

INTRODUCTION

Il s'agit de présenter les inégalités classiques que doit connaître tout candidat aux compétitions de Mathématiques de niveau national ou international. Elles sont accompagnées d'exemples d'applications corrigés, et de divers exercices d'entraînement tirés en général des différentes compétitions qui ont lieu de par le monde, et regroupés par thèmes. Attention, même s'il y a souvent plusieurs façons possibles de prouver une inégalité, ce regroupement est une aide importante dans la recherche de la solution...

Pour la plupart, ces inégalités n'apparaissent pas dans les programmes d'enseignement au Lycée. Le choix fait ici est de se placer en complément de ces programmes. Nous nous limiterons donc à présenter des méthodes de résolution d'inégalités qui sont spécifiquement algébriques. Et c'est pourquoi nous faisons le choix de ne pas mentionner deux autres types d'approches fondamentales :

- Utilisation de l'outil analytique (étude de fonctions, dérivées...)
- Le raisonnement par récurrence.

Et, si le bagage nécessaire est finalement assez limité, le sujet reste tout de même suffisamment vaste.

Il est évident que ce qui suit ne remplacera pas les livres de références sur le sujet (par exemple [1],[2],[3]), mais j'espère que chacun y trouvera de l'intérêt.

Pierre Bornsztein.
(Octobre 2001)

Chapitre 1

Facile mais toujours utile

I L'inégalité triangulaire

Théorème 1

Pour tous points A, B, C de l'espace, on a : $AB \leq AC + CB$, avec égalité si et seulement si $C \in [AB]$.

Application 1

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle.

Prouver que : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$. (Autriche/Pologne)

Solution

1) On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{2a}{(b+c) + (b+c)} + \frac{2b}{(c+a) + (c+a)} + \frac{2c}{(a+b) + (a+b)} \\ &< \frac{2a}{a+(b+c)} + \frac{2b}{b+(c+a)} + \frac{2c}{c+(a+b)} \\ &= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Application 2

a) Prouver que, pour tous points O, A_1, A_2 de l'espace, on a :

$$\|\vec{OA_1}\| + \|\vec{OA_2}\| \leq \|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\|.$$

b) Prouver que, pour tous points O, A_1, A_2, A_3, A_4 , de l'espace, on a :

$$\sum_{i=1}^4 \|\vec{OA_i}\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \|\vec{OA_i} + \vec{OA_j}\|. \text{ (D'après Concours général 1986)}$$

Solution

a) On a :

$$\begin{aligned} \|\vec{OA_1}\| &= \left\| \frac{1}{2} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) + \frac{1}{2} (\vec{OA_1} - \vec{OA_2}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\| \right) \end{aligned}$$

$$\text{De même } \|\vec{OA_2}\| \leq \frac{1}{2} \left(\|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\| \right)$$

$$\text{Et ainsi : } \|\vec{OA_1}\| + \|\vec{OA_2}\| \leq \|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\|.$$

Remarque. Cela signifie que, dans un parallélogramme, la somme des longueurs de deux côtés consécutifs ne dépasse pas la somme des longueurs des diagonales.

b) D'après a), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \|\vec{OA_i}\| &\leq \|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\| \\ &\quad + \|\vec{OA_3} + \vec{OA_4}\| + \|\vec{OA_3} - \vec{OA_4}\| \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_3} - \vec{OA_4}\| &\leq \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2} + \vec{OA_3} - \vec{OA_4}\| \\ &\quad + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2} - \vec{OA_3} + \vec{OA_4}\| \\ &\leq \|\vec{OA_1} + \vec{OA_3}\| + \|\vec{OA_2} + \vec{OA_4}\| \\ &\quad + \|\vec{OA_1} + \vec{OA_4}\| + \|\vec{OA_2} + \vec{OA_3}\| \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^4 \|\vec{OA_i}\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \|\vec{OA_i} + \vec{OA_j}\|.$$

II Un carré est toujours positif!

Cette évidence va nous servir à établir quelques résultats fort utiles.

Théorème 2

- Pour tous réels a, b , on a :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ et } 4ab \leq (a + b)^2$$

avec égalité(s) si et seulement si $a = b$.

- Pour tout réel $x > 0$, on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Application 3

Soient a, b deux réels non nuls.

Déterminer le minimum de $\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}$.

Solution

On a :

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6} \right) + \left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} \right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \\ \geq 2 + 2 + 2$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Application 4

Prouver que pour tous réels $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}. \text{ (Russie 1995).}$$

Solution

$$\text{On a : } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{x}{2\sqrt{x^4 y^2}} + \frac{y}{2\sqrt{x^2 y^4}} \\ \leq \frac{x}{2x^2 y} + \frac{y}{2xy^2} \\ = \frac{1}{xy}.$$

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Alors :

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2,$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont colinéaires.

