si $a_i = 1$ et en dehors de la balance si $a_i = 0$.

Solution de l'exercice 2 L'équation se re-écrit :

$$(x - n)(y - n) = n^2$$

Il y a donc autant de soltions que de diviseur de n. Pour chaque diviseur a de n on peut associer un autre diviseurs n/a, ce diviseur est toujours différent si et seulement si n n'est pas un carré. Donc n a un nombre pair de diviseurs si et seulement si n n'est pas un carré. Donc l'équation précédente a un nombre impair de solutions si et seulement si n est un carré.

Solution de l'exercice 3 L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de $n + (k - 1) = n + k - 1$ cases dans lesquelles on va placer $k - 1$ cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme : i_1 est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre i_k est le nombre de case entre le $k - 1^{\text{ème}}$ délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs.

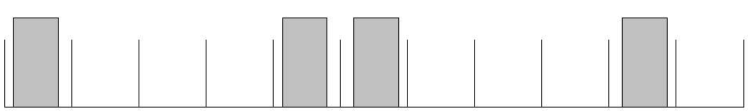


FIGURE 1 – Un exemple pour $n = 7$ et $k = 5$, la somme correspondante est $7 = 0 + 3 + 0 + 3 + 1$

Ainsi il y a autant de sommes de k nombres dont la somme est n que de choix de $k - 1$ cases parmi $n + k - 1$. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k-1}$ sommes possibles.

Solution de l'exercice 4 À tout nombre heureux $abcdef$, on fait correspondre un nombre $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ où $\bar{d} = 9 - d$, $\bar{e} = 9 - e$ et $\bar{f} = 9 - f$, la somme des chiffres $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ est 27. De plus on remarque que à chaque nombre heureux $abcdef$ il correspond un nombre $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ et à tout nombre dont la somme des chiffre est 27 on peut faire correspondre un nombre heureux. Ainsi il suffit de compter les nombres dont la somme des chiffres est 27, c'est-à-dire qu'on cherche à dénombrer le nombre de sommes $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 27$, où $0 \leq a_i \leq 9$. Ce nombre est $\binom{27+5}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5} = 55252$, cette somme provient du principe d'inclusion-exclusion, le premier terme est le nombre de somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 27$ sans restrictions sur la valeurs de a_i (voir l'exercice précédent), le second le nombre de somme où au moins un terme est plus grand que 10 (on choisi un des 6 termes d'une somme égale à 22 et on ajoute 10 à ce terme 10) et enfin le dernier correspond aux somme avec au moins deux termes supérieur à 10.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Nous allons raisonner par récurrence sur n sur la propriété de l'énoncé. Pour $n = 1$ et $n = 2$ la propriété est claire. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe de n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes. Soit alors G un graphe connexe à $n + 1$ sommets. Soit a le nombre d'arêtes de G. Notons que la connexité assure que chaque sommet est de degré au moins 1.

– Si tous les sommets ont un degré supérieur à 2, alors la somme des degrés de tous les sommets est au moins $2n$ et donc il y a au moins n arêtes (car le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par 2).
– Sinon il y a un sommet A de degré 1. Alors si on retire A et son arête du graphe G on obtient un graphe connexe G' qui possède n sommets et donc par hypothèse de récurrence $n - 1$ arêtes donc G avait n arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On va démontrer la contraposée : tout graphe à $2n$ points et sans triangle a au plus n^2 arêtes. Le résultat est clair pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour un graphe à $2n$ points et montrons qu'il est vrai pour $2n+2$ points. Soit G un graphe à $2n+2$ points sans triangles complets. Choisissons alors deux sommets A et B de G reliés par une arête. En oubliant A et B et toutes les arêtes reliées à A ou B on obtient un graphe G' à $2n$ points et sans triangles. Par hypothèse de récurrence, G' a au plus n^2 arrêtes. Combien d'arêtes peut avoir G ? Comme tout sommet C de G' ne peut pas avoir à la fois une arête vers A et une vers B (sinon G aurait le triangle ABC), le nombre d'arêtes de A ou de B vers G' est au plus $2n$. Donc, sans oublier l'arête AB elle-même, G a au plus $n+1$ arêtes de plus que G', donc au plus $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ arêtes. De plus il est facile de montrer que ce résultat est optimal. Si on partage les sommets en deux ensembles P et Q de n points chacun et qu'on relie chaque point de P à tous les éléments de Q par une arête. On a bien un graphe avec $2n$ sommet et n^2 arêtes.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Considérons le graphe G de connaissances (chaque sommet est une personne et il y a une arête entre eux si et seulement si ils se connaissent). On appelle "lien" un chemin de longueur 2. Le problème consiste donc à prouver que deux personnes sont reliées par un nombre pair de liens. On suppose par l'absurde que deux sommets quelconques sont toujours reliés par un nombre impair de liens. Soit M un sommet arbitraire. On répartit alors les autres sommets en deux groupes : le groupe $\mathcal{A}$ ceux qui sont adjacents à M et le groupe $\mathcal{B}$ de ceux qui ne le sont pas. Alors, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ n'a pas de lien avec M que via un autre sommet de $\mathcal{A}$. Il en découle que dans le graphe induit par $\mathcal{A}$, ce sommet a est de degré impair. Ceci étant vrai pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il faut donc que $\mathcal{A}$ contienne un nombre pair de sommets et M a un degré pair (car la somme des degrés des sommets est toujours paire). Comme M a été choisi arbitrairement, on en déduit que chaque sommet de G est de degré pair. Reconsidérons le sommet M. D'après ce qui précède, chaque sommet $A \in \mathcal{A}$ est de degré

