Stage de l'Olympiade Française de Mathématiques

22 - 27 février 2016

Chapitre 1

Déroulement du stage

Le stage de février 2016 a accueilli 51 élèves dont 42 internes, sélectionnés d'après 1 ou 2 tests qui ont eu lieu en décembre 2015 et janvier 2016. Six de ces élèves ne sont restés que deux jours car faisaient partie de l'équipe qui représentait la France à la compétition RMM (Romanian Master of Mathematics, 24-29 février 2016).

La liste des 32 élèves du groupe A (seniors) était : Bambury Henry, Bazin Pierre-Alexandre, Boutin Oscar, Breton Félix, Cahen Paul, Cahuzac Aline, Caplier Romain Clarou Pierre, Collet Baptiste, Fay de Lestrac Thibault, Galant Damien, Gaudin Solal, Godfard Pierre, Gutsche Linda, Hamdi Ilyes, Huynh Nicolas, Kahane Yakob, Lebleu Ilyas, Lemercier Adrien, Léonard Arthur, Mattatia Eve, Mercat Flora, Mosseri-Lefebvre Julia, Polo Alexandre, Revenant Paul, Sellier François, Serraille Baptiste, Stark Antoine, Studnia Joachim, Thiault Alexandre, Vic Simon, Wang Lucie.

La liste des 19 élèves du groupe B (juniors) était : Barbu Andrei, Barbu Stefan, Benrubi Maxime, Bouton Hector, Cahuzac Justin, Chen Michaël, Deloire Nathan, Fougereux Théodore, Jampsin Julien, Kortchemski Alexandra, Le Bezvoët Evelyne, Luchnikova Anna, Paun Théodore, Pigé Xavier, Rocquet Timothée, Schuller Matthias, Wetterwald Mathis, Zablocki Jean, Zysman Ilan.

Les élèves étaient encadrés par : Pierre Bornsztein, Guillaume Conchon-Kerjan, Colin Davalo, Vincent Jugé, Igor Kortchemski, Matthieu Lequesne, Julien Portier, Alexander Semenov, Jean-Louis Tu. *Une partie* des documents du stage a été rassemblée ici.

Programme – stage du 22 au 27 février 2016					
	9h-11h puis 11h15-12h30		**14h-16h puis 16h15-17h30**		**Animateur présent soir/nuit**
	groupe B	**groupe A**	**groupe B**	**groupe A**	
lundi	arrivée entre 10h et 12h30 : accueil par Jean-Louis au foyer de Cachan		algèbre (Julien)	arithmétique (Jean-Louis)	Julien
mardi	arithmétique (Guillaume)	géométrie (Julien)	géométrie (Vincent)	Test 1,14h-18h (concerne aussi élèves nés avant le 31/12/2000) : Jean-Louis	Jean-Louis
mercredi	combinatoire (Colin)	combinatoire (Vincent)	géométrie (Colin)	algèbre (Igor)	Colin
jeudi	algèbre (Matthieu)	arithmétique (Pierre)	combinatoire (Alexander)	combinatoire (Pierre)	Guillaume
vendredi	Arithmétique (Matthieu)	algèbre (Guillaume)	Test 2, 14h-18h (concerne aussi candidates EGMO + élèves nés après 1/01/2001 : Guillaume	géométrie (Thomas)	Thomas
samedi	Exercices divers (9h-12h) : Alexander		déjeuner à 12h, départs avant 14h.		

Horaires des repas : petit déjeuner 8h-8h30, déjeuner 12h30-13h, dîner 18h45-19h15.
Exception : le déjeuner du samedi a lieu à 12h.

Chapitre 2

Cours du groupe A (avancés)

2.1 Arithmétique groupe A (Jean-Louis)

Exercice 1 Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels qu'il existe un entier d divisant $a^n + b^n + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2 Existe-t-il des entiers naturels $m > 0$ et $n > 0$ tels que $m^{20} + 11^n$ soit un carré parfait ?

Exercice 3 Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 8. Trouver tous les couples d'entiers (x, y) vérifiant $y^2 = x^3 - p^2 x$ avec x pair.

Exercice 4 Trouver tous les triplets (m, p, q) avec p, q premiers tels que $2^m p^2 + 1 = q^5$.

Exercice 5 Trouver tous les entiers n tels que $20n + 2 \mid 2003n + 2002$. On pourra utiliser que $18017 = 43 \times 419$.

Exercice 6 Soit p un nombre premier et d un diviseur de $p - 1$. Déterminer, modulo p, le produit des éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont l'ordre multiplicatif est égal à d.

Exercice 7 On définit une suite par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ pour tout n. Montrer que si $m < n$ alors $a_m \mid a_n$.

Exercice 8 Déterminer le nombre de parties B de $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ dont la somme des éléments est congrue à 2016 modulo 2048.

Exercice 9 On part d'une suite d'entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$. Si possible, on choisit $j < k$ tels que a_j ne divise pas a_k, et on les remplace par $\text{pgcd}(a_j, a_k)$ et $\text{ppcm}(a_j, a_k)$ respectivement. Montrer que si on répète ce processus, il finit par s'arrêter, et que l'état final ne dépend pas des choix effectués.

Exercice 10 Soit $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels $a < b$ tels que $P(1), P(2), \ldots, P(2016)$ sont produits d'un nombre pair de facteurs premiers.

b) Montrer que si pour tout n, $P(n)$ est un produit d'un nombre pair de facteurs premiers, alors $a = b$.

Exercice 11 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $x_1 < \ldots < x_n$ entiers tels que $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1 \cdots x_n}$ soit un entier.

Exercice 12 Soit n un entier strictement positif, et soit A_n l'ensemble des entiers strictement positifs $a \leqslant n$ tels que $n \mid a^n + 1$.

a) Déterminer tous les n tels que $A_n \neq \emptyset$.

b) Trouver tous les n tels que A_n a un nombre pair d'éléments.

c) Existe-t-il n tel que A_n a 130 éléments ?

Éléments de solution.

Exercice 1. On peut supposer d premier. Pour $d = 2$, la condition est que a et b soient de parités opposées. Pour $d \geqslant 3$, on prend $n = d - 1$ et on remarque que a^n et b^n sont congrus à 0 ou 1 modulo d, et on en déduit que $d = 3$, puis que a et b sont congrus à 1 modulo 3.

Exercice 2. L'équation $m^{20} + 11^n = a^2$ sécrit $11^n = (a - m^{10})(a + m^{10})$ donc $a - m^{10} = 11^u$ et $a + m^{10} = 11^v$ pour certains entiers $u < v$. Ecrivons $m = 11^\ell m'$ avec m' non divisible par 11. On a $2m^{10} = 11^v - 11^u$ donc, en regardant la 11-valuation, on en déduit que $10\ell = u$ et que $2(m')^{10} = 11^{v-u} - 1$. Modulo 11, cela entraîne que $2 \equiv -1\,[11]$, impossible.

Exercice 3. On écrit l'équation sous la forme $y^2 = x(x - p)(x + p)$.

Si p de divise pas x, alors x est premier avec $x^2 - p^2$ donc x et $x^2 - p^2$ sont des carrés. Ecrivons $x = a^2$ et $x^2 - p^2 = b^2$, on a alors $p^2 = a^4 - b^2 = (a^2 - b)(a^2 + b)$. Comme p est premier et $a^2 - b < a^2 + b$, on a nécessairement $a^2 - b = 1$ et $a^2 + b = p^2$ donc $p^2 = 2a^2 - 1$. Modulo p, ceci entraîne que 2 est un carré, ce qui contredit la loi de réciprocité quadratique.

Si $p \mid x$, écrivons $x = pa$. Comme p divise y^2, on peut écrire $y = pz$ avec $z^2 = pa(a^2 - 1)$. Comme a et $a^2 - 1$ sont premiers entre eux, soit ($a = pb^2$ et $a^2 - 1 = c^2$), soit ($a = b^2$ et $a^2 - 1 = pc^2$) pour certains entiers b et c. Dans le premier cas, comme $1 = (a - c)(a + c)$, cela entraîne $a = 1$ donc $z = 0$ et $y = 0$, $x = p$. Dans le deuxième cas, on a $(b^2 - 1)(b^2 + 1) = pc^2$. Comme b est pair, les nombres $b^2 - 1$ et $b^2 + 1$ sont premiers entre eux donc l'un d'eux est un carré, ce qui implique que $b = 0$ ou $b = 1$, donc $x = 0$ ou $x = p$.

Exercice 4. Si $q = 2$ alors $2^m p^2 = 31$, ce qui est impossible. Par conséquent q est impair.

On écrit l'équation sous la forme $2^m p^2 = (q - 1)(q^4 + q^3 + q^2 = q + 1)$.

Si $q - 1$ n'est pas divisible par 5, comme $q^4 + \cdots + 1$ est congru à 5 modulo $q - 1$, les facteurs $q - 1$ et $q^4 + \cdots + 1$ sont premiers entre eux. D'autre part $q - 1$ est pair donc on a $2^m = q - 1$ et $p^2 = q^4 + \cdots + 1$. On en déduit facilement que $4p^2$ est strictement compris entre $(2q^2 + q)^2$ et $(2q^2 + q + 1)^2$ si $q \geqslant 5$. Par conséquent $q = 3$ et $2^{m-1}p^2 = 121$, d'où $p = 11$ et $m = 1$.

Si $q - 1$ est divisible par 5, alors 5 divise $2^m p^2$ donc $p = 5$. Comme $1 + \cdots + q^4$ est impair et divise $2^m p^2$, on a $1 + \cdots + q^4 = 5$. Impossible.

Exercice 5. Soit $d = 20n + 2$, alors d divise $2003n + 2002 - 100(20n + 2) = 3n + 1802$, donc d divise $7(3n+1802) - (20n+2) = n + 12612$. Par conséquent, d divise $3(n+12612) - (3n+1802) = 36034$. On en déduit que $10n + 1 \mid 18017 = 43 \times 419$. La seule solution est $n = 0$.

Exercice 6. Le point-clef est de remarquer que si x est d'ordre d alors x^{-1} (l'inverse de x modulo p) aussi, et que $x = x^{-1}$ si et seulement si $x = \pm 1$. Donc si $d \neq 2$ alors le produit vaut 1, et si $d = 2$ le produit vaut -1.

Exercice 7. On veut montrer par récurrence que $a_n \mid a_{n+1}$.

On a $a_n \mid 2^{a_n} + 2 \iff 2^{a_{n-1}} + 2 \mid 2^{a_n} + 2 \iff 2^{a_{n-1}-1} + 1 \mid 2^{a_n - 1} + 1$.

Remarquons que si $\frac{v}{u}$ est impair alors $2^u + 1 \mid 2^v + 1$. En effet, si $x = 2^u$ alors $2^v + 1 = (x + 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{v/u - 1})$.

D'autre part, a_n est pair pour tout n, donc il suffit de voir que $a_{n-1} - 1$ divise $a_n - 1$, ce qui équivaut à $2^{a_{n-2}} + 1 \mid 2^{a_{n-1}} + 1$. Comme a_{n-2} divise a_{n-1} par hypothèse de récurrence, et comme la 2-valuation de ces deux entiers vaut 1, $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ est un entier impair.

Exercice 8. Soit $S = \{1, \ldots, 2015\}$ et $R = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$. Pour tout $X \subset S \setminus R$, il existe un et un seul $Y \subset R$ tel que la somme des éléments de $X \cup Y$ soit congrue à 2016 modulo 2048. Le nombre recherché est donc $2^{|S\setminus R|} = 2^{2004}$.

Exercice 9. Soit p un nombre premier, et soit $b_i = v_p(a_i)$. A chaque étape, soit (b_j, b_k) est inchangé, soit il est mis dans l'ordre croissant. Donc le processus s'arrête, et l'état final $(c_1, \ldots, c_n)$ est tel que pour tout nombre premier, $(v_p(c_1), \ldots, v_p(c_n))$ est le réordonnement de $(v_p(a_1), \ldots, v_p(a_n))$.

Exercice 10. 1) Soit $f(x)$ le nombre de facteurs premiers de x modulo 2. On a $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y. On cherche a et b pour que $(f(a+1), \ldots, f(a+2016)) = (f(b+1), \ldots, f(b+2016))$. Ceci est possible car l'application $x \mapsto (f(x+1), \ldots, f(x+2016))$ ne peut pas être injective de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}^{2016}$.

2) Soit $c = b-a$. On a $f(x) = f(x+c)$ pour tout x, donc $f(c) = f(2c) = f(2)+f(c) = 1+f(c)$. Impossible.

Exercice 11. L'idée est d'utiliser l'identité $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$ et d'itérer le processus. On pose $x_1 = 2$ et $x_{k+1} = 1 + x_1 \cdots x_k$ pour tout $k \leqslant n-2$. Alors $1 = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1 \cdots x_{n-1}}$, donc

$$1 = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1 \cdots x_{n-1} - 1} - \frac{1}{x_1 \cdots x_{n-1}(x_1 \cdots x_{n-1} - 1)}.$$

Exercice 12. 1) Si n est impair alors $a = n-1$ convient. Si n est pair, écrivons $n = 2m$. Si m était pair, alors $n \mid a^n + 1$ entraîne $4 \mid (a^m)^2 + 1$, ce qui est impossible. Donc m est nécessairement impair. Soit p un nombre premier divisant n. Alors $p \mid (a^m)^2 + 1$ donc p est congru à 1 modulo 4. Réciproquement, si tout diviseur premier p de m est congru à 1 modulo 4, il existe pour tout p un entier a_p tel que $a_p^2 \equiv -1\ [p^{v_p(n)}]$. Soit a un entier tel que $a \equiv a_p\ [p^{v_p(n)}]$ pour tout $p \mid n$, alors $a^n + 1$ est divisible par $p^{v_p(n)}$ pour tout p, donc par n.

Conclusion : a_n est non vide si et seulement si n est impair ou $n = 2m$ où m est un entier dont tous les diviseurs premiers sont congrus à 1 modulo 4.

2) On a $A_2 = \{1\}$. On étudie le cas $n \neq 2$.

A_n s'identifie à l'ensemble des éléments a de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $a^n = -1$. On remarque que si $a \in A_n$ alors $a^{-1} \in A_n$, et qu'il existe $a \in A_n$ tel que $a = a^{-1}$ si et seulement si n est impair (cet élément est $a = -1$). On en déduit que $|A_n|$ est pair si et seulement si n est pair.

3) Supposons que n existe. Comme 130 est pair, on a $n = 2m$ avec m impair. Si a_0 est un entier particulier tel que $n \mid a^n + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x^n + 1 = 0$ si et seulement si $x = ay$ avec $y^n = 1$. Donc le nombre d'éléments y de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $y^n = 1$ est égal à 130.

Ecrivons la décomposition en facteurs premiers $m = \prod_p p^{\alpha_p}$. En utilisant le théorème des reste chinois, on voit que 130 est le produit des $\#\{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid a^n = 1\}$. Or, le même argument que plus haut montre que chacun de ces cardinaux est pair. De plus, $130 = 2 \times 65$ avec 65 impair, donc m est de la forme p^α. Par conséquent, 130 est le cardinal de $\{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid a^d = 1\}$ où $d = \mathrm{pgcd}(n, \varphi(p^\alpha)) = 2p^{\alpha-1}$. En utilisant l'existence d'un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on en déduit que $130 = 2p^{\alpha-1}$, ce qui est impossible.

2.2 Arithmétique groupe A (Pierre)

Exercice 1. Soit $f(x) = x^{2016} - x^{2015} + x^{2014} - x^{2013} + \cdots - x + 1$.

Prouver que, pour tout entier $m > 1$, les entiers $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \cdots$ sont deux à deux premiers entre eux.

Solution. Plus généralement, soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0) = P(1) = 1$.

Soit $m > 1$ un entier. On pose $x_0 = m$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ pour tout entier $n \geq 0$. Alors, les nombres $x_0, x_1, \cdots$ sont deux à deux premiers entre eux.

En effet, on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $P^{(n)}(0) = 1$.

Cela assure que, pour tous entiers a et $n \geq 0$, on a a et $P^{(n)}(a)$ premiers entre eux.

Mais alors, pour tous n, k avec $0 \leq k < n$, on a

$x_n = P^{(n)}(m) = P^{(n-k)}(P^k(m)) = P^{(n-k)}(x_k)$

avec x_k et $P^{(n-k)}(x_k)$ premiers entre eux. Donc x_n et x_k sont premiers entre eux, ce qui conclut.

Exercice 2. Prouver que, pour tout entier $n \geq 2$, chacun des n nombres

$$n! + 1, n! + 2, ..., n! + n$$

possède un diviseur premier qui ne divise aucun des $n - 1$ autres nombres.

Solution. Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on pose $x_k = n! + k$, et on a $x_k = k(\frac{n!}{k} + 1) = ka_k$, où $a_k \geq 2$ est un entier.

Remarquons que si p divise x_i et x_j, avec $i < j$, alors p divise $x_j - x_i = j - i$, avec $0 < j - i < n$ et donc p divise $n!$. Comme il divise x_i et x_j, c'est donc que p divise i et j.

Soit alors $k \in \{1, ..., n\}$. Deux cas se présentent :

- Soit x_k admet un diviseur premier p supérieur ou égal à n. Dans ce cas, d'après ci-dessus, p ne peut diviser aucun autre des x_i puisqu'il ne peut diviser $|k - i|$ pour $i \neq k$, ce qui nous fournit un diviseur de x_k adéquat.

- Soit tous les diviseurs premiers de x_k sont strictement inférieurs à n. Mais alors, chacun de ces diviseurs premiers divise $n!$ et x_k, et divise donc $k = x_k - n!$ (on note que cela entraine que $k \geq 2$).

On en déduit que, dans ces conditions, on doit avoir k premier et $k > \frac{n}{2}$: en effet, les diviseurs premiers de a_k étant également des diviseurs premiers de x_k, ceux-ci sont inférieurs à n. Or, aucun des nombres $2, 3, ..., k-1, k+1, ..., n$ ne peut diviser a_k puisqu'il divise $a_k - 1 = \frac{n!}{k}$. Ainsi, le seul diviseur premier possible de a_k est k et, comme $a_k \geq 2$ admet effectivement au moins un diviseur premier, c'est donc que k est premier. De plus, si $k \leq \frac{n}{2}$ alors $2k$ apparaîtrait dans la liste précédente, et donc k diviserait $\frac{n!}{k}$ et ne pourrait pas diviser a_k, en contradiction avec ce qui précède. Donc $k > \frac{n}{2}$ comme annoncé. Mais alors, k ne peut diviser aucun autre x_i car, si k divisait x_i avec $i \neq k$, alors il diviserait i et on aurait $i \geq 2k > n$, ce qui est impossible. Ainsi, dans ce cas aussi, on a trouvé un diviseur de x_k qui ne divise aucun autre des x_i, et cela conclut.