Preuve

On pose $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$ et $B = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } A - B &= \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

Remarque.

Cette inégalité peut s'interpréter géométriquement. Plaçons-nous dans l'espace euclidien usuel.

Si \vec{u} (a_1, a_2, a_3) et \vec{v} (b_1, b_2, b_3) sont non nuls, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz traduit simplement que :

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \geq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

avec égalité ssi \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Application 5

Prouver que, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, on a :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Solution

D'après Cauchy-Schwarz :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = n^2.$$

Application 6

Soient a, b, c, d, e des réels tels que

$$a + b + c + d + e = 8 \text{ et } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Quelle est la valeur maximale de e ? (USA 1978)

Solution

D'après Cauchy-Schwarz :

$$(a + b + c + d)^2 \leq (1 + 1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

D'où : $(8 - e)^2 \leq 4(16 - e^2)$

c.à.d. $e(5e - 16) \leq 0$.

C.à.d. $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$.

La valeur $\frac{16}{5}$ étant atteinte pour $\begin{cases} a = b = c = d \\ a + b + c + d = \frac{24}{5} \end{cases}$,

c.à.d. $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

PROBLÈMES

1) Prouver que, pour tous réels x, y , on a :

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}. \text{ (Estonie 1996/1997)}$$

2) Prouver que si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

3) Soit $n \geq 2$ un entier, et a_1, a_2, \dots, a_n des réels tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Prouver que : $\sum_{i < j} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n |a_i|$.

4) Soient $n > 1$ un entier, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, et $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Prouver que : $\sum_{i=1}^n \frac{s}{s - a_i} \geq \frac{n^2}{n - 1}$, $\sum_{i=1}^n \frac{s - a_i}{a_i} \geq n(n - 1)$, et que $\sum_{i=1}^n$

$$\frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

(D'après Australie 1993)

5) Soient $x, y, z > 0$.

Prouver que : $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

6) Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle.

Prouver que : $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$.

7) Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle.

Prouver que : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

(Olympiade du Pacifique asiatique 1996)

8) Soient x, y, z dans \mathbb{R}^+ .

Prouver que : $\frac{x^2 - z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} \geq 0$, et déterminer les cas d'égalité.

9) Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$.

Prouver que : $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$. (OIM 2000)

10) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. On pose $S_1 = \sum_{i=1}^n a_i$ et $S_2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

Prouver que $\sum_{k=1}^n \frac{S_2 - a_k^2}{S_1 - a_k} \geq S_1$.

11)a) Soient $a_1, a_2, a_3 > 0$, tels que $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$.

Prouver que a_1, a_2, a_3 sont les longueurs des côtés d'un triangle.

b) Soient $n \geq 3$ un entier, et $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, tels que :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4).$$

Prouver que, pour tous i, j, k deux à deux distincts, les nombres a_i, a_j, a_k sont les longueurs des côtés d'un triangle. (Chine 1987/1988)

12) Soient $a, b, c, d > 0$ tels que $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^3$.

Prouver que : $\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq 1$. (Singapour 2000)

13) Soient $x, y, z > 1$ tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Prouver que : $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.
(proposé OIM 1992)

14) Soient $x, y, z > 0$, tels que $xyz \geq xy + yz + zx$.

Prouver que : $xyz \geq 3(x+y+z)$. (Inde 2001)

Chapitre 2

Réordonnement

I L'inégalité du réordonnement

Cette inégalité est une évidence commerciale : On gagne plus d'argent lorsque l'on vend cher la plus grande partie de nos produits, et peu à bon marché, plutôt que le contraire !

Théorème 4

Soient $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ deux suites croissantes de réels.

Alors, parmi toutes les permutations σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, la somme

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$$
 est maximale lorsque $\sigma = Id$ et minimale lorsque

$\sigma(i) = n - i$ pour tout i .

C'est-à-dire S_σ est maximale lorsque les suites sont rangées dans le même ordre, et minimal lorsqu'elles sont rangées dans l'ordre contraire.

Preuve

Comme il n'y a qu'un nombre fini ($n!$) de permutations possibles, il y en a une pour laquelle S_σ est maximale (resp. minimale).

Soient $i < j$ deux indices, σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ et supposons que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Alors $b_{\sigma(j)} \leq b_{\sigma(i)}$ car (b_k) est croissante.