pair, est adjacent à M, et il y a un nombre impair de sommets qui lui sont adjacents dans $\mathcal{A}$. Il doit donc avoir un nombre pair de sommets qui lui sont adjacents dans $\mathcal{B}$. Par suite, le nombre total d'arêtes qui relient un sommet de $\mathcal{A}$ et un sommet de $\mathcal{B}$ est pair. Enfin, tout sommet de $\mathcal{B}$ n'a de liens s avec M que via un sommet de $\mathcal{A}$. Donc, il doit être adjacent à un nombre impair de sommets de $\mathcal{A}$. Par suite, $\mathcal{B}$ doit lui aussi contenir un nombre pair de sommets. Mais alors $\text{card}(\mathcal{A}) + \text{card}(\mathcal{B}) + 1$ est impair, et ne peut donc pas être égal à 50.

2 TD

- Énoncés -

Exercice 1 On dispose de 21 allumettes. Chacun à son tour, l'un des deux joueurs prend $1, 2$ ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette gagne.

Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Exercice 2 On dispose d'un jeu complet de dominos. Deux joueurs jouent, chacun à son tour, selon la règle suivante : Le joueur choisit un domino parmi ceux non encore utilisés, et le place à l'une des extrémités de la chaîne déjà formée, de sorte que deux dominos adjacents aient toujours les mêmes numéros marqués sur leurs cases adjacentes.

Le premier qui ne peut jouer perd.

Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Exercice 3

a) Sur un tableau 2012×2012 formé exclusivement de cases blanches, Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice commence par noircir la case en haut à gauche. Bob doit alors noircir une case non encore noircie et adjacente (i.e. ayant un côté commun) à celle que vient de noircir Alice. Puis c'est au tour d'Alice de jouer, et de noircir une case blanche adjacente à la case précédemment noircie par Bob, et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.

   Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

b) Et s'ils jouaient sur un tableau 2011×2011 ?

Exercice 4 Partant de 0, Alice et Bob ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne.

Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 5 On place un jeton sur la case $C1$ d'un échiquier classique. Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une, soit vers la droite, soit vers le haut soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en $H8$ gagne.

Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice 6 Sur la table se trouvent 1999 jetons. Tour à tour, Albert et Barbara doivent enlever au moins un jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Albert qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Exercice 7 Alice et Bob jouent aux échecs, mais en ayant le droit d'enchaîner deux coups par tour. C'est Alice qui commence. Prouver qu'elle peut s'assurer de ne pas perdre.

Exercice 8 On inscrit $n = 2$ sur un tableau. A tour de rôle, Alice (la première) et Bob ajoutent un diviseur d du nombre n qui est inscrit au moment où ils jouent, avec $0 < d < n$ (et laissent donc $n + d$).

a) Le premier joueur qui fait dépasser 2011^{2012} perd. Qui a une stratégie gagnante ?

b) Le premier joueur qui fait dépasser 2012^{2011} perd. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 9 Une plaquette de chocolat est un rectangle de $m \times n$ carrés-unité. Seul le carré en bas à gauche est empoisonné. A tour de rôle, Achille, en premier, et Béatrice découpe la plaquette selon la règle suivante : on choisit un carré c et prend tout le rectangle dont c est le coin inférieur gauche (il se peut que certains des carrés de ce rectangle aient déjà été pris auparavant). Evidemment, celui des deux qui prend le carré empoisonné perd.

Quel est celui qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 10 Soit $n > 0$ un entier. A tour de rôle, Alice et Bob écrivent au tableau un entier strictement positif et ne dépassant pas n. Aucun nombre n'est effacé, et il est interdit d'écrire un nombre qui divise un nombre déjà écrit au tableau. C'est Alice qui commence et le premier qui ne peut plus jouer perd la partie. Qui a une stratégie gagnante ?

- Corrigés -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le premier joueur prend une seule allumette à son premier coup. Puis, à chaque coup suivant, si son adversaire vient de prendre a allumettes, il en choisit alors $4 - a$. Ainsi, après chacun de ses coups, le nombre d'allumettes prises augmente de 4. En particulier, le premier joueur prendra la $21^{ième}$, et gagne ainsi la partie. C'est un exemple de stratégie basée sur le principe "si tu peux jouer, alors je pourrais jouer après toi". Dans un jeu qui doit nécessairement s'arrêter, un joueur qui possède une telle stratégie est alors sûr de gagner, puisqu'il ne sera pas le premier à être bloqué...

La difficulté est de trouver la façon adéquate de jouer : si l'exemple est ici assez simple, il peut ne pas paraître évident tout de suite qu'une bonne façon de jouer est de compléter à 4 ce qu'a fait son adversaire au coup précédent...