Exercice 3. Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers et, pour tout $n \geq 3$, on note p_n le plus grand diviseur premier de $p_{n-1} + p_{n-2} + 2010$.

Prouver que la suite (p_n) est bornée.

Solution. On commence par prouver que, pour tout $n \geq 3$, on a

$$p_n \leq \max(p_{n-1}, p_{n-2}) + 2012.$$

En effet :
- Si $\min(p_{n-1}, p_{n-2}) = 2$ alors
$p_n \leq p_{n-1} + p_{n-2} + 2010$
$= \min(p_{n-1}, p_{n-2}) + \max(p_{n-1}, p_{n-2}) + 2012$
$= \max(p_{n-1}, p_{n-2}) + 2012.$
- Si $\min(p_{n-1}, p_{n-2}) \geq 3$ alors, les nombres premiers p_{n-1} et p_{n-2} sont impairs. Le nombre $p_{n-1} + p_{n-2} + 2010$ est donc pair, et ainsi
$p_n \leq \frac{p_{n-1}+p_{n-2}+2010}{2}$
$\leq \max(p_{n-1}, p_{n-2}) + 1005.$

On pose $A = \max(p_1, p_2) \times 2013! + 1$. Alors, les nombres $A + k$ pour $k = 1, ..., 2012$ sont tous composés.

Or, on a clairement $p_1 \leq A$ et $p_2 \leq A$.

Supposons que $\max(p_{n-1}, p_{n-2}) \leq A$ pour un certain $n \geq 3$. Alors, d'après l'inégalité prouvée ci-dessus, il vient directement que $p_n \leq A + 2012$. Mais, comme p_n est premier, cela entraine que $p_n \leq A$.

Et finalement, par récurrence, la suite (p_n) est majorée, par A.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n.
Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels

$$P(n) < P(n+1) < P(n+2).$$

Solution. Soit p un nombre premier impair.
Pour tout entier $i \geq 0$, on pose $n_i = p^{2^i} - 1$.

Soit $k \geq 1$ un entier.

On a $P(n_k+1) = p$ et $n_k+2 = 2 \pmod 4$ (un carré impair est toujours congru à $1 \pmod 4$)).

D'autre part, pour $0 \leq i < k$, on a $p^{2^k} = (p^{2^i})^{2^{k-i}} = 1 \pmod{p^{2^i} + 1}$, donc $n_k + 2 = 2 \pmod{n_i + 2}$.

Puisque $n_k + 2$ et $n_i + 2$ sont pairs, cela assure que pgcd$(n_k + 2, n_i + 2) = 2$. Ainsi, lorsque k varie, les nombres $P(n_k + 2)$ sont tous impairs et deux à deux distincts.

En particulier, on peut choisir $k \geq 1$ minimal tel que $P(n_k + 2) > p$.

Ainsi, $P(n_k + 1) < P(n_k + 2)$.

De plus, on vérifie facilement que $n_k = (p-1)\prod_{i=0}^{k-1}(n_i + 2)$, et la minimalité de k assure que chacun des facteurs n'a aucun diviseur premier supérieur à p. Comme p ne divise évidemment aucun de ces facteurs, c'est donc que $P(n_k) < p$.

Et finalement, $P(n_k) < P(n_k + 1) < P(n_k + 2)$.

Ainsi, pour chaque nombre premier impair p, il existe un nombre n_k de la forme $n_k = p^{2^k} - 1$ qui vérifie les inégalités désirées, et cela conclut.

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier. On note $d_1, d_2, \cdots, d_k$ les diviseurs strictement positifs de n. Pour tout i, on note b_i le nombre de diviseurs positifs de d_i. Prouver que

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_k)^2 = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_k^3.$$

Solution. On traite d'abord le cas $n = p^m$, où p est un nombre premier. Les diviseurs positifs de n sont $1, p, p^2, \cdots, p^m$, qui ont respectivement $1, 2, 3, \cdots, m+1$ diviseurs positifs. Or, il est bien connu que $1+2+\cdots+(m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et $1^3+2^3+\cdots+(m+1)^3 = (\frac{(m+1)(m+2)}{2})^2$, d'où la conclusion dans ce cas.

On se place maintenant dans le cas où $n = ab$, avec $a, b > 1$ et premiers entre eux. On note $a_1, \cdots, a_k$ les diviseurs positifs de a, et $b_1, \cdots, a_m$ ceux de b. Pour tout i, on note α_i le nombre de diviseurs positifs de a_i et, pour tout j, on note β_j le nombre de diviseurs positifs de b_j.

Puisque a et b sont premiers entre eux, les diviseurs positifs de $n = ab$ sont les entiers de la forme $a_i b_j$, pour $i = 1, \cdots, k$ et $j = 1, \cdots, m$. Evidemment, pour tous i, j, les entiers a_i et b_j sont premiers entre eux donc le nombre de diviseurs positifs de $a_i b_j$ est $\alpha_i \beta_j$. La somme S des nombres de diviseurs positifs des diviseurs positifs de n est donc $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)(\beta_1 + \cdots + \beta_m)$, et ainsi $S^2 = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)^2)(\sum_{j=1}^{m} \beta_j)^2$.

Mais, la somme T des cubes des nombres de diviseurs positifs des diviseurs positifs de n est $\sum_{i,j} (\alpha_i \beta_j)^3 = (\sum_i (\alpha_i)^3)(\sum_j (\beta_j)^3)$. Le résultat désiré est alors vrai pour n s'il l'est pour a et b.

Il suffit donc de raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. Le résultat est clairement vrai pour $n = 1, 2, \cdots, 5$ puisqu'il est vrai pour toutes les puissances de nombres premiers d'après ci-dessus.

Supposons le résultat établi pour pour tout entier positif $m \leq n-1$, où $n \geq 2$. Si n est une puissance de nombre premier, on a vu dès de départ que le résultat est vrai pour n. Sinon, il existe un nombre premier p et des entiers $k \geq 1$ et $A > 1$ tels que $n = p^k A$ et A premier avec p. Puisque $k \geq 1$ et $A > 1$, on a $p^k < n$ et $A < n$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour p^k et pour A. D'après ci-dessus, il est alors vrai pour $p^k A = n$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 6. Déterminer les nombres premiers p pour lesquels il existe deux entiers naturels m et n tels que

$$p = m^2 + n^2 \text{ et } p \text{ divise } m^3 + n^3 - 4.$$

Solution. Les seuls nombres premiers ayant les propriétés demandées sont $p = 2$ et $p = 5$.

On remarque en effet que $p = 2$ convient, en prenant $m = n = 1$.

On suppose donc, à partir de maintenant, que p est un nombre premier impair solution du problème. On considère alors des entiers strictement positifs m et n vérifiant les conditions de l'énoncé (on ne peut avoir $m = 0$ par exemple, car sinon $p = n^2$ ne serait pas premier). On a

$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 2mn \pmod{p},$$

ce qui conduit à

$$2(m+n)^3 = 2(m^3+n^3) + 6mn(m+n) = 8 + 3(m+n)^3 \pmod p,$$

et enfin à

$$(m+n)^3 = -8 \pmod p,$$

ce qui signifie que p divise $2(m+n+2)(mn-m-n+2)$.

Comme on a supposé que $p \neq 2$, il en résulte que $p = m^2+n^2$ divise $m+n+2$ ou $mn-m-n+2$. On note que $mn-m-n+2 = (m-1)(n-1)+1$, donc chacun des deux nombres $m+n+2$ et $mn-m-n+2$ est positif et, en particulier, le nombre p doit être inférieur ou égal à l'un d'eux.

Or, des inégalités $m^2+n^2 \geq 2mn$ et $m+n \geq 2$, on déduit immédiatement que $p > mn - m - n + 2$.

La seule possibilité est donc que $m^2+n^2 \leq m+n+2$. De cette dernière inégalité, il découle facilement que $m \leq 2$ et $n \leq 2$, et donc que $p \leq 8$.

Il ne reste plus qu'à examiner les valeurs restantes.

Les nombres 3 et 7 ne peuvent s'écrire sous forme de somme de deux carrés (soit qu'on le vérifie à la main, soit que l'on sache qu'un nombre premier qui s'écrit comme une telle somme est nécessairement congru à 1 modulo 4), et ne sont donc ni l'un ni l'autre solution du problème. Par contre, le nombre premier $p = 5$, lui, convient en prenant $m = 1$ et $n = 2$, ce qui conclut.

Exercice 7. Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4, et soit a, b, c, d des entiers tels que $a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} = d^{2p}$.

Prouver que p divise le produit $abcd$.

Solution. Le plus difficile est sans doute de savoir comment commencer. Evidemment, on suppose, par l'absurde, que a, b, c, d sont des entiers tels que $a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} = d^{2p}$, où p est un nombre premier congru à 3 modulo 4, mais que p ne divise aucun des entiers a, b, c, d. Quitte à diviser chacun des nombres a, b, c, d, on peut supposer que pgcd$(a, b, c, d) = 1$.

La première idée, assez classique lorsqu'il s'agit de carrés, est de raisonner modulo 4 (et d'ailleurs, l'énoncé n'y est pas étranger). On remarque alors que d ne peut être pair sans quoi, on aurait $a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} = 0 \pmod 4$. Mais, un carré étant toujours congru à 1 ou à 0 modulo 4, l'égalité précédente forcerait alors a, b, c à être tous pairs, en contradiction avec pgcd$(a, b, c, d) = 1$. Donc d est impair, et le même argument montre que, parmi a, b, c, il y en a deux qui sont pairs, disons a et b, et le troisième impair.

Dans ces conditions, on a

$a^{2p} + b^{2p} = d^{2p} - c^{2p} = (d^2 - c^2)A$, avec $A = d^{2(p-1)} + d^{2(p-2)}c^2 + ... + c^{2(p-1)}$.

Et alors $A = p \pmod 4$

$= 3 \pmod 4$.

Cela permet d'affirmer que A possède un diviseur premier q congru à 3 modulo 4, qui apparaît dans sa décomposition en facteurs premiers selon un exposant impair.

C'est sur ce nombre premier q que nous allons nous concentrer afin d'atteindre la contradiction désirée.

- Si q ne divise pas b : alors, comme q divise $a^{2p}+b^{2p}$, il ne divise pas non plus a, et a est inversible modulo q. De plus, $a^{2p}=-b^{2p} \pmod q$ donc $-1=(\frac{b}{a})^{2p} \pmod q$, ce qui assure que -1 est un résidu quadratique modulo q. Or, il est bien connu que cela est impossible pour q premier congru à 3 modulo 4. C'est une conséquence directe du critère d'Euler, voire du petit théorème de Fermat, mais bon, retrouvons-le ici :

Puisque a n'est pas divisible par le nombre premier q, le petit théorème de Fermat assure que $(a^{2p})^{\frac{q-1}{2}}=(a^p)^{q-1}=1 \pmod q$. De même, on a $(b^{2p})^{\frac{q-1}{2}}=1 \pmod q$. Mais $\frac{q-1}{2}$ est impair donc, modulo q, on a $1=(a^{2p})^{\frac{q-1}{2}}=(-b^{2p})^{\frac{q-1}{2}}=-1$, ce qui est absurde puisque $q\geq 3$.

- Ainsi, q divise b et, par symétrie, divise aussi a. On note s (resp. t) l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de a (resp. b). Par symétrie des rôles, on peut supposer que $s\leq t$. Prouvons que q divise d^2-c^2. En effet :

Si $s<t$ alors q^{2ps} est la plus grosse puissance de q qui divise $a^{2p}+b^{2p}=(d^2-c^2)A$. Mais, q divise A selon une puissance impaire, donc q doit diviser d^2-c^2.

Si $s=t$ alors $a^{2p}+b^{2p}=q^{2ps}(x^{2p}+y^{2p})$ avec $xy\neq 0 \pmod q$. Comme ci-dessus on prouve que $x^{2p}+y^{2p}\neq 0 \pmod q$ (sinon -1 serait un résidu quadratique modulo q), et on retrouve que q^{2ps} est la plus grosse puissance de q, avec la même conclusion.

Ainsi, dans tous les cas, on a $d^2=c^2 \pmod q$. Mais alors $A=pd^{2(p-1)} \pmod q$ et, comme q est premier et divise A, il doit diviser p ou d. Si q divise p, qui lui aussi est premier, on a $p=q$, ce qui est impossible puisque q divise a. Si q divise d alors, puisque $d^2=c^2 \pmod q$, c'est que q divise aussi c, et divise donc a,b,c,d, en contradiction avec pgcd$(a,b,c,d)=1$.

Exercice 8. Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2.

a) On suppose que, pour chaque entier $k>1$, il existe un entier a_k tel que $b-a_k^n$ soit divisible par k. Prouver que $b=A^n$ pour un certain entier A.

b) Cela reste-t-il vrai si l'hypothèse ne porte que sur les entiers k qui sont des puissances de nombres premiers?

c) Cela reste-t-il vrai si l'hypothèse ne porte que sur les entiers k qui sont des nombres premiers?

Solution. Soit $b=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, la décomposition de b en facteurs premiers. On prouve directement que la réponse au b) (et donc au a)) est affirmative.

Soit $i\in\{1,...,r\}$. Pour $k=p_i^{\alpha_i+1}$, il existe un entier a_k tel que $b-a_k^n$ soit divisible par $p_i^{\alpha_i+1}$. Comme b est divisible par $p_i^{\alpha_i}$ mais pas par $p_i^{\alpha_i+1}$, on en déduit que a_k^n est divisible par $p_i^{\alpha_i}$ mais pas par $p_i^{\alpha_i+1}$. Ainsi, l'exposant de p_i dans la décomposition en facteurs premiers de a_k^n est α_i, ce qui assure que α_i est un multiple de n.

Ceci étant vrai pour tout i, on en déduit que tous les exposants qui apparaissent dans la décomposition de b en facteurs premiers sont des multiples de n, et donc qu'il existe un entier A tel que $b=A^n$.

Par contre, la réponse au c) est négative, par exemple pour $n=8$ et $b=16$:

Soit p un nombre premier. La congruence $x^8-16=0 \pmod p$ s'écrit également $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=0 \pmod p$.

- Si -1 est un résidu quadratique modulo p, il existe un entier a_p tel que $a_p^2+2a_p+2=(a_p+1)^2+1=0 \pmod p$, d'où $b=16=a_p^8 \pmod p$.

- Si -2 est un résidu quadratique modulo p, on raisonne de la même façon avec le facteur x^2+2.

- Si ni -1 ni -2 est un résidu quadratique modulo p alors p est impair et, d'après le critère d'Euler, on a $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \neq 1 \pmod p$ et $(-2)^{\frac{p-1}{2}} \neq 1 \pmod p$.

Or, d'après le petit théorème de Fermat, on a

$[(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1][(-1)^{\frac{p-1}{2}}+1]=0 \mod p$

et $[(-2)^{\frac{p-1}{2}}-1][(-2)^{\frac{p-1}{2}}+1]=0 \pmod p$,

donc $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1 \pmod p$ et $(-2)^{\frac{p-1}{2}}=-1 \pmod p$. Par suite, on a $(2)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-2)^{\frac{p-1}{2}}=1 \pmod p$, et le critère d'Euler assure que 2 est un résidu quadratique modulo p. Il suffit alors de raisonner comme ci-dessus, avec le facteur x^2-2.

Ainsi, pour tout nombre premier p, il existe un entier a_p tel que $b=16=a_p^8 \pmod p$, mais 16 n'est pas la puissance huitième d'un entier.

2.3 Algèbre groupe A (Igor)

2.3.1 IAG

Exercice 1 Soient $a,b,c>0$ des nombres réels. Montrer que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Exercice 2 Soient $a,b,c>0$ des nombres réels. Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ et que $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$.

Exercice 3 Soient $a,b,c>0$ des nombres réels. Montrer que

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Exercice 4 Soient a,b,c des nombres réels strictement positifs tels que abc =1. Montrer que

$$\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6}.$$

Exercice 5 Soient $a,b,c>0$ des nombres réels tels que $a+b+c=3$. Montrer que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca.$$

2.3.2 Cauchy-Schwarz

Exercice 1 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$ des nombres réels tels que $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$. Montrer que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n).$$

Exercice 2 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a+b+c = a^2+b^2+c^2$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a^2+ab} + \frac{b^2}{b^2+bc} + \frac{c^2}{c^2+ca} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Exercice 3 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

2.3.3 Jensen

Exercice 1 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels. Montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

2.3.4 Hölder

Exercice 1 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Montrer que

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)^5} + \frac{1}{b^3(c+a)^5} + \frac{1}{c^3(a+b)^5}\right)^{1/5} \geq 3/2.$$

Exercice 2 Soit $p \geq 2$ un nombre réel. Si $a, b, c > 0$, montrer que

$$\left(\frac{a^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3} + \left(\frac{b^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3} + \left(\frac{c^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3} \leq a+b+c.$$

2.3.5 Partie cours : Muirhead et Schur

On rappelle ici rapidement les inégalités de Muirhead et de Schur.

On fixe $x_1, \ldots, x_n > 0$. Si $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \geq \cdots \geq b_n$ sont des nombres réels rangés dans l'ordre décroissant, on écrit

$$(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

si $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, ... mais $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots b_n$.

On note

$$[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

où S_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Inégalité de Muirhead : si $(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, alors $[a_1, \ldots, a_n] \geq [b_1, \ldots, b_n]$. En pratique, on l'utilise très rarement avec plus de 3 variables.

Exemples: Ceci implique l'IAG (car $(1, 0, \ldots, 0) \succ (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$).

$(3, 0, 0) \succ (2, 1, 0)$.

$(3, -1, -1) \succ (1, 0, 0)$.