Soit σ' la permutation qui coïncide partout avec σ sauf pour i, j où $\sigma'(j) = \sigma(i)$ et $\sigma'(i) = \sigma(j)$ (on échange les valeurs en i et j).

Alors : $S_{\sigma'} - S_\sigma = (a_j - a_i)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})$.

- si $a_i < a_j$ et $b_{\sigma(j)} < b_{\sigma(i)}$, alors $S_{\sigma'} > S_\sigma$, ce qui assure que S_σ n'est pas

maximale.

- si $a_i = a_j$ ou $b_{\sigma(j)} = b_{\sigma(i)}$, on a $S_{\sigma'} = S_{\sigma}$.

Ainsi, remplacer σ par σ' ne fait pas diminuer la somme.

Si $\sigma(1) \neq 1$ alors, en utilisant ce résultat pour $i = 1$ et j tel que $\sigma(j) = 1$, on se ramène à une permutation σ' telle que $\sigma'(1) = 1$, tout en ne faisant pas diminuer la somme. On répète alors cette opération pour $i = 2, 3, \dots, n - 1$ jusqu'à atteindre Id , et avec des majorations successives des sommes correspondantes. On en déduit que le maximum est atteint pour $\sigma = Id$. On raisonne de même pour le minimum.

Remarque.

À des lourdeurs près dans la démonstration, ce théorème peut s'écrire de façon plus maniable sous la forme : La somme $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ est maximale

lorsque les deux suites sont rangées dans le même ordre (même si ce n'est pas toujours croissant, ou toujours décroissant), et minimal lorsqu'elles sont rangées dans l'ordre contraire l'une de l'autre.

Application 1

Déterminer le minimum de $f \left(x \mapsto \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \right)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Solution

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Les suites $(\sin^3 x, \cos^3 x)$ et $\left(\frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\sin x} \right)$ sont monotones de même sens. Donc, d'après l'inégalité du réordonnement :

$$f(x) \geq \sin^3 x \frac{1}{\sin x} + \cos^3 x \frac{1}{\cos x} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

D'autre part, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Donc, le minimum cherché est 1.

Application 2

Prouver que, pour tous réels $a, b, c \geq 0$, on a :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq 3abc.$$

Solution

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

Alors $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ et $ab \geq ac \geq bc$.

D'après l'inégalité du réordonnement (deux fois) :

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &= a^2a + b^2b + c^2c \\
&\geq a^2b + b^2c + c^2a \\
&= (ab)a + (ac)c + (bc)b \\
&\geq abc + acb + bca \\
&= 3abc.
\end{aligned}$$

II L'inégalité de Chebyshev

Théorème 5

Soient $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ deux suites croissantes de réels.

Alors :
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n}.$$

Si, par contre, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ alors :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n}.$$

Preuve

D'après l'inégalité du réordonnement, si les suites sont rangées dans le même ordre, on a :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_nb_1$$

...

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \dots + a_nb_{n-1}$$

en sommant, il vient :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

d'où le résultat.

On procède de même dans le cas où les suites ne sont pas rangées dans le même ordre.

Application 3

Soient $a, b, c > 0$.

Prouver que :
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solution

Première méthode.

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

Alors : $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$.

D'après l'inégalité de Chebyshev, il vient alors :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right)$$

Or : $\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) ((b+c) + (c+a) + (a+b)) \geq 9$

c.à.d. $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

Et finalement : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}$.

Deuxième méthode.

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

Alors : $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$.

D'après l'inégalité du réordonnement (deux fois) :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

et $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c}$

en sommant, il vient :

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) &\geq \frac{a}{c+a} + \frac{c}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c} \\ &= \frac{a+c}{c+a} + \frac{b+a}{a+b} + \frac{c+b}{b+c} \\ &= 3. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

Application 4

Soient $a, b, c, d \geq 0$, avec $ab + bc + cd + da = 1$.

Prouver que : $\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$. (Proposé OIM 1990)

Solution

Posons $S = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}$

et $x = b+c+d, y = c+d+a, z = d+a+b, t = a+b+c$.

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \geq b \geq c \geq d$.

Alors : $a^n \geq b^n \geq c^n \geq d^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \geq \frac{1}{t}$.

De plus, d'après l'inégalité du réordonnement :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 1.$$

L'inégalité de Chebyshev conduit alors à :

$$S \geq \frac{1}{4} (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right).$$

La même inégalité donne aussi :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (a + b + c + d)$$

$$\text{Or : } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$$

$$\text{et } 3(a + b + c + d) = x + y + z + t$$

$$\text{Donc } S \geq \frac{1}{48} (x + y + z + t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{16}{48} = \frac{1}{3}.$$

PROBLÈMES

1) Soient $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ des réels.