Nous verrons ci-dessous une autre façon d'analyser la situation, qui rendra la solution trouvée plus naturelle.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On peut trouver une stratégie du même type pour le premier joueur, mais un peu plus subtile :

Le premier joueur choisit le domino $(0, 0)$. Alors, le second joueur est obligé de choisir un domino $(0, a)$ (qu'il peut évidemment placer en $(a, 0)$) avec $a \neq 0$. Le premier joueur choisit alors le domino (a, a). Dans cette situation, on constate que l'on a la propriété suivante :

pour tout entier k, le domino $(0, k)$ est encore disponible si et seulement si le domino (a, k) est encore disponible. De plus, le second joueur ne peut choisir un double.

Donc, à partir de maintenant, si le second joueur choisit un domino, il est forcément de la forme $(0, k)$ ou (a, k) et le premier peut alors choisir à son tour suivant celui de ces dominos qui reste disponible, et le mettre à la suite du domino du second joueur. Ce faisant, le second joueur se retrouve dans une situation où la propriété ci-dessus est à nouveau vraie. En procédant ainsi, le premier joueur est sûr de ne pas être le premier bloqué et donc de gagner la partie

Solution de l'exercice 3

a) Là encore, on peut trouver une stratégie de ce type, mais pour le second joueur. Celui-ci doit imaginer que le tableau est pavé par des dominos, ce qui possible puisqu'il y a un nombre pair de cases. Un tel pavage étant fixé une fois pour toutes, la stratégie de Bob est alors très simple : il "complète" à chaque fois le domino que vient juste de commencer à colorier Alice. Ainsi, à son premier coup, il colorie la case qui forme un domino avec la case en haut à gauche. Alice est alors obligée de noircir une case d'un domino non encore utilisé, ce qui laisse à Bob la possibilité de compléter à nouveau le domino à son prochain coup. À chacun de ses coups, Alice est alors obligée "d'ouvrir" un domino, pour autant qu'elle puisse jouer, et laisse à Bob la possibilité de jouer en le complétant.

   S'il adopte cette stratégie, c'est donc Alice qui va être bloquée la première, et Bob qui va gagner la partie.

b) Cette fois, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante : c'est exactement la même qu'au a), mais en ne considérant que le pavage du tableau dont on a éliminé la case en haut à gauche (il est facile de vérifier qu'une fois cette case éliminée, un tel pavage existe puisque $2011 - 1 = 2010$ est pair).

Remarque.
On aura évidemment observé que les valeurs 2012 ou 2011 sont anecdotiques, dans le sens où seule la parité du nombre choisi est importante.

Nous allons maintenant nous intéresser à une deuxième approche : l'analyse des positions gagnantes, le plus souvent à partir de ce qui est supposé être la fin du jeu (on parle alors d'*analyse rétrograde*). Une position est dite *gagnante* lorsque le joueur qui doit jouer à partir de cette position est sûr de gagner (en jouant au mieux évidemment). Si le jeu doit nécessairement se terminer avec la victoire de l'un ou de l'autre, les positions qui ne sont pas gagnantes sont alors *perdantes*.

Revenons sur l'exercice 1 :

Les positions $1, 2, 3$ sont évidemment gagnantes puisque le joueur à qui c'est le tour peut prendre toutes les allumettes d'un seul coup. Mais la position 4 est perdante car le joueur qui doit jouer est obligé de laisser $1, 2$ ou 3 allumettes et donne ainsi une position gagnante à son adversaire. Du coup, les positions $5, 6, 7$ sont gagnantes puisque le joueur concerné peut ne laisser que 4 allumettes et donne ainsi une position perdante. On en déduit que la position 8 est perdante.

Et ainsi de suite, on prouve que les positions perdantes sont exactement les multiples de 4. En y regardant de plus près, on constate que cela correspond à la stratégie décrite initialement.

Solution de l'exercice 4

C'est Alice, qui commence, qui a une stratégie gagnante. Pour le prouver, on va étudier les positions (i.e. les quantités obtenues) gagnantes de ce jeu :

Clairement, 100 est perdante (le jeu vient de se terminer par la victoire de l'adversaire...). Et donc, les quantités $90, 91, ..., 99$ sont gagnantes (un joueur qui part d'une telle quantité gagne à son prochain coup). Par suite, 89 est perdante, puisque le joueur qui doit alors jouer laissera une quantité égale à l'un des nombres $90, 91, ..., 99$.

Comme ci-dessus, on en déduit que $79, 80, ..., 88$ sont gagnantes. Puis, que 78 est perdante. Et ainsi de suite, on vérifie facilement que les positions perdantes sont de 11 en 11, à savoir $100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1$.

Puisque 1 est perdante, Alice commence par choisir 1, laisse donc une position perdante à Bob, et assure alors sa victoire en pouvant rester à chaque coup sur des positions gagnantes.

<u>Généralisation.</u>

Si l'on joue avec les entiers de 1 à n, et qu'à chaque coup on ajoute un nombre entre 1 et p, le raisonnement ci-dessus s'adapte en tout point pour montrer que les positions perdantes sont tous les entiers de la forme $n-k(p+1)$. Si $n=q(p+1)+r$ est la division euclidienne de n par $p+1$, alors $r \in \{0, ..., p\}$ et les positions perdantes sont les entiers de la forme $(q-k)(p+1)+r$, avec $0 \leq k \leq q$.

En particulier :

- Si $r=0$, la position perdante la plus proche du départ (hormis 0) est $p+1$. Le premier joueur ne peut l'atteindre à son premier coup, et quel que soit ce premier coup, le second joueur, lui, pourra s'y placer. C'est donc le second joueur qui a une stratégie gagnante.