Inégalité de Schur : si $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, alors

$$x^a(x^b - y^b)(x^b - z^b) + y^a(y^b - x^b)(y^b - z^b) + z^a(z^b - x^b)(z^b - y^b) \geq 0.$$

En notation symétrique :

$$[a + 2b, 0, 0] + [a, b, b] \geq 2[a + b, b, 0].$$

Par exemple, pour $a = b = 1$,

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz \geq 2(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2).$$

2.3.6 Muirhead

Exercice 1 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $abc = 1$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$.

Exercice 2 Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + 2\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}.$$

Exercice 3 Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$.

Exercice 4 Soient $x, y, z \geq 0$ des nombres réels tels que $x + y + z = 1$. Montrer que

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Exercice 5 Soient $a, b, c, d > 0$ des nombres réels. Montrer que

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq abcd(a + b + c + d).$$

2.3.7 Éléments de solution

Solution de l'exercice 1 IAG avec (a, b) (b, c) et (c, a).

Solution de l'exercice 2 Pour la première inégalité, IAG avec (a^2, b^2), etc. Pour la deuxième, on prend les poids $((2a^4, b^4, c^4)$

Solution de l'exercice 3 IAG avec $a^3/(bc) + b + c$ (trois fois, puis on somme).

Solution de l'exercice 4 Par IAG, $a^3 + bc \geq 2a$. Il suffit donc de montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} \iff ab+bc+ca \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} \iff$$

$$\iff 3 \leq ab+bc+ca,$$

qui est vrai par IAG.

Solution de l'exercice 5 On écrit $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. Il suffit donc de prouver que $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 9$. Ceci découle de IAG avec $(a^2, \sqrt{a}, \sqrt{a})$: $a^2 + 2\sqrt{a} \geq 3a$, qu'on somme trois fois (avec b et c).

Solution de l'exercice 6 On utilise l'inégalité de CS Version Engel:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Alors

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n} = \frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_n).$$

Solution de l'exercice 7 Par Cauchy-Schwarz, $\frac{a^2}{a^2+ab} + \frac{b^2}{b^2+bc} + \frac{c^2}{c^2+ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$.Il suffit donc de montrer que $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{a+b+c}{2}$, ou encore $2(a+b+c) \geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = a+b+c+ab+bc+ca$, ou encore $a+b+c = a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, ce qui classique.

Solution de l'exercice 8 On écrit que $1/x^3 = (1/x)^2/x$... puis IAG.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{1/a^2}{a(b+c)} + \frac{1/b^2}{b(a+c)} + \frac{1/c^2}{c(a+b)} \\
&\geq \frac{(1/a+1/b+1/c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2(abc)} \\
&\geq \frac{3(abc)^{3/2}}{2} = 3/2.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9 Par homogénéité, on peut supposer que $a + b + c = 1$. Soit $f(x) = x/(1-x)^2$, convexe sur $[0, 1]$. Alors

$$\frac{a}{(1-a)^2} + \frac{b}{(1-b)^2} + \frac{c}{(1-c)^2} \geq 3f((a+b+c)/3) = 3f(1/3) = \frac{9}{4}.$$

Solution de l'exercice 10 On applique Holder avec les coefficients $1/5$ et $4/5$ et $(a^{8/5}, b^{8/5}, c^{8/5})$. Alors

$$(a^2+b^2+c^2)^{4/5}\left(\frac{1}{a^3(b+c)^5}+\frac{1}{b^3(c+a)^5}+\frac{1}{c^3(a+b)^5}\right)^{1/5} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

On conclut par l'inégalité de Nesbitt.

Solution de l'exercice 11 On a

$$\left(\left(\frac{a^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3}+\left(\frac{b^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3}+\left(\frac{c^3+pabc}{1+p}\right)^{1/3}\right)^3 \leq$$

$$\left(\frac{3}{1+p}\right)(a+b+c)\left((a^2+pbc)+(b^2+pca)+(c^2+pab)\right).$$

Or $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$, donc

$$\left((a^2+pbc)+(b^2+pca)+(c^2+pab)\right) \leq (p+1)(a^2+b^2+c^2) \leq \frac{p+1}{3}(a+b+c)^3.$$

Solution de l'exercice 12 On homogénéise en multipliant par $(abc)^{1/3}$+Muirhead

Solution de l'exercice 13 Ceci se ramène à $[3,0,0] \geq [2,1,0]$.

Solution de l'exercice 14 IAG avec poids.

Solution de l'exercice 15 Ceci revient à montrer que

$$12[2,1,0] \leq 7[3,0,0]+5[1,1,1].$$

Pour cela, on utilise que $[2,1,0] \leq [3,0,0]$ et $2[2,1,0] \leq [3,0,0]+[1,1,1]$.

Solution de l'exercice 16 On a

$$\frac{23a^4b+7b^4c+11c^4d+10ad^4}{51} \geq a^2bcd.$$

2.4 Combinatoire groupe A (Pierre)

Exercice 1. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels, la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie, pour tout entier n, par $a'_n = \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ est appelée *la moyenne de* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On définit ensuite la suite $(a''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ comme la moyenne de $(a'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la suite $(a'''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ comme la moyenne de $(a''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ etc...

Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et toutes ses moyennes successives ne contiennent que des entiers, on dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *équilibrée*.

Prouver que si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée alors $(a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée.

Solution.

Pour tout entier $m \geq 0$, on dira que la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-*équilibrée* lorsque ses moyennes jusqu'à la $m^{ième}$ itération ne contiennent que des entiers (la suite elle-même est considérée comme sa moyenne d'ordre 0). On prouve alors, par récurrence sur m, que si une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-équilibrée alors la suite $(a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-équilibrée. Cela entrainera directement la conclusion souhaitée.

- Pour $m = 0$, c'est évident puisqu'une suite 0-équilibrée ne contient donc que des entiers.

- Supposons le résultat assuré un certain entier $m \geq 0$.

On considère alors une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui est $(m+1)$-équilibrée. La suite $(a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc formée d'entiers, et la suite $(\frac{a_n+a_{n+1}}{2})_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-équilibrée. Or, il est clair que la somme de deux suites m-équilibrées est également m-équilibrée donc, puisque $\frac{a_n-a_{n+1}}{2} = \frac{a_n+a_{n+1}}{2} - a_{n+1}$, la suite $(\frac{a_n-a_{n+1}}{2})_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-équilibrée. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les suites $((\frac{a_n+a_{n+1}}{2})^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $((\frac{a_n-a_{n+1}}{2})^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont m-équilibrées. Mais, on a $(\frac{a_n+a_{n+1}}{2})^2 + (\frac{a_n-a_{n+1}}{2})^2 = \frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{2}$ donc, comme ci-dessus, la suite $(\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{2})_{n\in\mathbb{Z}}$ est m-équilibrée. Mais cela signifie justement que $(a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $(m+1)$-équilibrée.

On peut ajouter deux remarques :

- Tout d'abord, une suite équilibrée n'est pas forcément constante, comme le montre l'exemple de la suite des entiers pairs.

- Ensuite que, pour $p \geq 2$ fixé, on peut généraliser le problème en posant cette fois $a'_n = \frac{a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p-1}}{p}$ pour tout n.

Pour $p = 3$, une conclusion analogue peut être prouvée, à savoir que si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée alors $(a_n^3)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée.

La détermination des entiers p pour lesquels l'affirmation "si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée alors $(a_n^p)_{n\in\mathbb{Z}}$ est équilibrée" est vraie est un problème ouvert, mais on conjecture que ce sont les nombres premiers.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier.

Trouver les entiers $k \in \{0, 1, ..., n\}$ pour lesquels il existe n droites distinctes du plan qui déterminent exactement k points d'intersection.

Solution. On va prouver que les entiers cherchés sont $k = 0$ et $k = 1$ si $n = 2$, et $k = 0, 1, n, n-1$ si $n \geq 3$.

Pour $n = 2$, il est clair qu'avec deux droites distinctes, on ne peut obtenir plus d'un point d'intersection. Réciproquement, selon que l'on choisisse deux droites parallèles ou sécantes, on obtient 0ou 1 point d'intersection.

On suppose maintenant que $n \geq 3$.

Lemme. Soit $n \geq 3$ un entier et soit $D_1, \cdots, D_n$ des droites distinctes du plan telles que par tout point d'intersection de deux d'entre elles passe une troisième de ces droites.

Alors, les n droites sont parallèles ou les n droites sont concourantes.

Preuve du lemme. Supposons que les n droites ne soient pas toutes parallèles. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de droites, elles ne peuvent déterminer qu'un nombre fini de points d'intersection, disons $A_1, \cdots, A_p$.

Par l'absurde : supposons que les n droites ne soient pas concourantes.

Il existe donc une des n droites, disons Δ, qui ne passe pas par A_1. L'ensemble E des A_i qui n'appartiennent pas à Δ est donc fini et non vide. Parmi les $A_i \in E$, notons A celui (l'un de ceux) dont la distance d_A à Δ est la plus petite. Par hypothèse, il existe trois des n droites qui passent par A.

- Si aucune de ces droites n'est parallèle à Δ, alors ces trois droites rencontrent Δ respectivement aux points P, Q et R, avec Q entre P et R. Mais, par Q doit passer une autre des n droites, qui doit rencontrer l'un des segments $[AP]$ ou $[AR]$ en son intérieur. Cela fournit un point de E dont la distance à Δ est strictement plus petite que d_A, en contradiction avec la minimalité de d_A.

- Si l'une de ces droites, disons Δ', est parallèle à Δ, les autres droites rencontrent Δ respectivement en P et Q, et on peut supposer que l'on a orienté Δ (et Δ' dans le même sens) de sorte que P soit à gauche de Q. Sans perte de généralité, on peut supposer que, parmi les points de E qui sont sur Δ', c'est le point A qui est le plus à droite. Par hypothèse, il existe une autre des n droites qui passe par Q. Mais,si cette troisième droite rencontre $[AP]$ en son intérieur, on retrouve la contradiction ci-dessus. Donc, cette droite doit rencontrer Δ' en un point situé à droite de A, en contradiction avec notre choix de A.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui achève la preuve du lemme.

Revenons au problème.

Si $n \geq 3$ est un entier, on dira que l'entier $k \geq 0$ est *réalisable pour* n s'il existe n droites distinctes du plan qui déterminent exactement k points d'intersection.

En choisissant n droites parallèles, ou n droites concourantes, on constate que les entiers $k = 0$ et $k = 1$ sont réalisables pour n. Si l'on choisit $n-1$ droites parallèles et une autre droite non parallèles aux précédentes, on vérifie que $k = n-1$ est réalisable pour n. Enfin, si l'on choisit $n-1$ droites concourantes en un point A (on a $n-1 \geq 2$) et une autre droite qui ne passe pas par A et qui n'est pas parallèle à l'une des $n-1$ précédentes, on voit que $k = n$ est réalisable pour n.

Nous allons prouver par récurrence sur $n \geq 3$ que les entiers $k \leq n$ réalisables pour n sont $k = 1, 1, n-1, n$.

- Pour $n = 3$, on a prouvé le résultat ci-dessus.

- Supposons le résultat établi pour l'entier $n-1 \geq 3$. D'après ci-dessus, il suffit de prouver que si $1 < k < n$ alors n'est pas réalisable pour n.

Par l'absurde : supposons que l'entier k soit réalisable pour n, avec $1 < k < n$. On considère alors une disposition de n droites $D_1, \cdots, D_n$ qui déterminent exactement k points d'intersection, disons $A_1, \cdots, A_k$.

Pour tout i, on note x_i le nombre de ces droites qui passent par A_i (et donc $x_i \geq 2$).

- Si, pour tout i, on a $x_i \geq 3$, cela signifie que par tout point d'intersection de deux des n droites il en passe toujours une troisième. D'après le lemme, les n droites sont alors soit toutes parallèles soit toutes concourantes, et on a donc $k = 1$ ou $k = 0$, en contradiction avec $k > 1$.

- Donc, il existe i tel que $x_i = 2$. Sans perte de généralité, on suppose que $x_k = 2$ et que les deux droites qui se rencontrent en A_k sont D_n et D_{n-1}. On "élimine" provisoirement D_n de la configuration considérée, ce qui nous donne une configuration de $n-1$ droites qui déterminent q points d'intersection, avec $q < k$ (car on perd A_k), et donc $q < n-2$. L'entier q est donc réalisable pour $n-1$ et l'hypothèse de récurrence assure alors que $q = 0$ ou $q = 1$. Mais, si $q = 0$ c'est que les $n - 1$ droites restantes sont parall'eles. Puisque D_n n'est pas parallèle avec ces droites (sinon le point A_k n'existerait pas), on déduit que les n droites considérés déterminent exactement $n - 1$ points d'intersection, en contradiction avec $k < n - 1$.

Si, par contre, on a $q = 1$, c'est que les $n - 1$ droites restantes sont concourantes, disons en A. Notons qu'alors $A \notin D_n$, car sinon on aurait $D_n = D_{n-1}$. Ainsi, dans la configuration initiale à n droites, on a $k = n-1$ ou $k = n$, selon que D_n est parallèle à l'une des autres droites ou pas. Dans les deux cas, cela contredit que $k < n - 1$.

Cela prouve le résultat pour la valeur n, et achève la démonstration.

Exercice 3. On considère une rangée de cases numérotées $0, 1, ..., k$ de gauche à droite où, pour chaque $i \geq 1$, la case n°i contient x_i jetons. Il n'y a initialement aucun jeton sur la case n°0. A tour de rôle, Alice et Bob jouent alors selon les règles suivantes :

- Bob choisit un ensemble S de jetons, pas forcément tous sur la même case.
- Alice peut alors soit éliminer tous les jetons qui ne sont pas dans S mais alors déplacer chaque jeton de S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche (un tel jeton passe donc d'une case n°i à la case n°$i-1$), soit éliminer tous les jetons qui sont dans S mais alors déplacer chaque jeton qui n'est pas dans S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche.

Bob gagne la partie s'il arrive à amener un jeton sur la case n°0, et Alice gagne si elle arrive à éliminer tous les jetons.

Prouver qu'Alice possède une stratégie gagnante si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i < 1$.

La réciproque est-elle vraie?

Solution. Dans tout ce qui suit, on peut clairement supposer que Bob ne choisit jamais $S = \emptyset$ ou S l'ensemble de tous les jetons non encore éliminés, sans quoi Alice gagne immédiatement. Du coup, le nombre de jetons diminue strictement après chaque fois qu'Alice joue, ce qui assure que le jeu se termine toujours en un nombre fini de tours, soit par élimination de tous les jetons, soit parce que l'un d'eux aura atteint la case numéro 0. Ainsi, il n'y aura pas de partie nulle.

De plus, s'agissant d'un jeu à information parfaite, il est bien connu que l'un des deux joueurs a alors une stratégie gagnante. Reste à savoir lequel...

Supposons tout d'abord que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i < 1$:

Approche probabiliste :

Fixons une stratégie pour Bob. Alice va alors jouer de façon aléatoire. Plus précisément, à chaque tour, après que Bob ait choisi son ensemble S de jetons, Alice lance une pièce équilibrée. Si elle obtient Face, elle élimine les jetons de S (et déplace donc ceux qui ne sont pas dans S vers la gauche) et, si elle obtient Pile, elle fait le contraire.

Pour chaque jeton j, on note X_j la variable aléatoire égale à 1 si le jeton j est sur la case numéro 0 à la fin de la partie, et égale à 0 sinon.

Soit enfin $X = \displaystyle\sum_{j} X_j$, la somme portant sur l'ensemble des jetons de départ.

On remarque que X représente le nombre total de jetons qui arrivent sur la case numéro 0 à la fin du jeu, et donc qu'Alice gagne si et seulement si $X < 1$.

Soit j un des jetons de départ. A chaque tour, Bob peut choisir S de sorte que, si j n'a pas encore été éliminé, on ait $j \in S$ ou $j \notin S$ mais, quoi qu'il en soit, la probabilité que j soit alors déplacé vers la gauche est égale à $\frac{1}{2}$. Si, au début du jeu, le jeton j se trouve sur la case numéro i, il arrive sur la case numéro 0 à la fin du jeu si et seulement si les i premiers lancers de pièces ont tous conduit à des déplacements vers la gauche, ce qui arrive donc avec une probabilité $\frac{1}{2^i}$. Par suite, on a $E(X_j) = \frac{1}{2^i}$ pour tout jeton j.

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(X) = \displaystyle\sum_j E(X_j) = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i < 1$

Cela assure que l'événement $[X < 1]$ se réalise avec une probabilité non nulle. Ainsi, quelle que soit la stratégie de Bob, Alice a une probabilité non nulle de gagner, ce qui prouve que Bob n'a pas de stratégie gagnante. D'après notre remarque initiale, c'est donc Alice qui en possède une.

Approche déterministe :

Plaçons nous à un instant donné au cours de la partie, juste avant que ce soit à Bob de jouer, et considérons la configuration C obtenue. Pour chaque i, on note y_i le nombre de jetons qui sont alors sur la case numéro i, et on définit *le poids de C* par $W(C) = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} y_i$.

Pour faire le lien avec l'approche probabiliste, on peut noter que $W(C) = E(Y)$, où Y est le nombre de jetons qui vont arriver sur la case numéro 0 si Alice joue le reste de la partie, depuis la configuration C, de la façon aléatoire ci-dessus.

La stratégie d'Alice va consister alors à toujours choisir des configurations afin de minimiser les poids W successifs :

Soit donc C une configuration pour laquelle le jeu ne soit pas déjà terminé, de poids $W = W(C)$, et supposons que Bob choisisse l'ensemble S de jetons.

On note W^+ (resp. W^-) le poids de la configuration obtenue si Alice déplace les jetons de S vers la gauche (resp. élimine les jetons de S).

Pour chaque jeton j, la contribution de j est nulle (j a été éliminé) dans l'une des sommes W^+ et W^-, et vaut le double de ce qu'elle est dans W pour l'autre. Ceci étant vrai pour chaque jeton, on a donc $W = \frac{1}{2}(W^+ + W^-)$.

En particulier, Alice peut alors choisir une configuration C' pour laquelle $W(C') \leq W(C)$. Or, puisqu'on débute le jeu avec une configuration de poids strictement inférieur à 1, cela assure que, tout au long du jeu, Alice peut imposer des configurations de poids strictement inférieurs à 1. Ceci empêche clairement Bob de gagner puisqu'un jeton sur la case numéro 0 donne, à lui seul, un poids égal à 1.

Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i \geq 1$.

On va prouver que cette fois c'est Bob qui possède une stratégie gagnante. Compte-tenu de notre remarque préliminaire, il suffit de prouver qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante.

Soit C une configuration pour laquelle le jeu n'est pas encore terminé. On note J l'ensemble des jetons de C.

Si $A \subset J$, on note C_A la configuration obtenue à partir de C en ne gardant que les jetons qui sont dans A (sans les déplacer vers la gauche).

Lemme.

Si C est une configuration telle que $W(C) \geq 1$, il existe une partie S de J telle que $W(C_S) \geq \frac{1}{2}$ et $W(C_{\overline{S}}) \geq \frac{1}{2}$.

Preuve du lemme.

Tout d'abord, on remarque que si une configuration C vérifie $W(C) \geq 1$ alors il existe i tel que $y_i \geq 2$. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$W(C) \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} = 1 - \frac{1}{2^k} < 1.$$

On raisonne par récurrence sur le nombre \$n\$ de jetons de la configuration :

- Si la configuration considérée ne possède que deux jetons alors, d'après ci-dessus, ils sont tous les deux sur la même case. De plus, si l'on veut que $W(C) \geq 1$, il est facile de vérifier qu'ils sont en fait sur la case numéro 1. Ainsi, la partie S formée par l'un des deux jetons convient.

- Soit $n \geq 3$ et supposons la conclusion assurée pour toute configuration de poids supérieur ou égal à 1, et contenant $n-1$ jetons. Soit alors C une configuration telle que $W(C) \geq 1$ et à n jetons.

Si $y_1 \geq 2$, une partie S formée uniquement d'un des jetons qui sont sur la case numéro 1 convient.

Sinon, soit $i \geq 2$ tel que $y_i \geq 2$ et soit A et B deux jetons qui sont sur la case numéro i. On considère alors la configuration C' identique à C sauf pour A et B qui sont remplacés par un seul jeton X, placé sur la case numéro $i-1$. On a clairement $W(C') = W(C) \geq 1$, et C' ne contient que $n-1$ jetons. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une partie S' de l'ensemble des jetons de C' telle que $W(C_{S'}) \geq \frac{1}{2}$ et $W(C_{\overline{S'}}) \geq \frac{1}{2}$.

Il est alors facile de vérifier que si S est la partie formée des jetons de S', et en remplaçant X par A et B, on a bien $W(C_S) \geq \frac{1}{2}$ et $W(C_{\overline{S}}) \geq \frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence et la preuve.

Revenons au jeu.

Une fois que Bob a choisi un ensemble S de jetons, quel que soit le choix d'Alice, celui-ci conduira à une configuration dont le poids sera le double de celui de la configuration formée uniquement par les jetons qui ne seront pas éliminés. Le lemme assure donc qu'à partir d'une configuration de poids supérieur ou égal à 1, Bob peut choisir S de sorte qu'après le choix d'Alice, on obtienne une configuration de poids supérieur ou égal à 1. Puisque la configuration initiale est supposée de poids supérieur ou égal à 1, Bob peut donc imposer que toute la partie se déroule sur de telles configurations. Cela empêche clairement Alice de gagner (elle cherche à obtenir une configuration de poids nul), d'où la conclusion.

Exercice 4. Dans le plan, on trace $n \geq 3$ droites, deux jamais parallèles et trois jamais concourantes. Ces droites divisent le plan en régions (certaines infinies d'autres non, mais seules sont considérées les régions non subdivisées par les droites).

Prouver qu'au moins $n-2$ de ces régions sont des triangles.

Solution. On considère donc un régionnement du plan par $n \geq 3$ droites comme précisé dans l'énoncé. Il est clair que toutes les régions sont convexes, certaines infinies d'autres non. La difficulté principale vient sans doute de savoir comment caractériser les triangles par rapport aux autres régions.

Les régions bornées sont des polygones convexes, et l'idée fondamentale découle d'une remarque simple : dans un polygone convexe, il n'y a pas beaucoup d'angles intérieurs qui soient aigus. En fait, jamais plus de trois (ce qui est ici laissé au lecteur). Du coup, on peut s'attendre à ce que dans un polygone convexe, la somme de deux angles intérieurs consécutifs soit plutôt toujours supérieure à π, alors que dans un triangle c'est le contraire. C'est exactement ce que l'on va utiliser.

Soit $[AB]$ un segment de la configuration, c.à.d. que A et B sont deux des points d'intersection définis par les n droites, que $[AB]$ est contenu dans l'une de ces droites et qu'il n'y a pas d'autre point d'intersection entre A et B. Alors, $[AB]$ est sur le bord d'exactement deux des régions, pas nécessairement finies. On considère que $[AB]$ est un mur avec deux faces, qui sépare deux régions qui sont assimilées à deux pièces. Si pour l'une des deux régions concernées, la somme $\widehat{A}+\widehat{B}$ des angles intérieurs en A et B est strictement inférieure à π, on colorie en rouge le côté correspondant du mur $[AB]$. Dans le cas contraire, on colorie le côté du mur en bleu.

On note tout d'abord qu'aucune région infinie ne peut avoir un côté rouge (sans quoi les droites définissant les angles intérieurs correspondants se couperaient dans la région, ce qui est absurde) et que la somme totale des angles intérieurs en A et B des deux côtés du mur étant égale à 2π, l'un au moins des côtés est bleu. Mais l'autre est rouge, car il est impossible d'avoir $\widehat{A}+\widehat{B}=\pi$ dans une des régions, sans quoi deux des droites seraient parallèles. Ainsi, il y a en tout autant de côtés rouges que de segments dans la configuration. Comme chaque segment n'appartient qu'à une seule droite et que chaque droite contient exactement $n-2$ segments, c'est donc qu'il y a $n(n-2)$ côtés rouges.

Evidemment, un triangle correspond à trois côtés rouges.

Soit $P = A_1A_2...A_k$ une des régions polygonales bornées, où $k \geq 4$.

Supposons que P possède (intérieurement) deux côtés rouges non adjacents, disons $[A_1, A_2]$ et $[A_i, A_{i+1}]$ avec $i \in \{3, ..., k-1\}$. Il est bien connu que la somme des angles intérieurs de P est $(k-2)\pi$ (on pourra par exemple tracer toutes les diagonales issues de A_1 pour diviser P en $k-2$ triangles deux à deux sans point intérieur commun). De plus, puisque P est convexe, aucun de ses angles intérieurs ne dépasse π. Ainsi

$$\begin{aligned}(k-2)\pi = \sum_{j=1}^{k}\widehat{A_j} &= (\widehat{A_1}+\widehat{A_2}) + (\widehat{A_i}+\widehat{A_{i+1}}) + \sum_{j\notin\{1,2,i,i+1\}}\widehat{A_j}\\ &< \pi+\pi+(k-4)\pi\\ &= (k-2)\pi. \text{ Contradiction.}\end{aligned}$$

Par suite, deux côtés rouges de P sont nécessairement adjacents, ce qui assure que P ne contient jamais plus de deux côtés rouges.

Soit B le nombre de régions bornées de la configuration et T le nombre de triangles. D'après ce qui précéde, le nombre total de côtés rouges ne dépasse pas $2B+T$,

c.à.d. $n(n-2) \leq 2B+T$. (1)

Soit Δ l'une des n droites. Sans Δ, les $n-1$ autres droites partageaient le plan en R_{n-1} régions, bornées ou non. La droite Δ traverse exactement n de ces régions et les divisent chacune en deux. Le nombre total de régions est alors $R_n = R_{n-1}+n$. Puisque $R_1 = 2$, on en déduit facilement que $R_n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$.

D'autre part, on peut considérer un disque contenant tous les points d'intersection définis par les n droites. Ce disque recouvre donc toutes les régions bornées, et chaque droite rencontre son bord en deux points, tous distincts. Ainsi, en sortant du disque, les droites délimitent exactement $2n$ régions non bornées, qui correspondent aux régions non bornées de la configuration. Il y a donc exactement $2n$ régions non bornées dans la configuration et, finalement, on a $B = R_n - 2n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

En reportant dans (1), il vient directement $T \geq n-2$, comme désiré.

Exercice 5. Soit G un graphe fini, simple, connexe, non orienté et tel que tout sommet soit de degré 3.

Prouver que G contient un cycle dont on peut effacer toutes les arêtes de sorte que le graphe alors obtenu soit encore connexe.

Solution. Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont finis, simples et non orientés. On va prouver que le résultat demeure sous l'hypothèse légérement plus faible que tous les sommets sont de degrés au moins 3.

On considère un sommet arbitraire, et on le numérote 1. Puis, de proche en proche, pour tout entier $i \geq 1$, on attribue le numéro $i+1$ à tout sommet non encore numéroté et adjacent à un sommet de numéro i (cela revient à numéroter les sommets selon leur distance par rapport au premier sommet choisi). Comme G est fini et connexe, cette procèdure va se terminer et tous les sommets seront numérotés. De plus, pour tout i, le sous-graphe dont les numéros ne dépassent pas i est connexe (il existe toujours un chemin d'un sommet quelconque au sommet n°1).

Soit p le plus grand numéro utilisé. Soit n le nombre de sommets de G.

On considère maintenant le sous-graphe dont les sommets sont tous de numéros p. S'il contient un cycle, on s'arrête. Sinon, on étend le sous-graphe en ajoutant les sommets de numéros $p-1$ (et les arêtes correspondantes). Si ce nouveau sous-graphe contient un cycle, on s'arrête. Sinon, on étend aux sommets de numéros $p-2$ et ainsi de suite. Comme G contient au moins $\frac{3n}{2} \geq n$ arêtes, il contient lui-même un cycle (on rappelle que tout graphe de n sommets ayant au moins n arêtes contient un cycle), ce qui assure qu'il existe un plus grand entier k tel que le sous-graphe dont les sommets sont ceux de numéros supérieurs ou égaux à k contient un cycle. Parmi les cycles que contient ce sous-graphe, on en choisit un, disons C, de longueur minimale. Notons qu'alors C ne peut contenir de diagonale.

Nous allons prouver que l'on peut effacer les arêtes de C sans perdre la connexité.

Par l'absurde : supposons qu'en effaçant les arêtes de C, on brise la connexité. Il existe alors une composante connexe S qui ne contient pas le sommet n°1 et qui ne contient donc que des sommets de numéros supérieurs ou égaux à $k+1$ (s'il existait un sommet de S de numéro k, il serait adjacent à un sommet de numéro $k-1$ et l'arête correspondante n'a pas été effacée puisque C ne contient pas de sommet de numéro inférieur à k, et donc le sommet n°1 serait dans S). La maximalité de k assure alors que S ne contient pas de cycle. On note m le nombre de sommets appartenant à S.

Parmi les sommets de S, au moins un appartient à C, sans quoi effacer les arêtes de C n'aurait pas brisé la connexité avec le sommet n°1.

Soit $A \in S \cap C$. Exactement deux arêtes issues de A ont été effacées (A ne peut apparaître plus d'une fois lorsqu'on parcourt le cycle pour cause de minimalité de C), donc il en reste au moins une, disons AX_A. Alors, on a $X_A \notin C$ sans quoi l'arête AX_A serait une diagonale de C, en contradiction avec la minimalité de C. De plus, puisque X_A est encore adjacent à A après effacement, on a $X_A \in S$, ce qui assure que X_A est de numéro au moins $k+1$.

Soit B un autre sommet, s'il y en a, appartenant à S et C, et X_B choisi comme ci-dessus.

Si $X_A = X_B$, que l'on notera X, la minimalité de C et l'existence des arêtes AX et BX entrainent que C est un triangle, disons ABP, ou un quadrilatère, disons $APBQ$. Dans le premier cas, le cycle ABX contredit la maximalité de k. Dans le second, pour éviter la même contradiction avec les cycles $APBX$ ou $AQBX$, il faut que P et Q soient de numéros k, et ni l'un ni l'autre n'est dans S. Ainsi, dans le sous-graphe associé à S, tous les sommets sont de degrés au moins 3 sauf, peut-être, A et B qui sont de degrés au moins 1. En particulier, on a $m \geq 4$ et la somme des degrés est donc au moins égale à $3(m-2)+2 \geq 2m$. Mais alors S contient au moins m arêtes et doit donc contenir un cycle. Contradiction.

On en déduit qu'il n'existe pas deux sommets communs à S et C qui partagent un même voisin dans S. Soient $A_1, ..., A_s$ les sommets communs à S et C, et $X_1, ..., X_s$ choisis comme ci-dessus. Notons qu'alors $m \geq 2s$ et que, comme ci-dessus, dans le sous-graphe associé à S, chaque sommet est de degré au moins 3 sauf, peut-être, les A_i qui sont chacun de degrés au moins 1. La somme des degrés est alors au moins égale à $3(m-s)+s \geq 2m$, ce qui conduit à la même contradiction que précédemment.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui assure qu'effacer les arêtes de C ne brise effectivement pas la connexité du graphe.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$ un entier, et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des événements d'un même espace probabilisé.

Pour tout entier $m \geq 1$, on désigne par C_m l'événement "au moins m des événements $A_1, \cdots, A_n$ sont réalisés".

Prouver que

$$\prod_{m=1}^{n} P(C_m) \leq \prod_{m=1}^{n} P(A_m).$$

Solution. *Lemme.* Si A et B sont deux événements, on a

$$P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B).$$

Preuve du lemme. Soit A et B deux événements. On pose $x = P(A \cap B), y = P(\overline{A} \cap B)$, et $z = P(A \cap \overline{B})$.

L'inégalité à prouver s'écrit $(x+y+z)x \leq (x+z)(x+y)$,
ou encore $yz \geq 0$, ce qui est évident.

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $p \geq 0$, on définit des événements A_k^p par la procédure suivante :

i) Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $A_k^0 = A_k$.

ii) Soit $p \geq 0$ un entier pour lequel des événements $A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p$ sont définis.
S'il en existe, on choisit $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ avec $i < j$, tels que $A_i^p \not\subset A_j^p$ et $A_j^p \not\subset A_i^p$, et on pose

$$A_i^{p+1} = A_i^p \cup A_j^p, \qquad A_j^{p+1} = A_i^p \cap A_j^p,$$

et $A_k^{p+1} = A_k^p$ pour tout $k \notin \{i, j\}$.

On commence par prouver que la procédure se termine après un nombre fini d'étapes : Si on choisit la paire $\{i, j\}$, avec $i < j$, lors d'une étape ii), disons la $(p+1)$-ième : alors A_i^p et A_j^p étaient incomparables (au sens de l'inclusion) alors que $A_j^{p+1} \subset A_i^{p+1}$.

De plus, pour tout $k \notin \{i, j\}$ alors :

- Si A_k^p contient (resp. est contenu dans) A_i^p et A_j^p alors A_k^{p+1} contient (resp. est contenu dans) A_i^{p+1} et A_j^{p+1}.

- Si A_k^p contient un seul des événements A_i^p et A_j^p, alors A_k^{p+1} contient A_j^{p+1}.

- Si A_k^p est contenu dans un seul des événements A_i^p et A_j^p, alors A_k^{p+1} est contenu dans A_i^{p+1}.

Ainsi, A_k^{p+1} est comparable avec A_i^{p+1} et A_j^{p+1} au moins autant de fois que A_k^p est comparable avec A_i^p et A_j^p.

Tout cela prouve qu'une étape fait (strictement) augmenter le nombre de couples d'événements comparables. Comme il n'y a qu'un nombre fini de couples d'événements, cela assure que le nombre d'étapes est fini, quels que soient les choix d'indices effectués au fur et à mesure de la procédure.

Pour tous entiers $m \geq 1$ et $p \geq 0$, on note C_m^p l'événement "au moins m des événements $A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p$ sont réalisés".

On montre maintenant que, pour tous entiers $m \geq 1$ et $p \geq 0$, on a $C_m^p = C_m$:

Soit $m \geq 1$ un entier fixé.

Soit $p \geq 0$. On suppose que l'étape ii) est effectuée une $(p+1)$-ième fois. Il suffit de prouver que $C_m^p = C_m^{p+1}$ car alors, puisque $C_m = C_m^0$, une récurrence immédiate permettra de conclure.

Supposons que cette $(p+1)$-ième étape concerne les indices i et j, avec $i < j$.

- Puisque $A_k^{p+1} = A_k^p$ pour $k \notin \{i, j\}$, il se réalise autant de A_k^p que de A_k^{p+1}.
- Si A_i^p et A_j^p se réalisent, alors $A_i^{p+1} = A_i^p \cup A_j^p$ et $A_j^{p+1} = A_i^p \cap A_j^p$ se réalisent.

Réciproquement, si A_i^{p+1} et A_j^{p+1} se réalisent, ce dernier assure que A_i^p et A_j^p se réalisent.

- De même, aucun des événements A_i^p et A_j^p ne se réalise si et seulement si aucun des événements A_i^{p+1} et A_j^{p+1} ne se réalise.
- Si un et un seul des événements A_i^p et A_j^p se réalise, alors A_i^{p+1} se réalise mais pas A_j^{p+1}. Réciproquement, si un et un seul des événements A_i^{p+1} et A_j^{p+1} se réalise alors, comme $A_j^{p+1} \subset A_i^{p+1}$, c'est que A_i^{p+1} se réalise mais pas A_j^{p+1}. Ainsi, l'un des événements A_i^p et A_j^p se réalise mais pas les deux.

Tout cela assure qu'il y a autant d'événements qui se réalisent parmi $A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p$, que parmi $A_1^{p+1}, A_2^{p+1}, \cdots, A_n^{p+1}$. Et donc $C_m^p = C_m^{p+1}$.

On prouve alors le résultat demandé das l'énoncé : Soit $p \geq 0$ un entier. On suppose que la p-ième étape de la procédure est effectuée. On pose $\Pi_p = \displaystyle\prod_{m=1}^{n} P(A_m^p)$.