On considère une permutation (z_1, z_2, \dots, z_n) de (y_1, y_2, \dots, y_n) .

Prouver que : $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$. (OIM 1975)

2) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels non nuls et deux à deux distincts. Prouver que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (\text{OIM 1978})$$

3) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

Prouver que : $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$. (Chine 1984/1985)

4) Soient $a, b, c > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Prouver que : $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$.

5) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

Prouver que : $x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}$.

6) Soient $x, y, z > 0$ tels que $xyz = 1$.

Prouver que : $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$. (Proposé OIM 1998)

Chapitre 3

Lissage vers la moyenne

L'idée fondamentale est que, lorsqu'une expression de la forme $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ devient plus grande (resp. plus petite) lorsque deux des variables sont rendues plus proches, tout en préservant les contraintes éventuelles qui portent sur l'ensemble de ces variables, alors $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ atteint son maximum (resp. son minimum) quand $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Théorème 6 (I.A.G.)

Soient x_1, x_2, \dots, x_n dans \mathbb{R}^{+*} . On a :

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Preuve

Nous allons effectuer une suite d'opérations qui laissera le membre de gauche invariant (la contrainte) et augmentera le membre de droite :

On note $a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ la moyenne arithmétique de x_1, x_2, \dots, x_n .

Si tous les x_i ne sont pas égaux alors, puisque $\min x_i \leq a \leq \max x_i$, il existe i, j tels que $x_i < a < x_j$.

On remplace alors x_i par $x'_i = a$, et x_j par $x'_j = x_i + x_j - a$.

Cette opération laisse inchangé le membre de gauche (et donc la valeur de a), tandis que le membre de droite augmente :

En effet, on a $x'_i x'_j = a(x_i + x_j - a) = x_i x_j + (x_j - a)(a - x_i) > x_i x_j$, les autres termes restant les mêmes.

Or, par cette opération, le nombre de x_i égaux à a augmente d'une unité.

On ne pourra donc la répéter indéfiniment. Comme le seul “test d’arrêt” est d’avoir tous les x_i égaux, et que dans ce cas l’inégalité est clairement une égalité, on a notre résultat. Et dans tous les autres cas, l’inégalité est stricte.

Remarques.

- a) On pourrait aussi choisir de remplacer x_i et x_j par $\frac{x_i + x_j}{2}$. Mais alors se poserait un problème de convergence qui, même s’il peut être résolu ici, conduirait à des complications inutiles. Néanmoins, cette transformation reste très intéressante pour réduire le nombre de variables.
- b) Bien entendu, le même principe peut être utilisé avec d’autres moyennes.

Application 1

Prouver que, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, on a :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Solution

$$\text{D'après IAG : } \sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \text{ et } \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{\frac{1}{n}} = n \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$\text{Ainsi : } \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

Application 2

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}$, avec $xyz = 1$.

Prouver $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx)$. (Moscou 2000)

Solution

Par symétrie, on peut supposer que $x \leq y \leq z$.

Posons $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) &= y^2 + z^2 + y + z - 2(xy + yz + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz} \\ &= (y - z)^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - 2x(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \\ &= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \left((\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 + 1 - 2x \right) \\ &= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 (y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}) \end{aligned}$$

Or $x \leq y \leq z$ donc $y + z - 2x \geq 0$.

Et ainsi $f(x, y, z) - f(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geq 0$ avec égalité ssi $y = z$.

Posons $a = x$ et $b = \sqrt{yz}$. Alors $a, b > 0$ et $ab^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } f(a, b, b) &= a^2 + a + 2b - 4ab \\ &= \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 2b - \frac{4}{b} \\ &= \frac{1}{b^4} (2b^5 - 4b^3 + b^2 + 1) \\ &= \frac{1}{b^4} (b-1)^2 (2b^3 + 4b^2 + 2b + 1) \\ &\geq 0 \text{ avec égalité ssi } b = 1. \end{aligned}$$

Donc $f(x, y, z) \geq f(a, b, b) \geq 0$, avec égalité ssi $y = z, b = 1, xyz = 1$, c.à.d. $x = y = z = 1$.

PROBLÈMES

1) Soient $a, b, c, d > 0$ tels que $abcd = 1$.

Prouver que : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$.

(Urss 1962)

2) Soient $a, b, c \geq 0$.

Prouver que : $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$.

3) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$, avec $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.

Prouver que : $\prod_{k=1}^n a_k (1 - a_k) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

4) Soient deux réels a, b , avec $a \neq 0$.