- Si $r \neq 0$, le premier joueur peut alors se placer en r à son premier coup et assurer sa victoire comme ci-dessus.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Si le jeton est au départ en $C1$, c'est le premier joueur qui possède une stratégie gagnante.

En fait, pour toute case de départ, via une analyse des positions, on peut déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante : la case $H8$ est perdante puisque le joueur qui doit jouer alors que le jeton est dans cette case vient juste de perdre... Du coup, toutes les cases de la ligne n°8 ou de la colonne H ou de la diagonale $A1-H8$ sont des positions gagnantes. Mais alors, les positions $F7$ et $G6$ sont perdantes puisqu'un joueur qui doit jouer à partir d'une telle case met forcément le jeton sur une des cases gagnantes ci-dessus. On en déduit que toutes les cases non encore déterminées dans les colonnes, lignes ou diagonales respectives de ces deux cases sont gagnantes. Comme ci-dessus, cela entraine que les cases $C5$ et $E3$ sont perdantes. De même, les cases non encore déterminées dans les lignes, colonnes ou diagonales respectives de ces deux cases sont alors gagnantes. Par suite, les cases $A4$ et $D1$ sont perdantes, et les autres sont gagnantes.

En particulier, la case $C1$ est gagnante. Donc, le premier joueur possède une stratégie gagnante, décrite ci-dessus : son premier coup consiste à amener le jeton en $D1$ (ou $C5$) qui est perdante puis, selon le coup du second joueur à amener à chaque fois le jeton dans des positions perdantes.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> C'est Albert qui possède une stratégie gagnante. Analysons les positions :

Clairement, 1 est gagnante (puisque le joueur qui doit jouer vient de gagner la partie...), et 2 est perdante car celui qui doit jouer est obligé de laisser un seul jeton et perd la partie. On en déduit que 3 et 4 sont gagnantes (le joueur peut laisser 2 jetons et donne ainsi une position perdante à son adversaire). Du coup, 5 est perdante car le joueur doit alors laisser 3 ou 4 jetons, et donne alors une position gagnante à son adversaire. Cela entraine que $6, 7, 8, 9, 10$ sont gagnantes (le joueur laisse alors 5, qui est perdante), mais que 11 est perdante (le joueur est obligé de laisser $6, 7, 8, 9$ ou 10 qui sont gagnantes).

Afin d'éviter de tout faire à la main, il est judicieux de prendre un peu de hauteur. Pour cela, on constate que si k est perdante alors $k+1, k+2, ..., 2k$ sont gagnantes (le joueur laisse alors k, dont on vient de dire qu'elle était supposée perdante), et $2k+1$ est perdante (le joueur est obligé de laisser $k+1, k+2, ..., 2k-1$ ou $2k$, qui sont gagnantes). Cela permet de déterminer les positions perdantes (et les positions gagnantes) de proche en proche, mais plus rapidement... Ainsi, les positions perdantes sont

$2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071, ...$

Et donc, 1999 est gagnante, ce qui conclut.

Remarque.

De façon plus générale, à l'aide de ce que l'on vient de faire, on peut prouver que les positions perdantes sont les nombres de la forme $3 \times 2^n - 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

Solution de l'exercice 7 Qu'Alice soit assurée de ne pas perdre, c'est dire que Bob ne possède pas de stratégie gagnante.

Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.

Alors Alice commence par déplacer son cavalier de $B1$ en $A3$ et retour. C'est donc Bob qui doit jouer, comme s'il était le premier joueur. Or, puisque le second joueur possède une stratégie gagnante, Alice peut l'utiliser et donc s'assurer de battre Bob. Ainsi, Bob possède une stratégie gagnante mais est sûr de perdre. Contradiction.

Donc, Bob n'a pas de stratégie gagnante, ce qui assure qu'Alice est sûre de pouvoir éviter de perdre.

Remarques.

Attention, qu'Alice soit sûre de ne pas perdre ne signifie pas qu'elle soit sûre de gagner, car il pourrait y avoir partie nulle... De plus, nous n'avons finalement pas décrit de stratégie adéquate pour Alice.

Cela dit, l'exemple ci-dessus est un exemple de ce que l'on peut appeler un "vol de stratégie" : afin de prouver qu'un joueur ne possède pas de stratégie gagnante, on suppose (par l'absurde) qu'il en a une et on prouve que l'autre joueur peut l'utiliser à son tour (i.e. la lui voler), d'où la contradiction.

Pour que tout fonctionne au mieux, et que l'on soit assuré que l'un des joueurs ait effectivement une stratégie gagnante (là, on a juste prouvé qu'un joueur n'en avait pas, ce qui n'est pas du tout pareil), il serait idéal que l'on soit sûr que le jeu se finisse, jamais sur une partie nulle, et qu'il soit possible de prouver que, pour un tel jeu, l'un des deux joueurs possède toujours une stratégie gagnante (du coup, si on a éliminé une possibilité, c'est donc que l'autre joueur possède la stratégie désirée). Et justement, c'est exactement ce que dit le théorème suivant, dû à Zermelo :

Théorème (Zermelo)

Dans un jeu fini à deux joueurs, à information parfaite et n'ayant que deux issues possibles (à savoir la victoire du joueur n°1 ou la victoire du joueur n°2), l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Quelques précisions : dire que le *jeu est fini* signifie que l'arbre de toutes les positions possibles, aussi gigantesque soit-il, est tout de même fini, et dire qu'il est *à information parfaite* signifie que l'on exclut toute intervention du hasard (ainsi, on ne parle pas ici de la plupart des jeux de dés, par exemple).