On vérifie facilement que, si la $(p+1)$-ième étape est effectuée, sur les indices $i < j$, alors

$$\begin{aligned}\Pi_{p+1} - \Pi_p &= (P(A_i^{p+1})P(A_j^{p+1}) - P(A_i^p)P(A_j^p)) \prod_{m \neq i,j} P(A_m^p) \\ &= (P(A_i^p \cup A_j^p)P(A_i^p \cap A_j^p) - P(A_i^p)P(A_j^p)) \prod_{m \neq i,j} P(A_m^p),\end{aligned}$$

et donc $\Pi_{p+1} - \Pi_p \leq 0$ d'après 1).

Soit $p \geq 0$ le nombre d'étapes ii) de la procédure. Une récurrence immédiate conduit alors à $\Pi_p \leq \Pi_0$

ou encore $\Pi_p \leq \displaystyle\prod_{m=1}^{n} P(A_m)$. (1)

D'autre part, à l'issue de la procédure, les A_i^p sont deux à deux comparables et donc ordonnés pour l'inclusion : on a $A_{\sigma(n)}^p \subset \cdots \subset A_{\sigma(2)}^p \subset A_{\sigma(1)}^p$, pour une certaine permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$.

Pour tout entier $m \geq 1$, on a donc $C_m^p = A_{\sigma(m)}^p$.
Ainsi

$$\prod_{m=1}^{n} P(C_m^p) = \prod_{m=1}^{n} P(A_{\sigma(m)}^p) = \prod_{m=1}^{n} P(A_m^p) = \Pi_p. \text{ (2)}$$

Or, d'après b), on a $\prod_{m=1}^{n} P(C_m^p) = \prod_{m=1}^{n} P(C_m)$. (3)

De (1), (2) et (3), on a clairement $\prod_{m=1}^{n} P(C_m) \leq \prod_{m=1}^{n} P(A_m)$.

2.5 Combinatoire groupe A (Vincent)

Exercice 1 (Mise en bouche)**.**
Soit $n \geq 1$ un entier. Un groupe de $2n$ personnes se réunit. Chacune de ces personnes possède au moins n amies dans ce groupe (en particulier, si A est amie avec B alors B est amie avec A, et on n'est pas ami avec soi-même). Prouver que l'on peut disposer ces $2n$ personnes autour d'une table ronde de sorte que chacune soit entre deux de ses amies.

2.5.1 Graphes finis et infinis

Dans ce cours, nous verrons principalement deux grands résultats sur les graphes : le théorème des mariages de Hall et le théorème de Ramsey. Le premier résultat nous informe que, dans un graphe biparti contenant *beaucoup* d'arêtes, il est possible d'apparier les sommets du graphe. Le second, quant à lui, concerne les grands graphes complets bicolores, dont on peut extraire de *pas si grands* graphes complets monochromatiques.

Dans chaque cas, on étudiera l'extension de ces résultats à des graphes *infinis* : quels théorèmes s'appliquent naturellement aux graphes infinis ? Et sous quelle forme ? En effet, comme on peut s'y attendre, deux énoncés équivalents sur les graphes finis ne le sont plus nécessairement sur les graphes infinis.

Théorème des mariages de Hall

Théorème 2 (Théorème des mariages de Hall)**.**
Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti fini, dont les deux composantes indépendantes sont A et B, et dont les arêtes forment l'ensemble E. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe injection $f : A \to B$ telle que chaque paire $(a, f(a))$ soit une arête appartenant effectivement à E — on appelle une telle fonction un *couplage saturant* de A ;

2. pour toute partie $X \subseteq A$, $|E(X)| \geq |X|$.

Démonstration.
Avant l'effort, le réconfort : montrons d'abord que la proposition 1 implique la proposition 2. Pour ce faire, supposont que la proposition 1 est bien vérifiée. On considère alors une partie $X \subseteq A$, et $f : A \to B$ un couplage saturant. Alors $f(X) \subseteq E(X)$, de sorte que $|E(X)| \geq |f(X)| = |X|$, donc que la proposition 2 est vérifiée aussi.

Passons maintenant à la partie difficile : comme souvent en théorie des graphes, on va procéder par récurrence (même s'il existe d'autres manières de procéder, la littérature étant abondante sur ce sujet) et montrer que la proposition 2 implique la proposition 1. Tout d'abord, notons que le résultat est évident si $|A| = 1$. On suppose donc que $|A| \geq 2$, et on distingue deux cas :

- Si tout sous-ensemble *propre* X de A (c'est-à-dire tel que $\emptyset \subsetneq X \subsetneq A$) est tel que $|E(X)| \geq |X| + 1$, alors on apparie au hasard un sommet $a \in A$ et un sommet $b \in B$ tel que $(a, b) \in E$ et on décide que $f(a) = b$. Le graphe $\mathcal{G}'$ induit par les sommets $A \cup B \backslash \{a, b\}$ est un sous-graphe strict de $\mathcal{G}$, et satisfait la proposition 2, donc l'hypothèse de récurrence indique qu'on peut apparier ses sommets sans encombre. Ce faisant, on a apparié l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$.

- Si A admet un sous-ensemble *propre* X tel que $|E(X)| = |X|$, considérons les graphes $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, respectivement induits par les sommets $X \cup E(X)$ et $(A \cup B) \setminus (X \cup E(X))$: ce sont deux sous-graphes stricts de $\mathcal{G}$, et il est clair que $\mathcal{G}'$ satisfait la proposition 2. En outre, si X' est une partie de $A \setminus X$, soit $Y = E(X') \setminus E(X)$. Alors $E(X \cup X') = E(X) \cup Y$, donc $|Y| = |E(X \cup X')| - |E(X)| \geq |X \cup X'| - |X| = |X'|$: cela signifie que $\mathcal{G}''$ satisfait également la proposition 2. On peut donc apparier les éléments de $X \cup E(X)$, ainsi que les ceux de $(A \cup B) \setminus (X \cup E(X))$, montrant ainsi que la proposition 1 est vérifiée.

Les propositions 1 et 2 s'impliquant l'une l'autre, elles sont bien équivalentes. $\square$

On peut également reformuler le théorème des mariages de Hall de manière plus imagée comme suit : supposons que l'on veut marier n filles à n garçons, de manière à ce que chaque individu aime bien son époux(se). Cela nous est possible si et seulement si, dès qu'on prend un groupe de k filles, l'ensemble des garçons qu'aime bien au moins une des filles de groupe est de cardinal k ou plus.

Exercice 3.
Sur une planète extrasolaire vit une espèce alien dont la population est composée de 3 sexes : les hommes, les femmes et les matheux. Une famille épanouie consiste en l'union de 3 personnes, une de chaque sexe, qui s'aiment toutes mutuellement. En outre, l'amitié est réciproque : si x aime y, alors y aime x.

Cette espèce veut envoyer n individus de chaque sexe coloniser l'espace, et souhaiterait former autant de familles épanouies que possible avec ces $3n$ personnes. La seule information dont on dispose est que chaque individu aime au moins k personnes de chacun des deux autres sexes :

1. Montrer que, si $n = 2k$, il se peut que l'on ne puisse former aucune famille épanouie.

2. Montrer que, si $4k \geq 3n$, il est possible de former n familles épanouies disjointes.

Une fois le théorème des mariages de Hall prouvé pour tous les graphes bipartis finis, une question naturelle se pose : qu'arrive-t-il si on considère un graphe biparti infini dénombrable

? La difficulté est que l'on peut écrire le théorème de plusieurs manières différentes, qui seront équivalentes si l'on regarde un graphe fini, mais ne le seront pas si l'on regarde un graphe infini. Si on s'y prend de manière naïve, en effet, on fait chou blanc :

Exercice 4 (Théorème *infini* des mariages de Hall — extension naïve)**.**
Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti infini dénombrable, dont les deux composantes A et B sont infinies. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Montrer que les deux propositions suivantes ne sont *pas* équivalentes :

1. il existe un couplage saturant $f : A \to B$;

2. pour toute partie finie $X \subseteq A$, $E(X)$ est infini, ou bien de cardinal $|E(X)| \geq |X|$.

Cela dit, il est toujours possible d'étendre le théorème de manière moins naïve, et alors nos efforts seront couronnés de succès. En particulier, si on oblige le graphe $\mathcal{G}$ à n'avoir que des sommets de degré fini, alors tout se passe bien :

Exercice 5 (Théorème *infini* des mariages de Hall — extension moins naïve)**.**
Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti infini dénombrable, dont les deux composantes A et B sont infinies, et dont tout sommet est de degré fini. À tout sous-ensemble X de A, on associe le sous-ensemble $E(X) = \{b \in B : \exists a \in X, (a, b) \in E\}$ des sommets de B reliés à au moins un sommet de X. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe un couplage saturant $f : A \to B$;

2. pour toute partie finie $X \subseteq A$, $E(X)$ est de cardinal $|E(X)| \geq |X|$.

Exercice 6.
Soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe biparti dont les deux composantes indépendantes, A et B, sont infinies. On suppose que tout sommet est de degré fini non nul et que, pour toute arête $(a, b) \in E$ avec $a \in A$ et $b \in B$, $\deg(a) = \deg(b)$. Montrer qu'il existe un couplage saturant bijectif $f : A \to B$.

Théorèmes de coloriage

Théorème 7 (Théorème de Ramsey bicolore)**.**
Soit g, r et b trois entiers naturels non nuls tels que $g \geq \binom{r+b-2}{r-1}$. Alors tout graphe complet K_g dont les arêtes sont coloriées en rouge et bleu contient soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont coloriées en rouge, soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont coloriées en bleu.

Démonstration.
On procède par récurrence sur r et b. Tout d'abord, si $r = 1$ ou $b = 1$, le résultat est évident (vu que le graphe K_1 ne comporte aucune arête).

Ensuite, si $r \geq 2$ et $b \geq 2$, considérons un sommet v du graphe K_g. v est appartient à $g - 1 \geq \binom{r+b-2}{r-1} - 1 = \binom{r+b-3}{r-2} + \binom{r+b-3}{r-1} - 1$ arêtes, donc soit v appartient à au moins $\binom{r+b-3}{r-2}$ arêtes rouges, soit v appartient à au moins $\binom{r+b-3}{r-1}$ arêtes bleues.

- Si v est relié à $R \geq \binom{r+b-3}{r-2}$ sommets par des arêtes rouges, on considère le sous-graphe K_R formé par ces R sommets. Par hypothèse de récurrence, K_R contient soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues (et a fortiori K_g contient K_b), soit un sous-graphe K_{r-1} dont les arêtes sont rouges ; dans ce second cas, en adjoignant le sommet v au graphe K_{r-1}, on obtient bien un sous-graphe K_r du graphe K_n, et dont les arêtes sont rouges.

- Si v est relié à $B \geq \binom{r+b-3}{r-1}$ sommets par des arêtes bleues, alors, pour exactement les mêmes raisons, K_g contient soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont rouges, soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues.

Dans tous les cas, on en déduit que K_g contient effectivement soit un sous-graphe K_b dont les arêtes sont bleues, soit un sous-graphe K_r dont les arêtes sont rouges. Ceci clôt notre récurrence, et donc la preuve du théorème. $\square$

Intuitivement, le théorème de Ramsey dit que, pour obtenir soit un graphe complet K_r avec des arêtes rouges, soit un graphe complet K_b avec des arêtes bleues, il suffit de colorier en rouge et bleu les arêtes d'un très gros graphe complet. En particulier, on peut s'intéresser à l'entier minimal $R_2(r, b)$ tel que tout graphe complet bicolore K_g avec $g \geq R_2(r, b)$ contient un de nos graphes K_r ou K_b. Le nombre $R_2(r, b)$ est appelé *nombre de Ramsey bicolore*.

En outre, on peut étendre le théorème de Ramsey au cas où on colorie les arêtes du graphe K_g avec n couleurs au lieu de 2 : il existe un entier minimal $R_n(s_1, \ldots, s_n)$, appelé *nombre de Ramsey à n couleurs*, tel que tout graphe complet n-colore K_g avec $g \geq R_n(s_1, \ldots, s_n)$ contient un graphes K_{s_i} monochrome :

Exercice 8 (Théorème de Ramsey à n couleurs)**.**
On considère $n \geq 2$ couleurs $C_1, \ldots, C_n$ et n entiers naturels $s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 1$. Soit

$$g \geq \frac{(s_1 + \cdots + s_n - n)!}{(s_1 - 1)! \ldots (s_n - 1)!}$$

un entier naturel, et K_g un graphe complet à g sommets dont on a colorié les arêtes avec les n couleurs ci-dessus. Montrer qu'il existe un entier i tel que K_g contient un sous-graphe complet K_{s_i} à s_i sommets dont toutes les arêtes sont de couleur C_i.

Cette généralisation à n couleurs permet de résoudre de nombreux problèmes, par exemple en théorie des nombres :

Exercice 9 (Théorème de Schur)**.**
Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une partition de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un ensemble P_i et deux éléments $x, y \in P_i$ tels que $x + y \in P_i$.

On peut alors s'interroger sur la généralisation éventuelle de ce théorème à des graphes infinis : si on colorie en bleu et rouge les arêtes d'un graphe infini, obtient-on une composante bleue ou rouge infinie? La réponse est oui !

Exercice 10 (Théorème *infini* de Ramsey)**.**
Soit K_∞ un graphe complet infini dont on colorie les arêtes avec k couleurs. Alors K_∞ contient un sous-graphe complet infini dont les arêtes sont toutes de la même couleur.

De manière générale, les résultats sur le coloriage des graphes se montrent bien en utilisant des notions de *compacité* : si on dispose d'un coloriage *local* des sommets ou des arêtes d'un graphe, on peut l'étendre peu à peu en un coloriage de plus en plus grand, jusqu'à colorier toute partie finie du graphe, et finalement le graphe lui-même.

Exercice 11.
On admet que tout graphe planaire fini admet un coloriage de ses sommets en bleu, rouge, vert tel que nul cycle de longueur impaire ne soit monochrome. Montrer que ce résultat s'étend aux graphes planaires infinis dénombrables.

2.5.2 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.
Considérons une disposition arbitraire des invités :

$$A_1 A_2 \dots A_{2n} A_1.$$

Si deux voisins ne sont pas amis, on dira que c'est une *tension*. S'il n'y a aucune tension, on a trouvé une disposition gagnante. Si, au contraire, il existe une tension, alors par symétrie circulaire, on peut toujours supposer que A_1 et A_2 ne sont pas amis.

Les ensembles

$$\{i \in \{3, \dots, 2n-1\} \mid A_1 \text{ et } A_i \text{ sont amis}\} \text{ et } \{i \in \{3, \dots, 2n-1\} \mid A_2 \text{ et } A_{i+1} \text{ sont amis}\}$$

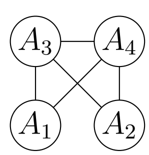
sont tous deux de cardinal au moins $n-1$. Puisque $\{3, \dots, 2n-1\}$ est de cardinal $2n-3$, ces deux ensembles s'intersectent donc mutuellement. Cela signifie qu'il existe deux voisins A_i et A_{i+1} parmi $A_3, \dots, A_{2n}$ tels que A_1 est ami de A_i, et A_2 est ami de A_{i+1}.

On renverse alors l'ordre des personnes situées (au sens large) entre A_2 et A_i, comme suit :

$$A_1(A_2 \dots A_i)A_{i+1} \dots A_{2n}A_1 \longrightarrow A_1(A_i \dots A_2)A_{i+1} \dots A_{2n}A_1.$$

Alors on a supprimé la tension entre A_1 et A_2, et on n'a créé aucune nouvelle tension. En répétant cette procédure tant qu'il reste au moins une tension, on finira par obtenir une disposition gagnante.

Solution alternative (et pédestre) de l'exercice 1.
Une tentation fort grande est de procéder par récurrence, et tout d'abord de supposer que l'on a déjà placé $2(n-1)$ invités en cercle : ne cédons pas à cette tentation ! En effet, pour $n = 2$, si on se place dans le graphe G dessiné ci-dessous, on constate bien qu'il était impossible de placer les invités A_1 et A_2 l'un en face de l'autre avant l'arrivée de A_3 et A_4.



Graphe G

Nous allons donc procéder par récurrence, mais en prenant garde à ne pas se tromper d'hypothèse de récurrence : montrons que, si G est un graphe à k sommets et dont tout sommet est de degré au moins $\frac{k}{2}$, alors G admet un cycle eulérien. Tout d'abord, le résultat est évident pour $k \leq 3$, puisque alors G est nécessairement un graphe complet. On suppose donc que $k \geq 4$.

Soit C un cycle formé d'arêtes de G, et dont la longueur ℓ est maximale. Soit D l'ensemble des sommets n'appartenant pas à C, et soit $c_1, \ldots, c_\ell$ les sommets de C. Si $\ell = k$, on a gagné. Supposons donc que $\ell < k$, et considérons un sommet s appartenant à D. Si s a strictement plus de $\frac{\ell}{2}$ dans C, alors il a deux voisins contigus, par exemple c_i et c_{i+1} (ou alors c_ℓ et c_1). En remplaçant C par le cycle $c_1, \ldots, c_i, s, c_{i+1}, \ldots, c_\ell$, on obtiendrait donc un nouveau cycle formé d'arêtes de G, et de longueur $\ell + 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, on sait que s a au plus $\frac{\ell}{2}$ voisins dans C.

Soit G' le sous-graphe de G induit par D (c'est-à-dire le sous-graphe dont les sommets sont les éléments de D et dont les arêtes sont les arêtes de G qui relient deux éléments de D). Puisque s est de degré au moins $\frac{k}{2}$ dans G, on sait que s est de degré au moins $\frac{k-\ell}{2}$ dans D. Ceci étant vrai pour tout sommet $s \in D$, et puisque D compte précisément $k - \ell$ sommets (ce qui montre par ailleurs que $k - \ell \geq 2$), l'hypothèse de récurrence montre que D admet un cycle eulérien dont on numérote les sommets par $d_1, \ldots, d_{k-\ell}$.

Notons d'ores et déjà que, par maximalité de ℓ, on sait $\ell \geq \frac{k}{2}$. On appelle maintenant V_∞ l'ensemble des entiers i tels que c_i a au moins deux voisins dans D; V_u l'ensemble des entiers i tels que d_u est l'unique voisin de c_i dans D (pour chaque $u \in \{1, \ldots, k - \ell\}$); et V_0 l'ensemble des entiers i tels que c_i n'a aucun voisin dans D. En outre, on note $i \to j$ si $i, j \notin V_0$ et si $\{i + 1, \ldots, j - 1\} \subseteq V_0$ (si $i < j$) ou $\{i + 1, \ldots, \ell, 1, \ldots, j - 1\} \subseteq V_0$ (si $j < i$). Enfin, on note $\delta(i)$ le plus petit entier positif tel que $i + \delta(i) + 1 \equiv j \pmod{\ell}$.

Observons maintenant une paire d'entiers i et j tels que $i \to j$.

- Si $i \in V_\infty$, ou bien si $i \in V_u$ et $j \notin V_u$ pour un entier $u \in \{1, \ldots, k-\ell\}$, alors $\delta(i) \geq \frac{k-\ell}{2} + 1$. En effet, dans ce cas, soit d_u et d_v deux éléments de D tels que c_i soit voisin de d_u, c_j soit voisin de d_v et $u \neq v$. Dans D, il existe deux chemins reliant d_u à d_v, dont la somme des longueurs vaut $k-\ell$. L'un de ces chemins est donc de longueur au moins $\frac{k-\ell}{2}$: on le note $d_u, e_1, \ldots, e_z, d_v$, avec $z + 1 \geq \frac{k-\ell}{2}$. Alors, en supprimant le chemin $c_i, c_{i+1}, \ldots, c_j$ de C et en le remplaçant par le chemin $c_i, d_u, e_1, \ldots, e_z, d_v, c_j$, on obtient un cycle de longueur $\ell - \delta(i) + z + 3 \geq \ell - \delta(i) + \frac{k-\ell+4}{2}$. Par maximalité de ℓ, on en déduit que $\delta(i) \geq \frac{k-\ell+4}{2}$.

- Si $i, j \in V_u$ pour un entier $u \in \{1, \ldots, k - \ell\}$, alors on a déjà dit plus haut que $j \not\equiv i + 1 \pmod{\ell}$, c'est-à-dire que $\delta(i) \geq 1$.

Or, on sait que, si $V_u \neq \emptyset$, alors il existe des entiers i et j tels que $i \to j$, $i \in V_u$ et $j \notin V_u$. Cela montre que, dans tous les cas, $\sum_{i \in V_u} \delta(i) \geq \frac{k-\ell+2}{2} \mathbf{1}_{V_u \neq \emptyset} + |V_u|$. De même, on sait que $\sum_{i \in V_\infty} \delta(i) \geq \frac{k-\ell+4}{2} |V_\infty|$. Enfin, les voisins de d_u dans C sont répartis entre V_u et V_∞, de sorte que $|V_u| + |V_\infty| \geq \frac{2\ell-k+2}{2}$ pour tout u.

On procère donc à une (pénible) disjonction de cas, en fonction de l'ensemble $U = \{u \mid V_u \neq \emptyset\}$:

- Si $U \subsetneq \{1, \ldots, k - \ell\}$, alors $|V_\infty| \geq \frac{2\ell-k+2}{2}$ et $\sum_{i \in V_u} \delta(i) \geq \frac{k-\ell+4}{2} \mathbf{1}_{u \in U}$, donc

$$\begin{aligned}
\ell &= |V_0| + \sum_{u=1}^{k-\ell} |V_u| + |V_\infty| = \sum_{u=1}^{k-\ell} \left(|V_u| + \sum_{i \in V_u} \delta(i) \right) + |V_\infty| + \sum_{i \in V_\infty} \delta(i) \\
&\geq \frac{k - \ell + 6}{2} (|U| + |V_\infty|) \geq \frac{(k - \ell + 6)(2\ell + 2 - k)}{4} = \ell - \frac{f(\ell)}{4},
\end{aligned}$$

où $f : \ell \mapsto 4\ell - (k - \ell + 6)(2\ell + 2 - k) = 2\ell^2 - 3(k + 2)\ell + (k + 6)(k - 2)$. Puisque f est convexe, on sait que, si $\frac{k}{2} + 1 \leq \ell \leq k$, on a

$$f(\ell) \leq \max\left\{f\left(\frac{k}{2}+1\right), f(k)\right\} = \max\{-16, -12-2k\} < 0,$$

de sorte que l'inégalité $\ell \geq \ell - \frac{f(\ell)}{4}$ ne peut être vérifiée.

On en déduit que $\ell < \frac{k}{2} + 1$. Chaque sommet c_i a donc au plus $\ell - 1 < \frac{k}{2}$ voisins dans C, donc au moins un voisin dans D, de sorte que $V_0 = \emptyset$. Ceci est impossible puisque δ ne prend que des valeurs strictement positives : le cas $U \subsetneq \{1, \ldots, k - \ell\}$ n'arrive donc jamais.

- Si $U = \{1, \ldots, k - \ell\}$, alors $\sum_{i \in V_u} \delta(i) \geq \frac{k-\ell+2}{2} + |V_u|$ pour tout entier u, et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\ell &= |V_0| + \sum_{u=1}^{k-\ell} |V_u| + |V_\infty| = \sum_{u=1}^{k-\ell} \sum_{i \in V_u} \delta(i) + \sum_{i \in V_\infty} \delta(i) + \sum_{u=1}^{k-\ell} |V_u| + |V_\infty| \\
&\geq \sum_{u=1}^{k-\ell} \left(2|V_u| + \frac{k-\ell}{2}\right) + \left(\frac{k-\ell}{2} + 1\right)|V_\infty| = \frac{3}{2}\sum_{u=1}^{k-\ell} |V_u| + \sum_{u=1}^{k-\ell} \frac{|V_u| + k - \ell + |V_\infty|}{2} + |V_\infty| \\
&\geq |V_1| + \sum_{u=1}^{k-\ell} \frac{k+2}{4} + |V_\infty| \geq \frac{(k-\ell)(k+2)}{4} + \frac{2\ell - k + 2}{2} \geq \frac{k+2}{2} + \frac{2\ell - k + 2}{2} = \ell + 2, \qquad (\text{car } k
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le cas $U = \{1, \ldots, k - \ell\}$ n'arrive jamais non plus.

On avait donc tort de supposer que $\ell < k$, ce qui conclut la récurrence. En particulier, pour $n = 2k$, l'exercice s'ensuit.

Solution de l'exercice 3.
On traite les questions l'une après l'autre.

1. On identifie l'ensemble des $3n = 6k$ individus au produit cartésien $\{F, H, M\} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ — les triplets (F, i, j) représentent les femmes, les paires (H, i, j) les hommes, les paires (M, i, j) les matheux. Supposons alors que chaque femme (F, i, x) aime uniquement les hommes (H, i, y) et les matheux (M, i, y) et que chaque homme (H, i, x) aime uniquement les femmes (F, i, y) et les matheux $(M, i{+}1, y)$ — où (i, x, y) décrit l'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2$. On a ici une configuration où chacun aime k personnes des deux autres sexes, mais où nulle famille épanouie ne peut exister.

2. On va appliquer deux fois successivement le théorème des mariages de Hall. On introduit d'abord le graphe $\mathcal{G} = (F \cup H, E)$ dont les arêtes sont les paires (f, h) telles que f aime h. Soit $X \subseteq F$ un ensemble non vide de femmes, et $E(X)$ l'ensemble des hommes aimés par au moins une femme $f \in X$. Si $|X| \leq k$, alors nécessairement $|E(X)| \geq k \geq |X|$; si $|X| > k$, alors soit h un homme quelconque. h aime au moins k femmes, et $k + |X| > 2k \geq n$, de sorte que h aime au moins une femme appartenant à X, c'est-à-dire que $h \in E(X)$: dans ce deuxième cas, $|E(X)| = |H| = n \geq |X|$. $\mathcal{G}$ vérifie donc la propriété 2 du théorème des mariages de Hall : on peut scinder les hommes et les femmes en n couples $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dont les deux membres s'aiment.

Maintenant, soit C l'ensemble $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ des couples ainsi formés, et $\mathcal{G}' = (M \cup C, E')$ le graphe dont les arêtes sont les paires (m, c) telles que m aime les deux membres du couple c : on dit que m et que le couple c *s'aiment*. Soit m un matheux quelconque ; il existe au plus $n - k$ couples dont il n'aime pas la femme, et $n - k$ couples dont il n'aime pas l'homme, donc m aime au moins $2k - n$ couples. Réciproquement, soit $c = (f, h)$ un couple quelconque ; il existe au plus $n - k$ matheux que f n'aime pas, et $n - k$ mahteux que m n'aime pas, donc c aime au moins $2k - n$ matheux.

Soit $Y \subseteq M$ un ensemble non vide de matheux, et $E'(Y)$ l'ensemble des couples aimés par au moins un matheux $m \in Y$. Si $|Y| \leq 2k-n$, alors nécessairement $|E'(Y)| \geq 2k-n \geq |Y|$; si $|Y| > 2k - n$, alors soit c un couple quelconque. c aime au moins $2n - k$ matheux, et $2n - k + |Y| > 4n - 2k \geq n$, de sorte que c aime au moins un matheux appartenant à Y, c'est-à-dire que $c \in E'(Y)$: dans ce deuxième cas, $|E(Y)| = |M| = n \geq |Y|$. $\mathcal{G}'$ vérifie donc la propriété 2 du théorème des mariages de Hall : on peut scinder les matheux et les couples en n paires qui s'aiment mutuellement. Cela revient à scinder $F \cup H \cup M$ en n familles épanouies, ce qui était l'objectif de notre démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 4.*</u>
Il nous suffit de trouver un exemple de graphe satisfaisant la propriété 2 mais pas la propriété 1 : le voici. On considère le graphe $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ où $A = \{0\} \times \mathbb{N}$, $B = \{1\} \times \mathbb{N}$, et où $((0, i), (1, j)) \in E$ si et seulement si $i = 0$ ou $i = j + 1$. Tout d'abord, si $X \subseteq A$ est une partie telle que $(0, 0) \in X$, alors $E(X) = B$ est bien infini ; si $(0, 0) \notin X$, alors $E(X) = \{(1, j) : (0, j + 1) \in X\}$ est de même cardinal que X. Cela montre que $\mathcal{G}$ satisfait la propriété 2.

Cependant, si $f : A \to B$ est un couplage saturant, alors f envoie la paire $(0, 0)$ sur une paire $(1, i)$, avec $i \in \mathbb{N}$. Mais alors f envoie également la paire $(0, i + 1)$ sur la paire $(1, i)$, et ne peut être injective, ce qui contredit son caractère de couplage saturant. Ainsi, la propriété 1 n'est pas satisfaite.

<u>*Solution de l'exercice 5.*</u>
Tout d'abord, la propriété 1 implique, comme dans le cas du théorème des mariages *fini*, la propriété 2. On se penche donc sur le sens réciproque : soit $\mathcal{G} = (A \cup B, E)$ un graphe vérifiant la propriété 2.

On numérote alors les sommets de $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, puis les ensembles de sommets $A_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ainsi que $E(A_n) = \{b \in B : \exists a \in A_n, (a, b) \in E\}$. On considère alors, pour chaque entier naturel n, le sous graphe $\mathcal{G}_n$ induit par les sommets $A_n \cup E(A_n)$. $\mathcal{G}_n$ est fini et satisfait la propriété 2, donc il existe un couplage saturant $f_n : A_n \to E(A_n)$.

On procède maintenant en utilisant des arguments de compacité : en utilisant le principe des tiroirs, il existe un élément b_0 voisin de a_0 tel que l'ensemble $F_0 = \{n \in \mathbb{N} : f_n(a_0) = b_0\}$ est infini. Puis il existe un élément b_1 voisin de a_1 tel que l'ensemble $F_1 = \{n \in F_0 : n \geq 1, f_n(a_1) = b_1\}$ est infini (et alors $b_1 \neq b_0$). On continue par récurrence, en choissant un élément b_{k+1} voisin de a_{k+1} tel que l'ensemble $F_{k+1} = \{n \in F_k : n \geq k + 1, f_n(a_{k+1}) = b_{k+1}\}$ est infini. Ce faisant, il s'avère que la fonction $f_\infty : A \to B$ telle que $f_\infty(a_k) = b_k$ pour tout entier naturel k est bien un couplage saturant.

<u>*Solution de l'exercice 6.*</u>
On montre tout d'abord que chacune des composantes connexes du graphe $\mathcal{G}$ satisfait le critère 2 de l'extension moins naïve du théorème des mariages de Hall. En effet, si $\mathcal{C}$ est une composante connexe de $\mathcal{G}$, tous les sommets de $\mathcal{C}$ sont de même degré, par exemple d. Si

$X \subseteq A \cap \mathcal{C}$ est un ensemble fini, alors

$$|E(X)| = \frac{1}{d} \sum_{b \in E(X)} \deg(b) \geq \frac{1}{d} \sum_{a \in X, b \in B : (a,b) \in E} 1 \geq \frac{1}{d} \sum_{a \in X} \deg(a) = |X|.$$

En particulier, on en déduit l'existence d'un couplage saturant $f : A \to B$; en outre, A et B jouant des rôles symétriques, il existe également un couplage saturant $g : B \to A$.

On définit maintenant la fonction $h : A \cup B \mapsto A \cup B$ par $h : x \mapsto f(x)$ si $x \in A$ et $h : x \mapsto g(x)$ si $x \in B$. Puis on définit les ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ par $A_n = A \cap h^n(A \cup B)$ et $B_n = B \cap h^n(A \cup B)$, puis les ensembles $(\overline{A}_n)_{n \geq 0}$ et $(\overline{B}_n)_{n \geq 0}$ par $\overline{A}_n = A_{n+1} \backslash A_n$ et $\overline{B}_n = B_{n+1} \backslash B_n$, ainsi que $\overline{A}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ et $\overline{B}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} B_n$.

Une récurrence immédiate montre que $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq \overline{A}_\infty$ et $B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq \overline{B}_\infty$. En outre, g^{-1} induit une bijection de chaque ensemble $\overline{A}_{2n+1}$ vers $\overline{B}_{2n}$, et f induit une bijection de chaque ensemble $\overline{A}_{2n}$ vers $\overline{B}_{2n+1}$, ainsi que de $\overline{A}_\infty$ vers $\overline{B}_\infty$.

Observons alors la fonction $h : A \mapsto B$ telle que $h : x \mapsto g^{-1}(x)$ si $x \in \bigcup_{n \geq 0} \overline{A}_{2n+1}$ et $h : x \mapsto f(x)$ sinon. Par construction, h est bijective, et on a bien $(x, h(x)) \in E$ pour tout $x \in A$, de sorte que h est la bijection saturante recherchée.

Solution de l'exercice 8.

L'idée est de procéder de la même manière que dans la preuve du théorème de Ramsey bicolore. On obtiendra alors une borne supérieure sur le nombre de Ramsey à n couleurs, borne que l'on pourra elle-même majorer pour aboutir à la relation demandée.

Tout d'abord, notons que le théorème de Ramsey à n couleurs n'a que peu d'intérêt quand $n = 1$ (on a $R_1(s_1) = s_1$) ou quand $s_n = 1$ (tout graphe à au moins 1 sommet convient), et que les entiers $s_1, \ldots, s_n$ jouent des rôles symétriques. On va alors montrer par récurrence que la fonction R_n est bien définie, et en obtenir un majorant.

Supposons donc que l'on dispose d'un entier k tel que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est bien défini dès lors que $\sum_{i=1}^n s_i \leq k$: $k = n$ est un tel entier. Montrons que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est aussi défini quand $\sum_{i=1}^n s_i = k + 1$ et $s_1 \geq \ldots \geq s_n$. Pour cela, de deux choses l'une.

- Si $s_n = 1$, on a déjà dit que $R_n(s_1, \ldots, s_n) = 1$, qui est donc bien défini.

- Si $s_n \geq 2$, on va montrer que $R_n(s_1, \ldots, s_n) \leq g$, où $g = 2 - n + \sum_{i=1}^n R_n[s_1, \ldots, s_n]_i$, où $[s_1, \ldots, s_n]_i$ désigne le n-uplet $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i - 1, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. En effet, si K_g est un graphe complet à g sommets, on colorie ses arêtes avec de n couleurs $C_1, \ldots, C_n$, puis on choisit un sommet quelconque v de K_g. Par principe des tiroirs, il existe une couleur C_i telle que v est relié à au moins $g - 1$ sommets, donc à $R_n[s_1, \ldots, s_n]_i$ sommets par des arêtes de couleur C_i : soit K' le sous-graphe induit par cet ensemble de sommets. Si K' contient un sous-graphe complet K_{s_j} de couleur C_j (avec $i \neq j$) , alors K_g contient également ce sous-graphe complet ; si K' contient un sous-graphe complet $K_{s_i - 1}$ de couleur C_i, alors en adjoignant le sommet v à ce sous-graphe, on forme un sous-graphe complet K_{s_i} de K_g, qui entièrement colorié avec C_i. Par hypothèse de récurrence, on est forcément dans un des deux cas ci-dessus : cela signifie que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est bien défini, et au plus égal à g.

En particulier, puisque $n \geq 2$, on peut en déduire que $R_n(s_1, \ldots, s_n)$ est majoré par la fonction $S_n(s_1, \ldots, s_n)$, symétrique en ses variables, telle que $S_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1) = 1$ et $S_n(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^n S_n[s_1, \ldots, s_n]_i$ si $s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 2$.

En outre, étudions ici un objet combinatoire : les *chemins progressants* dans $\mathbb{Z}^n$: il s'agit de chemins finis où l'on passe d'un point au suivant en ajoutant 1 à une coordonnée. Le nombre de chemins progressant d'origine $(a_1, \ldots, a_n)$ et d'extrémité $(b_1, \ldots, b_n)$ est égal au coefficient multinomial $\frac{(b_1+\cdots+b_n-a_1-\cdots-a_n)!}{(b_1-a_1)!\ldots(b_n-a_n)!}$: on a simplement décidé des $b_i - a_i$ instants où l'on décidait d'augmenter la i-ème coordonnée.

Si on note $T_n(s_1, \ldots, s_n)$ le nombre de chemins progressants dans $\mathbb{Z}^n$ d'origine $(1, \ldots, 1)$ et d'extrémité $(s_1, \ldots, s_n)$, alors T_n est symétrique en ses variables. En outre, $T_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1) \geq 1 = S_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1)$ et $T_n(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^n T_n[s_1, \ldots, s_n]_i$ si $s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 2$, donc une récurrence immédiate sur $\sum_{i=1}^n s_i$ montre que $T_n(s_1, \ldots, s_n) \geq S_n(s_1, \ldots, s_n)$. Le résultat s'ensuit.