Pour ceux qui voudraient en savoir plus et, en particulier, lire la démonstration de ce théorème, que nous n'allons pas faire ici, peuvent se reporter à l'adresse suivante :

http ://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/jeux/strategies.pdf

Disons juste, qu'en gros, il s'agit de remonter l'arbre de toutes les positions possibles du jeu, à partir des feuilles (les situations finales) pour remonter à la racine (la position de départ) en controlant à chaque étape lequel des deux joueurs est en position gagnante. C'est, en plus raffiné, ce que nous avons fait dans les exercices précédents.

On constate que le type d'approche ci-dessus est "non constructive" dans la mesure où l'on ne décrit pas ce que serait alors une stratégie gagnante. Il peut alors être un peu difficile d'accepter l'idée que l'on sache qu'un joueur donné ait une stratégie gagnante sans pour autant être capable d'en expliciter une...

Et pourtant, c'est bien ce que l'on va voir dans les exercices ci-dessous :

Solution de l'exercice 8

a) Bon, là, on peut encore s'en sortir facilement. En effet, Alice peut décider d'ajouter 1 à chaque tour. Ce faisant, il est facile de vérifier qu'elle laisse un nombre impair à Bob, qui est donc obligé de choisir un nombre d impair et de laisser alors un nombre pair. Quel que soit ce nombre pair, soit Bob vient de perdre (et donc le premier vient de gagner) soit il vient de laisser un nombre qui est strictement inférieur à 2011^{2012} (qui est impair !). Ainsi, en ajoutant à nouveau 1, Alice ne dépasse toujours pas 2011^{2012} et laisse encore un nombre impair à Bob.

   On retrouve une stratégie du type "si tu peux jouer, alors moi aussi", qui assure que ce n'est pas Alice qui va être bloquée la première. Or, il est clair que le jeu se finira après un nombre fini de coups (pas plus de $2011^{2012} - 1$ coups) et que l'un des deux joueurs finira par gagner.

   Ainsi, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante, et celle-ci est particulièrement simple à mettre en oeuvre...

b) En fait, quel que soit le nombre $N \geq 6$ que l'on ne doit pas dépasser, c'est toujours Alice qui possède une stratégie gagnante. Evidemment, si N est impair, la stratégie du a) fonctionne parfaitement. Par contre, dans le cas où N est pair, si Alice décide de jouer de cette façon, il est facile pour Bob de faire de même et de gagner, ce qui montre que la façon de jouer d'Alice est alors une stratégie...perdante ! Alice va donc devoir trouver autre chose. Mais le théorème de Zermelo lui dit qu'elle a bien raison d'y croire : en effet, comme on l'a signalé ci-dessus, le jeu est clairement fini, sans partie nulle et à information parfaite, donc l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

   Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.

   Lors de son premier tour, Alice est obligée de laisser $n = 3$ (elle ne peut choisir que $d = 1$). Du coup, Bob est obligé de choisir $d = 1$ et laisse $n = 4$. Á partir de là, deux options sont possibles pour Alice : laisser $n = 5$ ou $n = 6$.

   Mais, puisque Bob possède une stratégie gagnante, c'est donc que si Alice laisse $n = 5$, Bob qui est alors obligé de laisser $n = 6$ va gagner. Cela assure que le joueur qui laisse $n = 6$ gagne. Dans ces conditions, Alice peut choisir de directement laisser $n = 6$ puis, en utilisant la stratégie de Bob, gagner la partie. Cela contredit donc que Bob possède une stratégie gagnante.

Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante, et le théorème de Zermelo assure que c'est donc Alice qui en possède une. Par contre, à la différence du a), sauf à étudier toutes les parties possibles, il paraît difficile de donner une description simple d'une telle stratégie...

Solution de l'exercice 9 Il est évident que si $m = n = 1$, le premier joueur va perdre... On suppose donc que $m \geq 2$ ou $n \geq 2$.

Clairement, nous sommes face à un jeu pour lequel le théorème de Zermelo s'applique. L'un des deux joueurs possède donc une stratégie gagnante.

Par l'absurde : supposons que ce soit Béatrice.

Si Achille choisit le carré situé en haut et à gauche, il laisse la plaque quasi entière à Béatrice qui, à partir de cette position, possède une stratégie qui va lui assurer la victoire. En particulier, selon cette stratégie, Béatrice va choisir un carré c et découper le "rectangle" correspondant. On note qu'à ce rectangle il manque en fait exactement le carré choisi par Achille pour être complet. Mais alors, Achille pourrait dès le départ choisir le carré c et découper le rectangle tout entier, et laisser ainsi Béatrice dans la position exacte dans laquelle lui-même se trouvait selon sa première option. Il n'a alors plus qu'à suivre la stratégie gagnante de Béatrice pour gagner lui-même, privant ainsi celle-ci de la victoire qu'elle était assurée d'obtenir, ce qui est absurde.

Ainsi, Béatrice n'a pas de stratégie gagnante, et c'est donc Achille qui en possède une.

Remarque.

Ce jeu est connu sous le nom de *Chomp* et a été inventé par le mathématicien David Gale. Sauf dans certain cas très simples (par exemple, si $m = 1$ auquel cas le premier joueur ne laisse directement que le carré empoisonné), on ne connaît pas de description d'une stratégie gagnante sans recours à un ordinateur afin d'analyser toutes les positions possibles.

Solution de l'exercice 10 C'est Alice qui posède une stratégie gagnante. Le raisonnement est très proche de celui de l'exercice précédent.

D'après le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs possède une telle stratégie. Par l'absurde : supposons que ce soit Bob.

Si Alice écrivait 1, Bob écrirait alors un certain nombre k de façon à suivre sa stratégie et à assurer sa victoire. Mais alors, Alice peut directement écrire k, ce qui interdit à chacun des deux joueurs d'écrire ultérieurement 1, et laisse donc Alice dans la situation exacte où était Bob lorsqu'il suivait sa stratégie. En suivant cette même stratégie, Alice a donc assurer sa victoire, en contradiction avec notre hypothèse.

Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante et, selon ce qui a été dit au départ, c'est donc qu'Alice en a une.

V. Test final

Le test final durait trois heures. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté.

1 Débutants

1 Sujet

Exercice 1 Les nombres $2, 3, 4$ sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux (a et b) et on remplace le troisième nombre par $a + b - 1$.

1) Peut-on obtenir les nombres $6, 9, 14$?
2) Peut-on obtenir les nombres $2011, 2012, 2013$?
3) Peut-on obtenir les nombres $2011, 2013, 2015$?

Exercice 2 Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On suppose que (AB) et (CD) se coupent en E et que (AD) et (BC) se coupent en F. La bissectrice de $\widehat{AFB}$ coupe les segments $[AB]$ et $[CD]$ aux points P et R, et celle de $\widehat{BEC}$ coupe les segments $[BC]$ et $[AD]$ en Q et S.

1) Montrer que (PR) et (SQ) sont perpendiculaires.
2) Montrer que $PQRS$ est un losange.

Exercice 3

1) Montrer que parmi les nombres $2, 22, 222, 2222, \ldots, 222\cdots222$ (le dernier nombre contient 2011 fois le chiffre 2) au moins un est divisible par 2011.
2) Montrer que parmi 2011 nombres entiers quelconques, on peut toujours en choisir certains dont la somme est divisible par 2011.
3) On considère 5 nombres entiers positifs. En les ajoutant deux à deux de toutes les façons possibles, on génère 10 entiers. Montrer que ces 10 entiers ne peuvent pas être 10 entiers consécutifs.

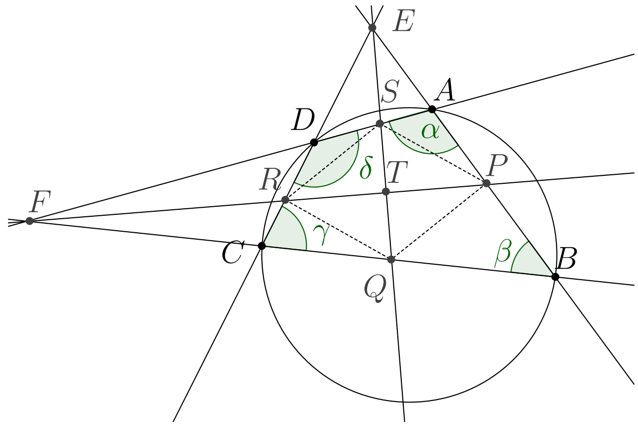
2 Corrigé

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1) Oui : on remplace 2 par 6, puis 3 par 9 et enfin 4 par 14.
2) On voit que la somme des nombres écrits au tableau reste impaire ($a + b + (a + b - 1) = 2(a + b) - 1$). Comme $2012 + 2012 + 2013$ est pair, on ne pourra pas obtenir les nombres $2011, 2012, 2013$.

3) On voit que le nombre de nombres impairs écrits au tableau est un invariant : on ne pourra donc pas obtenir les nombres $2012, 2013, 2015$.

Solution de l'exercice 2



1) Quitte à échanger les noms des sommets, on peut supposer A entre B et E, et C entre B et F. Soit T l'intersection des deux bissectrices, qui sont les diagonales de $PQRS$. On note $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les angles en A, B, C, D. Montrons d'abord qu'elles sont perpendiculaires. Ce sont des égalités d'angles :

$$\begin{aligned}
\widehat{FTE} &= 180^\circ - \widehat{FTQ} = \widehat{TFQ} + \widehat{FQT} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{AFB} + (\widehat{QBE} + \widehat{QEB}) \\
&= \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) + \beta + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90^\circ.
\end{aligned}$$

2) Ensuite, il faut voir que c'est un losange. Mais comme la bissectrice de $\widehat{EPR}$ est perpendiculaire à $[PR]$, c'est que EPR est isocèle en E. Et le pied de la hauteur T est le milieu de $[PR]$. De même, T est le milieu de $[QS]$. $PQRS$ est donc un parallélogramme, ses diagonales sont orthogonales, donc c'est un losange.