Solution de l'exercice 9.
On considère le nombre de Ramsey à n couleurs $R_n(3, 3, \ldots, 3)$, que l'on notera R dans la suite. Soit alors le graphe complet K_R dont les sommets sont les entiers $\{0, 1, \ldots, R-1\}$. on en colorie les arêtes avec n couleurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$: on colorie l'arête (i, j) avec la couleur C_k telle que $|i-j| \in P_k$. Alors, par définition du nombre de Ramsey à n couleurs, K_R admet un triangle monochromatique : on suppose, sans perte de généralité, que ses arêtes sont de couleur C_1, et on note $i < j < k$ ses trois sommets. En particulier, si on pose $x = k-j$, $y = j-i$ et $z = k-i$, alors x, y et z appartiennent à P_1, et $x+y=z$.

Solution de l'exercice 10.
On va procéder, comme d'habitude, par récurrence : on crée une suite d'ensembles infinis $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots$ de sommets de K_∞, une suite de couleurs $C_0, C_1, \ldots$ et une suite de sommets distincts a_0, puis $a_1 \in F_0$,$a_2 \in F_1, \ldots$ tels que, pour un entier i donné, arêtes de la forme (a_i, v) avec $v \in F_i$ sont toutes de coloriées avec la couleur C_i.

Tout d'abord, on commence en prenant un sommet $a_0 \in K_\infty$: a_0 appartient à une infinité d'arêtes, coloriées en seulement k couleurs, donc on peut choisir une couleur C_0 et un ensemble F_0 de sommets tels que (a_0, v) soit toujours de la couleur C_0 quelque soit $v \in F_0$.

Ensuite, on suppose qu'on dispose déjà des sommets $a_0, \ldots, a_i$, des couleurs $C_0, \ldots, C_i$ et des ensembles $F_0 \supseteq \cdots \supseteq F_i$. Alors on choisit un sommet $a_{i+1} \in F_i$ quelconque, différent de tous les a_i vus jusque là. Puisque F_i est infini, il existe une couleur C_{i+1} et un ensemble $F_{i+1} \subseteq F_i$ infini tel que l'arete (a_i, v) soit de couleur C_{i+1} pour tout sommet $v \in F_{i+1}$. Ce processus nous permet bien d'obtenir des suites (F_n), (C_n) et (a_n) infinies.

Maintenant, vu que la suite (C_n) prend un nombre fini de valeurs, il existe une couleur C_∞ telle que l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N} : C_n = C_\infty\}$ soit infini. Le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $a_X = \{a_n : n \in X\}$ est un graphe complet infini dont toutes les arêtes sont de couleur C_∞, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 11.
Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe planaire tel que V est infini dénombrable. On numérote l'ensemble de ses sommets $V = \{v_0, v_1, \ldots\}$. En outre, pour tout entier naturel n, on considère l'ensemble de sommets $V_n = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, ainsi que le sous-graphe fini $\mathcal{G}_n$ induit par V_n. Alors il existe un coloriage $C_n : V_n \to \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert}\}$ de $\mathcal{G}_n$ sans cycle monochrome de longueur impaire.

En particulier, il existe un ensemble infini $F_0 \subseteq \mathbb{N}$ et une couleur c_0 tels que $C_k(v_0) = c_0$ pour tout entier $k \in F_0$. Puis, si on dispose d'un ensemble infini $F_n \subseteq \mathbb{N}$ et de couleurs $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que $C_k(v_i) = c_i$ pour tous les entiers $k \in F_n$ et $i \leq n$, alors il existe un ensemble infini $F_{n+1} \subseteq F_n$ et une couleur c_{n+1} tels que $C_k(v_{n+1}) = c_{n+1}$ pour tout entier $k \in F_{n+1}$ tel que $k \geq n+1$. On considère alors le coloriage $C_\infty : V \to \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert}\}$

tel que $C_\infty(v_n) = c_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il apparaît alors que C_∞ n'admet pas de cycle monochrome de longueur impaire.

En effet, supposons qu'un tel cycle $\mathcal{C}$ existe : $\mathcal{C}$ étant fini, il existe un entier n tel que $\mathcal{C}$ ne contient que des sommets de V_n. En outre, on considère un entier $\ell \in F_n$ et le coloriage associe C_ℓ. Puisque $C_\ell(v_k) = c_k = C_\infty(v_k)$ pour tout entier $k \leq n$, il s'ensuit que $\mathcal{C}$ est un cycle monochrome de longueur impaire pour le coloriage C_ℓ : l'existence d'un tel cycle est incompatible avec la définition de C_ℓ. On en conclut donc que notre supposition était fausse, ce qui conclut l'exercice.

Chapitre 3

Cours du groupe B (débutants)

3.1 Géométrie groupe B (Vincent)

3.1.1 Quelques définitions sur les angles

Quelques notations.
Soit ABC un triangle non plat. On utilisera usuellement les notations suivantes :

- $\alpha = |\widehat{CAB}|$, $\beta = |\widehat{ABC}|$ et $\gamma = |\widehat{BCA}|$;
- $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$;
- S est l'aire de ABC ;
- R est le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Définition 1 (Angles orientés)**.**
Soit ABC un triangle tel que A, B, C sont disposés dans le sens des aiguilles d'une montre.

On notera $\widehat{CAB}$ l'angle α lui-même, et $\widehat{BAC}$ l'angle $-\alpha$. Ces angles sont définis modulo 2π (ou encore modulo $360°$). On parlera alors d'" angles orientés " : ils ont un signe et peuvent être positifs ou négatifs. En particulier, on notera que $\widehat{CAB} = -\widehat{BAC}$: l'ordre dans lequel on écrit les sommets a donc une importance !

Définition 2 (Angles de vecteurs)**.**
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Soit également E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire tel que $ACDE$ soit un parallélogramme. On notera $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ l'angle orienté $\widehat{BAE}$, que l'on a défini ci-dessus, et on dira que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est un " angle de vecteurs " . Là encore, les angles de vecteurs ont un signe et sont définis modulo 2π, et l'on observe que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$.

Définition 3 (Angles de droites)**.**
Soit (AB) et (CD) deux droites. Observons que les angles

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}),\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}),\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \text{ et } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC})$$

sont tous égaux entre eux si on les considère modulo π (et non pas modulo 2π).

On notera (AB, CD) ces " angles de droites " , qui sont bien définis modulo π. En particulier, notons que les angles de droite ont un signe, et que $(AB, CD) = -(CD, AB)$.

3.1.2 Points et droites remarquables dans le triangle

Soit ABC un triangle non plat. On compte plusieurs droites " remarquables " :

- les médiatrices de ABC, qui concourent en O, le centre du cercle circonscrit à ABC ;
- les bissectrices intérieures de ABC, qui concourent en I, le centre du cercle inscrit dans ABC ;
- les médianes de ABC, qui concourent en G, le centre de gravité de ABC ;
- les hauteurs de ABC, qui concourent en H, l'orthocentre de ABC.

Exercice 1 (Concourance des droites remarquables)**.**
Montrer que les médiatrices de ABC sont bien concourantes. Procéder de même pour les bissectrices intérieures, les médianes et les hauteurs de ABC.

Exercice 2 (Théorème de l'angle au centre)**.**
Soit ABC un triangle (non plat) et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrer que $\widehat{BOA} = 2\widehat{BCA}$.

Exercice 3 (Points cocycliques et angles de droite)**.**
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

Exercice 4 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)**.**
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et de centre O. Soit A, B deux points de $\mathcal{C}$, puis P un point de la droite (AB). Montrer que, en longueurs algébriques, on a $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = OP^2 - R^2$.

Exercice 5 (Loi des sinus)**.**
Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$

Exercice 6 (Axes radicaux)**.**
Soit $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles deux à deux sécants. On note

- A_1 et B_1 les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$;
- A_2 et B_2 les points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_1$;
- A_3 et B_3 les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Montrer que les droites (A_1B_1), (A_2B_2) et (A_3B_3) sont soit concourantes, soit parallèles.

Exercice 7 (Théorème du pôle Sud)**.**
Soit ABC un triangle (non plat) et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. On note M le milieu de l'arc de cercle compris entre B et C et qui ne passe pas par A. Montrer que $\widehat{BAC} = 2\widehat{BAM}$.

Exercice 8 (Théorème des trois cercles)**.**
Soit ABC un triangle, puis $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ trois points quelconques. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ sont concourants.

Exercice 9 (Inégalité de Ptolémée)**.**
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrer que $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$, avec égalité si et seulement si $ABCD$ est convexe et inscriptible.

3.1.3 Exercices d'application

Exercice 10.
Soit ABC un triangle équilatéral et soit Γ le cercle circonscrit à ABC. On place un point M sur l'arc de Γ reliant B à C sans passer par A. Montrer que $AM = BM + CM$.

Exercice 11.
Soit $ABCP$ un quadrilatère, et soit P_A, P_B et P_C les projetés orthogonaux respectifs de P sur les droites (BC), (CA) et (AB). Montrer que P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si A, B, C, P sont cocycliques.

Exercice 12.
Soit ABC un triangle, puis $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$.

- Montrer que les droites (BE) et (CD) se coupent nécessairement, en un point que l'on notera F.

- Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ circonscrits à ABE, ACD, BDF et CEF sont concourants, en un point que l'on notera M.

- Soit O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres respectifs de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$: montrer que M, O_1, O_2, O_3 et O_4 sont cocycliques.

Exercice 13.
Soit A, B, C, D quatre points deux à deux distincts, disposés dans cet ordre sur une droite Δ. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[BD]$. Soit X et Y les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, puis Z le point d'intersection de (XY) et Δ, et P un point de (XY) distinct de Z.

Soit M le point de $\mathcal{C} \cap (CP)$ distinct de C, et N le point de $\mathcal{C}' \cap (BP)$ distinct de B. Montrer que (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.

Exercice 14.
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible dans un cercle de rayon R, et tel qu'il existe un point $P \in [CD]$ tel que $CB = BP = PA = AB$. Montrer qu'il existe effectivement de tels points A, B, C, D, P, et qu'alors $PD = R$.

3.2 Solutions

Solution de l'exercice 1.

On note $\mathcal{M}^{\perp}_{XY}$ la médiatrice de $[XY]$, $\mathcal{B}_{XYZ}$ la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{XYZ}$, $\mathcal{M}^{1/2}XYZ$ la médiane de XYZ issue de Y et $\mathcal{H}_{XYZ}$ la hauteur de XYZ issue de Z.

Tout d'abord, puisque ABC n'est pas plat, les droites $\mathcal{M}^{\perp}_{AB}$ et $\mathcal{M}^{\perp}_{BC}$ sont sécantes. Puisque $\mathcal{M}^{\perp}_{AB} = \{P \mid AP = BP\}$, on en déduit que $\mathcal{M}^{\perp}_{AB} = \mathcal{M}^{\perp}_{BC} = \{P \mid AP = BP = CP\} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}_{CA}$, donc que les trois médiatrices sont bien concourantes, leur point de concours étant le centre du cercle circonscrit à ABC.

De même, les droites $\mathcal{B}_{ABC}$ et $\mathcal{B}_{BCA}$ sont sécantes. Alors $\mathcal{B}_{ABC} = \{P \mid P$ équidistant de (AB) et $(BC)\}$, donc $\mathcal{B}_{ABC} \cap \mathcal{B}_{BCA} = \{P \mid P$ équidistant de (AB), (BC) et $(CA)\} \subseteq \mathcal{B}_{CAB}$. Les trois bissectrices sont donc bien concourantes, leur point de concours étant le centre du cercle inscrit dans ABC.

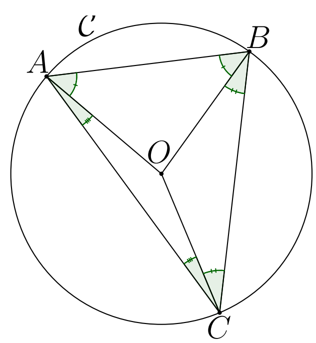
Puisque $\mathcal{M}^{1/2}_{ABC} = \{aA + bB + cC \mid a + b + c = 1$ et $a = c\}$, on en déduit que $\mathcal{M}^{1/2}_{ABC} \cap \mathcal{M}^{1/2}_{BCA} = \{\frac{A+B+C}{3}\} \subseteq \mathcal{M}^{1/2}_{CAB}$, donc que les trois médianes sont bien concourantes, leur point de concours étant le centre de gravité de ABC.

Enfin, soit A', B' et C' les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à (BC), (CA) et (AB). Alors $\mathcal{H}_{ABC} = \mathcal{M}^{\perp}_{B'C'}$, *et cætera*, de sorte que les hauteurs de ABC sont concourances, leur point de concours étant le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$.

Solution de l'exercice 2.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC, et soit O le centre de O. Les triangles AOB, BOC et COA sont isocèles en O, de sorte que $\widehat{BAO} = \widehat{OBA}$, $\widehat{CBO} = \widehat{OCB}$ et $\widehat{CAO} = \widehat{OCA}$. Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 180° + \widehat{OAB} + \widehat{ABO} = 180° + \widehat{OAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CBO} \\ &= (180° + \widehat{CAB} + \widehat{ABC}) + \widehat{OAC} + \widehat{CBO} = \widehat{ACB} + \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = 2\widehat{ACB}.\end{aligned}$$



Solution de l'exercice 3.

En reprenant les notations précédentes, si $(CA, CB) = (DA, DB)$, soit O' le centre du cercle circonscrit à ABD. Il existe un entier $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} + \varepsilon \cdot 180°$, de sorte que Alors $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2(\widehat{ADB} + \varepsilon \cdot 180°) = 2\widehat{ADB} = \widehat{AOB}$.

Puisque O et O' se trouvent tous deux sur la métriatrice de $[AB]$, il s'ensuit que $2\widehat{BAO} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA} = 180° + \widehat{BOA} = 180° + \widehat{BO'A} = 2\widehat{BAO'}$, donc que $\widehat{BAO} = \widehat{BAO'} \pmod{180°}$. Or, on sait que $\widehat{BAO}$ et $\widehat{BAO'}$ sont deux angles aigus, de sorte que $\widehat{BAO} = \widehat{BAO'}$, donc que $O = O'$, puis que A, B, C et D sont cocycliques.

Réciproquement, si $D \in \mathcal{C}$, alors $2\widehat{ACB} = \widehat{AOB} = 2\widehat{ADB}$, ce qui montre que $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \pmod{180°}$, c'est-à-dire $(CA, CB) = (DA, DB)$. Ceci conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 4.
Soit (CD) une autre droite passant par P et recoupant le cercle $\mathcal{C}$. Alors

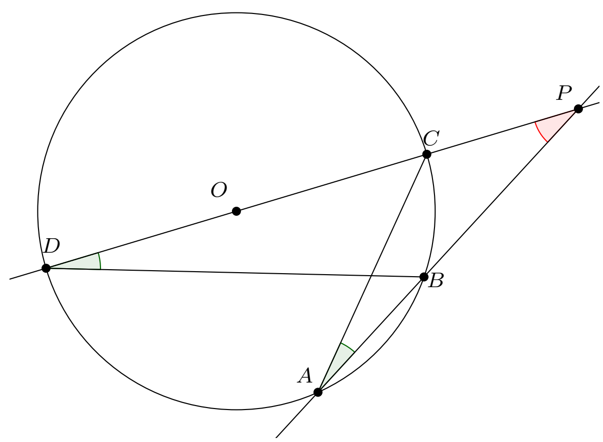
$$(PA, AC) = (BA, AC) = (BD, DC) = (BD, DP).$$

De plus, que P soit à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathcal{C}$, on a $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = -(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PB})$. Les triangles PAC et BDP sont semblables et d'orientations opposées, de sorte que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

En particulier, si (CD) est un diamètre de $\mathcal{C}$, alors

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = |PO^2 - R^2|.$$

En notant que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \leq 0$ si et seulement si P est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si et seulement si $PO \leq R$, le résultat s'ensuit.

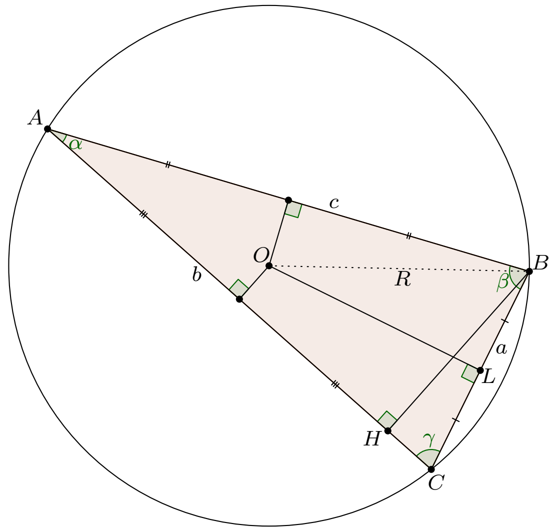


Solution de l'exercice 5.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors $a\sin(\gamma) = BH$, donc ABC est d'aire $S = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{abc\sin(\gamma)}{2c}$, de sorte que $\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2S}$. De manière symétrique, on trouve $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{abc}{2S}$.

Soit alors L le milieu de $[BC]$. Alors OLB et OLC sont rectangles en L, avec $\widehat{COL} = \widehat{LOB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = \widehat{CAB} = \alpha$. Il s'ensuit que

$$a = 2BL = 2OB\sin(\widehat{LOB}) = 2R\sin(\alpha),$$

c'est-à-dire $\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$.