Solution de l'exercice 3

1) Il est facile d'adapter la solution de l'exercice 5 vu en TD d'arithmétique pour résoudre cette question.
2) Notons $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ les nombres entiers. On considère alors les 2011 entiers suivants :

$$x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{2011}$$

Si un de ces entiers est divisible par 2011, on peut peut rentrer chez nous car on a fini. Sinon, les restes de leurs divisions par 2011 sont compris entre 1 et 2010 donc par le principe des tiroirs, au moins deux des restes (par la division par 2011) sont égaux. Donc la différence de ces deux sommes (qui est une somme des nombres de départ) est un multiple de 2011.

3) Chaque entier intervient dans 4 sommes donc la somme des 10 entiers obtenus est divisible par 4. En particulier, elle est paire. Mais la somme de 10 entiers consécutif est nécessairement impaire, car il y a exactement 5 entiers pairs et 5 entiers impairs dans cette somme.

2 Avancés

1 Sujet

Exercice 1

1) Soit $n \geq 0$ un entier. Montrer que $n-2$ et n^2-n-1 sont premiers entre eux.
2) Trouver tous les entiers $m, n \geq 0$ tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2 = 5^m$.
3) Trouver tous les entiers $m, n \geq 0$ tels que $2n^3 - n^2 + 2n + 1 = 3^m$.

Exercice 2 Soit A, B, C, D quatre points distincts placés dans cet ordre sur une droite. Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (BC) en Z. Soit P un point distinct de Z sur la droite (XY). La droite (CP) coupe le cercle de diamètre AC en C et M, et la droite (BP) coupe le cercle de diamètre $[BD]$ en B et N.

1) Montrer que les points M, B, C, N sont cocycliques.
2) Montrer que A,M,N et D sont cocycliques. Prouver que les droites (AM), (DN), (XY) sont concourantes.

Exercice 3 Antoine, en premier, et Pierre écrivent chacun à leur tour une croix dans une case encore libre d'un tableau $n \times n$. Le premier qui inscrit la troisième croix dans un carré 2×2 perd la partie.

1) Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante lorsque $n = 2011^{2012}$.
2) Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante lorsque $n = 2012^{2011}$.

2 Corrigé

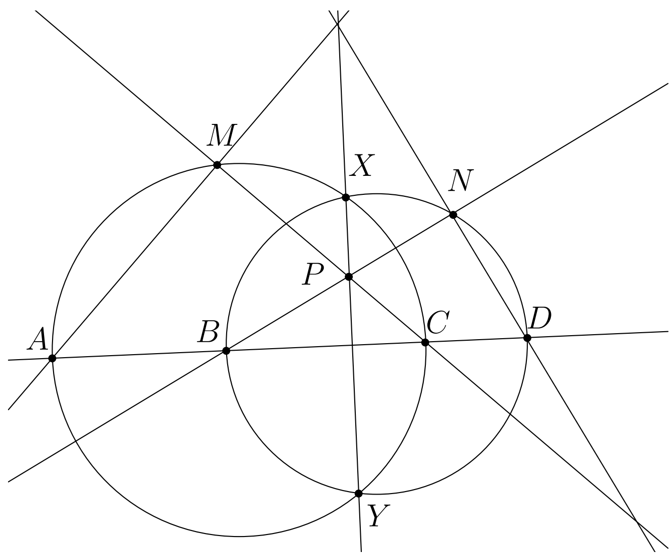
<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1) Par l'absurde, considérons p un nombre premier divisant $n-2$ et n^2-n-1. Alors p divise $n(n-2) = n^2 - 2n$, et p divise $n^2 - n - 1 - (n^2 - 2n) = n - 1$. Donc p divise deux entiers consécutifs, à savoir $n-2$ et $n-1$, ce qui est absurde.
2) Guidés par la question précédente, on remarque que $(n-2)(n^2-n-1) = n^3-3n^2+n+2$. Ainsi, $(n-2)(n^2-n-1) = 5^m$. D'après la première question, ceci implique que l'un des deux nombres vaut 1 ou -1. On étudie les différents cas : $n-2=1$ ou $n^2-n-1=1$ ou $n-2=-1$ ou $n^2-n-1=-1$. On a donc $n=3, n=2, n=1$ ou $n=0$. Réciproquement, on voit que seuls $n=1$ et $n=3$ donnent une solution (avec respectivement $m=0$ et $m=1$).

3) Malheureusement, l'expression $2n^3 - n^2 + 2n + 1$ ne se factorise pas de manière simple, ce qui nous oblige à recourir à une autre stratégie. Regardons modulo 3 : si $n \equiv 1 \mod 3$ alors $2n^3 - n^2 + 2n + 1 \equiv 1 \mod 3$, et si $n \equiv 2 \mod 3$ alors $2n^3 - n^2 + 2n + 1 \equiv 2 mod 3$. Ainsi, si $2n^3 - n^2 + 2n + 1 = 3^m$ avec $m \geq 1$, alors nécessairement 3 divise n et donc 3 divise 1, ce qui est absurde.

   On a donc forcément $m = 0$, ce qui donne $2n^3 - n^2 + 2n = 0$, c'est-à-dire $n(2 - n + 2n^2) = 0$. On voit qu'alors forcément $n = 0$ (par exemple car le discriminant de l'équation du second degré $2n^2 - n + 2 = 0$ est négatif). La seule solution est donc $m = n = 0$.

Solution de l'exercice 2



1) En calculant la puissance de P par rapport aux deux cercles on a $PB \cdot PN = PX \cdot PY = PC \cdot PM$. Par conséquent les points M, B, C, N sont cocyliques.
2) Comme M, B, C, N sont cocyliques, on a $\angle MNB = \angle MCB$. Les triangles MAC et BND sont rectangles, on a donc $\angle MAC = 90° - \angle MCA = 180° - \angle MND$. Par conséquent les points A, M, N, D sont cocycliques. Les droites $(XY), (AM), (DN)$ sont les axes radicaux des cercles de diamètres $[AC]$, $[BD]$, et du cercle circonscrit à $AMND$, donc elles sont concourantes.

Solution de l'exercice 3

1) Lorsque n est impair, c'est Antoine qui possède une stratégie gagnante :

   Il lui suffit de jouer son premier coup dans la case centrale, puis de répondre à chaque coup de Pierre par symétrie par rapport à cette case centrale. Comme n'importe quel case et sa symétrique par rapport à la case centrale ne sont jamais dans un même carré 2×2, Antoine s'est ainsi trouvé une stratégie du type "si tu peux jouer alors moi aussi", ce qui conclut.
2) Lorsque n est pair, c'est Pierre qui possède une stratégie gagnante :

   Il lui suffit de jouer symétriquement à ce que joue Antoine par rapport au centre Ω du tableau carré. L'argument du 1) s'applique alors sauf pour le carré 2×2 central (i.e. dont le centre est aussi Ω), car alors un coup et son symétrique appartiennent à un même carré

2×2. Mais, on note alors que ce carré central est justement invariant par la symétrie centrale de centre Ω.

Par l'absurde : si Pierre devait perdre en jouant un coup dans ce carré, c'est qu'il s'agirait de la troisième croix contenue dans ce carré. D'après la stratégie de Pierre, c'est donc que la seconde provenait du coup précédent d'Antoine et est inscrite dans la case symétrique à celle qui vient de faire perdre Pierre. Mais alors la première n'a pu être jouée ni par Antoine, ni par Pierre car alors sa symétrique par rapport à Ω aurait également été utilisée et il y aurait alors déjà trois croix dans le carré avant le dernier coup de Pierre. Contradiction.

Ainsi, cette stratégie est bien une stratégie gagnante pour Pierre.

VI. Citations mémorables

- Roger Mansuy : Moi j'en ai trois (en montrant sa main), alors que vous on peut compter sur les doigts d'un pouce.

  - Roger Mansuy : Je lance une pièce d'un euro grec ...
  - Charles : Ça ne vaut plus rien !

- Maxime : (pour ne pas se faire arnaquer) on peut lancer un billet au lieu d'un pièce.

  - Antoine : Connais-tu le mathématicien Émile Yeux ?
  - Anonyme : Bon, je vois pas.
  - Antoine : Tu crains là, c'est celui qui a prouvé le théorème d'Émile Yeux.

- Arthur : Excusez-moi monsieur ? ... Non, en fait, je n'ai rien à dire.

- Maxime : Solange c'est un Kinder : brune à l'extérieur et blonde à l'intérieur.

  - Connaitrais-tu une citation que je puisse mettre dans les ... bah, citations ?
  - Maxime : Casse-toi !
  - Ok, mais c'est pas drôle...

- Ilias : J'ai une question... Mais j'ai pas envie de la poser...

  - Arthur :Est-ce normal qu'il n'y ait pas d'échelle à mon lit alors qu'il est en hauteur ?
  - Euh... Je ne crois pas.

- Ilias : Le théorème de Fermat, c'est des maths appliqué, car on peut gagner 1 million de dollars.

- Igor : Il faut être gentil avec nous parce qu'on corrige vos copies.

- Igor : (à midi) Vous sortirez pas avant d'avoir fini l'exo... Avec un peu de chance vous dînerez.

- Ilias : Je crois avoir trouvé une mesure d'angle, mais elle sert à rien.

  - Antoine : Quelles sont tes coordonnées ?
  - Marine : Euh... $(6, 3)$

- Antoine : Moi je pense quelque chose que toi tu penses que je ne pense pas : quiproquo.

  - Igor : Si vous avez pas compris, c'est pas grave.
  - Raphaël : Si vous avez pas compris, c'est pas grave.
  - Noé : Si vous avez pas compris, c'est pas grave.
  - Antoine (prof) : Si vous avez pas compris, c'est pas très grave.

- Antoine (prof) : Vous avez compris ? (gros blanc) On va dire que oui...

  - Anonyme : (à 9h30) Excusez-moi, je suis en retard.
  - Antoine (prof) : Ah bon ? !

- Antoine : en fait, les maths c'est pas le loto, faut être sûr de ce qu'on dit.

  - Anonyme : Je voulais juste dire que j'ai utilisé ça pour un exo d'arithmétique hier.
  - Nous sommes tous très fiers de toi.

- Florent : Avant Euclide, il n'y avait même pas de lignes rectilignes : il n'y avait que des trucs bizarroïdes.

  - Antoine (prof) : (à 12h30) Qui a compris et veut bien l'expliquer ? (quelques mains se lèvent)
  - Qui a compris mais ne veut pas expliquer ? (davantage de mains)
  - Qui a faim ? (toutes les mains se lèvent)