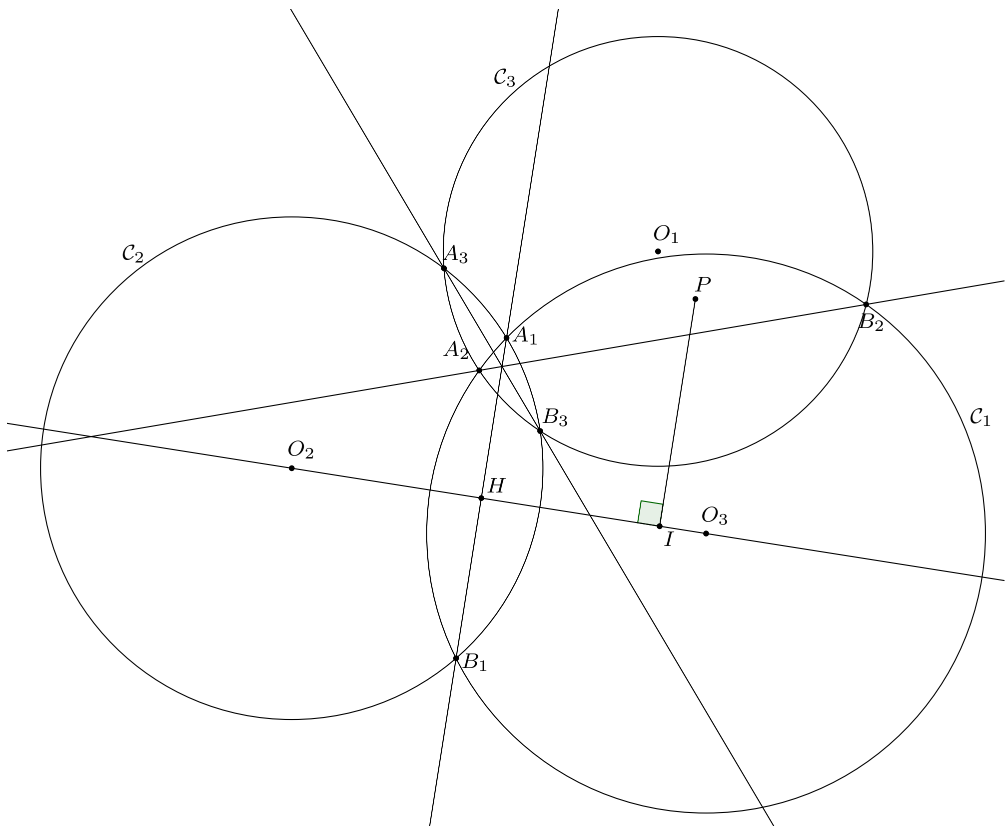

A
α
c
O
B
b
R
β
a
L
H
γ
C

<u>Solution de l'exercice 6.</u>
Soit O_1, O_2 et O_3 les milieux de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, et R_1, R_2, R_3 les rayons respectifs de ces cercles. Soit également P un point quelconque et $c_i(P)$ la puissance de P par rapport au cercle $\mathcal{C}_i$. Enfin, soit H le point d'intersection de (A_1B_1) avec (O_2O_3) et I le projeté orthogonal de P sur (O_2O_3). Notons que (O_2O_3) est la médiatrice de $[A_1A_2]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
c_2(P) - c_3(P) &= PO_2^2 - R_2^2 - PO_3^2 - R_3^2 \\
&= (PI^2 + IO_2^2) - (HA_1^2 + HO_2^2) - (PI^2 + IO_3^2) - (HA_1^2 + HO_3^2) \\
&= (IO_2^2 - HO_2^2) - (IO_3^2 - HO_3^2) \\
&= (\overline{IO_2} - \overline{HO_2})(\overline{IO_2} + \overline{HO_2}) - (\overline{IO_3} - \overline{HO_3})(\overline{IO_3} + \overline{HO_3}) \\
&= \overline{IH}(\overline{IO_2} + \overline{HO_2} - \overline{IO_3} - \overline{HO_3}) \\
&= 2\overline{IH} \cdot \overline{O_3O_2},
\end{aligned}$$

de sorte que $c_2(P) = c_3(P)$ si et seulement si $I = H$, c'est-à-dire si et seulement si $P \in (A_1B_1)$.

De même, $c_1(P) = c_2(P)$ si et seulement si $P \in (A_3B_3)$, et $c_1(P) = c_3(P)$ si et seulement si $P \in (A_2B_2)$. Les trois " axes radicaux " (A_1B_1), (A_2B_2) et (A_3B_3) sont donc soit parallèles, soit concourants.



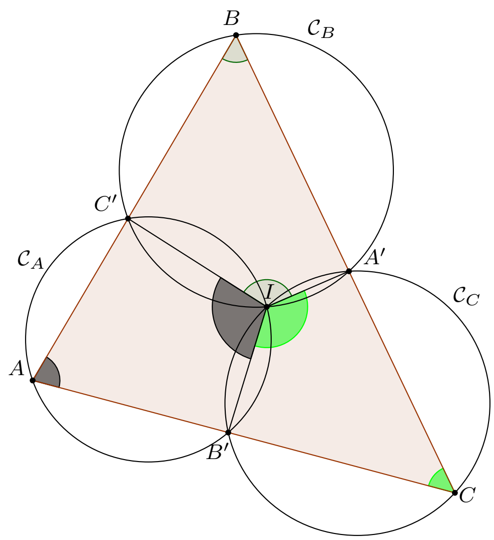
<u>Solution de l'exercice 7.</u>
Soit A' le point de $\mathcal{C}$, autre que M, tel que $(A'M)$ soit la médiatrice de $[BC]$. Puisque les points A, A', B, C, M sont cocycliques, on peut directement calculer que

$$\widehat{BAM} = \widehat{BA'M} = \frac{1}{2}\widehat{BA'C} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Solution de l'exercice 8.
On note $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ les cercles circonscrits à $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$. Soit I le point d'intersection de $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ autre que C'. Alors

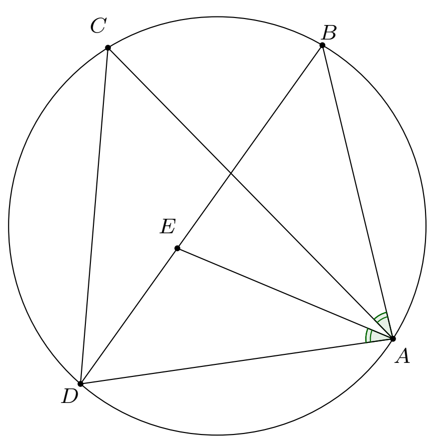
$$\begin{aligned}(IA', IB') &= (IA', IC') + (IC', IB') = (BA', BC') + (AC', AB') \\ &= (BC, BA) + (AB, AC) = (BC, CA) = (BA', CB'),\end{aligned}$$

donc $I \in \mathcal{C}_C$, ce qui conclut l'exercice.



Solution de l'exercice 9.
Soit E l'unique point tel que ABE et ACD soient directement semblables. Alors $EB = \frac{AB \cdot DC}{AC}$. De plus, $\widehat{EAD} = \widehat{EAB} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC}$ et $AE \cdot AC = AB \cdot AD$, donc EAD et BAC sont directement semblables eux aussi. Cela montre que $ED = \frac{BC \cdot AD}{AC}$. Par inégalité triangulaire, on a donc $AC \cdot BD \leq AC(EB + ED) = AB \cdot CD + BD \cdot AD$.

De surcroît, il y a égalité si et seulement si $E \in [BD]$, c'est-à-dire si $\widehat{DBA} = \widehat{EBA} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{BDA} = \widehat{EDA} = \widehat{BCA}$: cela signifie que A, B, C, D sont cocycliques avec $[BC] \cap [AD] = [AB] \cap [CD] = \emptyset$, c'est-à-dire que $ABCD$ est convexe.

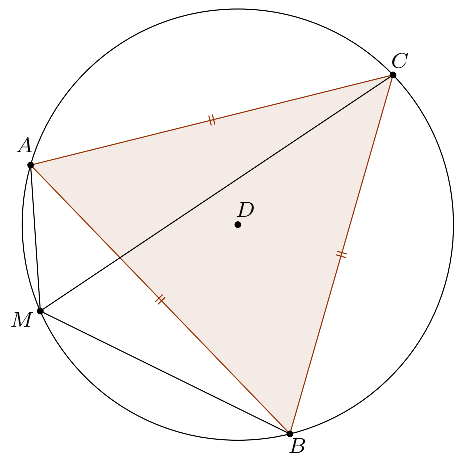


Solution de l'exercice 10.

Soit R le rayon de Γ. Par application de l'égalité de Ptolémée au quadrilatère $ABMC$, il vient

$$AM \cdot R = AM \cdot BC = AB \cdot CM + AC \cdot BM = R(BM + CM),$$

ce qui montre que $AM = BM + CM$.

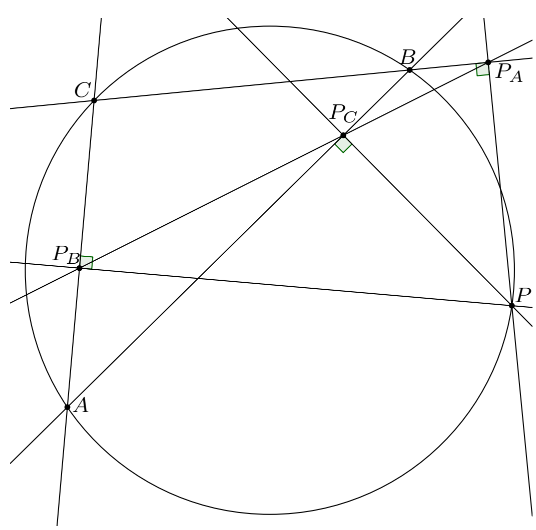


Solution de l'exercice 11.

Les quadrilatères PP_BAP_C, PP_CBP_A et PP_ACP_B ont chacun deux angles droits donc sont inscriptibles. On en déduit que

$$(P_CP_A, P_CP_B) = (P_CP_A, P_CP) + (P_CP, P_CP_B) = (BP_A, BP) + (AP, AP_B) = (BC, BP) - (AC, AP).$$

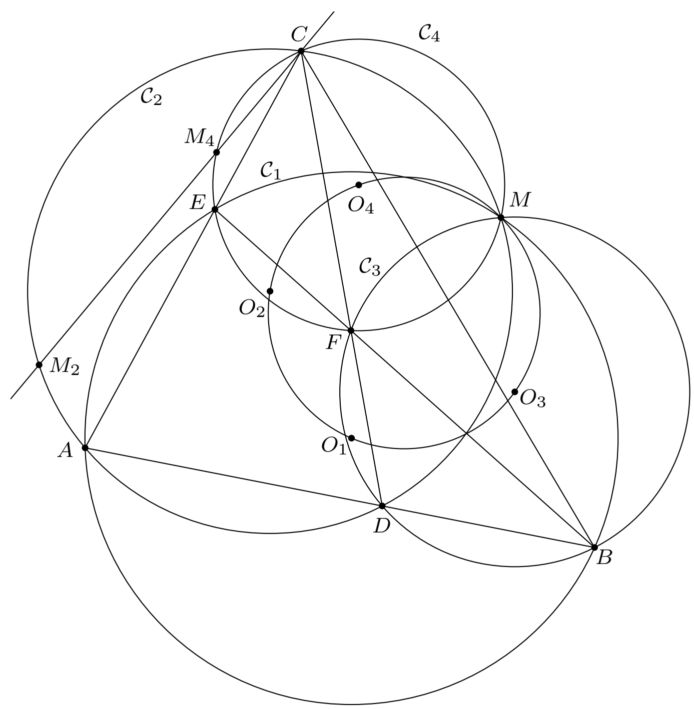
Les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si $(P_CP_A, P_CP_B) = 0$, donc si $(BC, BP) = (AC, AP)$, c'est-à-dire si A, B, C, P sont cocycliques.



Solution de l'exercice 12.

- Puisque A et B se trouvent de part et d'autre de (CD) et que E est du même côté de (CD) que A, alors $[BE]$ coupe (CD). De même, (BE) coupe $[CD]$, de sorte que F est le point d'intersection des segments $[BE]$ et $[CD]$.

- Puisque $F \in [BE] \cap [CD]$, F est intérieur aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. En appliquant le théorème des trois cercles au triangle ADC et aux points $B \in (AD)$, $E \in (AC)$ et $F \in (CD)$, on trouve que $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont concourants en un point $M \neq F$; de même, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont concourants en un point $M' \neq F$. Puisque $\{F, M, M'\} \subseteq \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$, il s'ensuit que $M = M'$.



- $MBDF$ est inscriptible donc $(BF, BD) = (MF, MD)$. De plus, M et F sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, donc $(O_3O_4, MF) = 90°$. De même, M et D sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, donc $(MD, O_3O_2) = 90°$. Cela montre que

$$\begin{aligned}(BF, BD) &= (MF, MD) = 90° + (MF, MD) + 90° \\ &= (O_3O_4, MF) + (MF, MD) + (MD, O_3O_2) \\ &= (O_3O_4, O_3O_2).\end{aligned}$$

De même, on a $(BE, BA) = (ME, MA)$ et $(O_1O_4, ME) = (MA, O_1O_2) = 90°$, donc

$$\begin{aligned}(BE, BA) &= (ME, MA) = 90° + (ME, MA) + 90° \\ &= (O_1O_4, ME) + (MF, MD) + (MA, O_1O_2) \\ &= (O_1O_4, O_1O_2).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(O_1O_4, O_1O_2) = (BE, BA) = (BF, BD) = (O_3O_4, O_3O_2),$$

ce qui signifie que O_1, O_2, O_3, O_4 sont cocycliques.

Maintenant, soit M_2 et M_4 les symétriques de M par rapport à O_2 et O_4. Alors MCM_2 et MCM_4 sont rectangles en C, de sorte que A, M_2, M_4 sont alignés. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
(MO_4, MO_2) &= (MM_4, ME) + (ME, MM_2) \\
&= (CM_4, CE) + (ME, MM_2) && \text{car } CEMM_4 \text{ est inscriptible} \\
&= (CM_2, CA) + (ME, MM_2) && \text{par alignement de } CM_1M_2 \text{ et de } ACE \\
&= (MM_2, MA) + (ME, MM_2) = (ME, MA) \\
&= (O_1O_4, O_1O_2) && \text{comme on le montre dix lignes plus haut,}
\end{aligned}$$

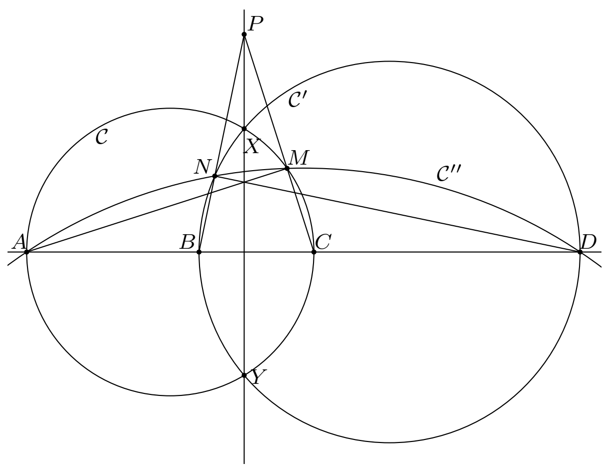
de sorte que M, O_1, O_2, O_4 sont cocycliques, ce qui conclut.

<u>Solution de l'exercice 13.</u>
Le point P est sur l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de sorte que $\overline{PB} \cdot \overline{PN} = \overline{PX} \cdot \overline{PY} = \overline{PC} \cdot \overline{PM}$. Le quadrilatère $BNCM$ est donc inscriptible. De plus, les angles $\widehat{MCA}$ et $\widehat{NBD}$ sont droits, donc

$$\begin{aligned}(AM, AD) &= (AM, AC) = (AM, MC) + (MC, AC) = 90^\circ + (CM, CA) \\ &= 90^\circ + (CM, CB) = 90^\circ + (NM, NB) = (NB, ND) + (NM, NB) \\ &= (NM, ND),\end{aligned}$$

de sorte que $AMDN$ est inscriptible.

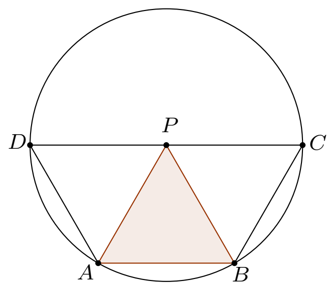
Soit alors $\mathcal{C}''$ le cercle circonscrit à $AMDN$. Les droites (AM), (DN) et (XY) sont les axes radicaux de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ et ne sont pas parallèles, puisque A et M se trouvent de part et d'autre de (XY) : ces droites sont donc concourantes.

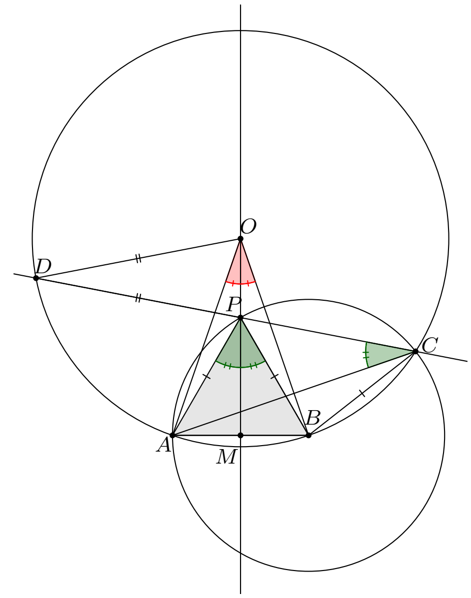


<u>Solution de l'exercice 14.</u>
Une configuration telle que décrite dans l'énoncé est obtenue dès lors que APD, ABP et BPC sont tous trois équilatéraux.

Considérons maintenant une configuration plus générale. Notons M le milieu de $[AB]$ et O le centre du cercle circonscrit à $ABCD$. Alors O, P, M sont alignés, de sorte que Le triangle OPD est donc isocèle en D, ce qui montre que $PD = OD = R$.

$$\begin{aligned}2(PD, PO) &= 2(PC, PM) = 2(PC, PB) + (PB, PA) && \text{car } (PB, PM) = (PM, PA) \\ &= 2(CB, CP) + (BA, BP) \\ &= 2(CB, CP) + 2(CA, CP) && \text{car } B \text{ est le centre du cercle circonscrit de } ACP \\ &= (CB, CD) + 2(CA, CD) \\ &= (OB, OD) + (OA, OD) && \text{car } O \text{ est le centre du cercle circonscrit de } ABCD \\ &= 2(OM, OD) = 2(OP, OD).\end{aligned}$$


D
P
C
A
B


O
D
P
C
B
A
M