Prouver que : $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$. (Autriche 2000)

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Prouver que la suite (U_n) est croissante, et que la suite (V_n) décroissante.

6) Soient $n \geq 3$ un entier, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$.

Prouver que : $\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}$. (URSS 1969)

7) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Prouver que : $\prod_{i=1}^n (2 + a_i) \geq 3^n$. (Chine 1989/1990)

8) Soient $n > 1$ un entier, x_1, x_2, \dots, x_n dans \mathbb{R}^{+*} , et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

On pose $s = \sum_{k=1}^n x_k$. Déterminer la plus grande constante $C(n)$ telle

$$\text{que : } \sum_{k=1}^n \frac{a_k (s - x_k)}{x_k} \geq C(n) \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

9) Comment doit-on répartir n boules dans k boîtes de façon à minimiser le nombre de paires de boules qui appartiennent à une même boîte ?

10) Soient $x, y, z > 0$ tels que $x + y + z = 1$.

$$\text{Prouver que : } \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

11) Soient $n \geq 2$ un entier, et $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 x_2 \dots x_n = 1$.

Déterminer le minimum de $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$. (D'après Roumanie 1997)

12) Soient $a, b, c, d \geq 0$ tels que $a + b + c + d = 1$.

$$\text{Prouver que : } abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd. \text{ (Proposé OIM 93)}$$

13) Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients positifs, et x_1, x_2, \dots, x_n dans \mathbb{R}^{+*} .

$$\text{Prouver que : } [P\left(\frac{x_2}{x_1}\right)]^2 + [P\left(\frac{x_3}{x_2}\right)]^2 + \dots + [P\left(\frac{x_1}{x_n}\right)]^2 \geq n[P(1)]^2.$$

14) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$, avec $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

$$\text{Prouver que : } \frac{1}{n^{n-3}} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n^2 (n-1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

15) Soient A, B, C, D quatre points sur une sphère de rayon 1, tels que :

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{2^9}{3^3}.$$

Prouver que le tétraèdre $ABCD$ est régulier. (Proposé OIM 1975)

16) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$.

Prouver que :
$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) (1 - a_1) (1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$
 (Proposé OIM 1998)

Chapitre 4

Convexité

Le principe précédent se généralise dans le cas d'une fonction convexe.

Définition.

Une fonction f , définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , est dite *convexe* lorsque, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, et tous $x, y \in I$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Remarques.

a) Cela signifie que le domaine $E = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} / y \geq f(x)\}$ est convexe.

b) On dit que f est *concave* lorsque $-f$ est convexe. Et tout ce qui suit s'adapte sans difficultés du moment que l'on renverse les inégalités.

c) On prouve alors que la fonction f est convexe sur I si et seulement si les pentes des cordes de C_f sont croissantes en fonction de leurs extrémités.

Par suite, si f est dérivable sur I alors :

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I .

Et dans ce cas, C_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

d) Il en découle que si f est deux fois dérivable sur I :

La fonction f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .

e) Une fonction strictement convexe continue admet son maximum en un point non intérieur à I (en effet, si f atteint son maximum en a qui n'est pas une borne de I alors, on peut trouver une corde d'extrémités $(a - \varepsilon, f(a - \varepsilon))$ et $(a + \varepsilon, f(a + \varepsilon))$ qui n'est pas au-dessus de C_f).

Théorème 7 (Inégalité de Jensen)

Soient $n \geq 1$ un entier, et f une fonction convexe sur l'intervalle I .

Alors, pour tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, et tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Et si f est strictement convexe, l'égalité ci-dessus n'a lieu que pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Preuve

Pour $n = 1$ est évident. Le cas $n = 2$ est la définition de la convexité.

On raisonne ensuite par récurrence sur n , en remarquant que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$\text{avec } y = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Remarque.

Le théorème 6 n'est alors qu'une conséquence de la concavité de la fonction \ln sur \mathbb{R}^{+*} .

Définition.

Soient $n \geq 2$ un entier, a_1, \dots, a_n et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, des réels strictement positifs

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

On définit la fonction M sur \mathbb{R}^* par $M(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Le nombre $M(\alpha)$ est la *moyenne d'ordre α* des nombres a_i pondérée par les λ_i .

Exemples.

Dans le cas où $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$:

$$M(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \text{ est la } \textit{moyenne arithmétique} \text{ des } a_i.$$

$M(-1) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$ est la *moyenne harmonique* des a_i .

$M(2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$ est la *moyenne quadratique* des a_i .

On montre de plus que la fonction M se prolonge par continuité en 0, et

que $M(0) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$ est la *moyenne géométrique* des a_i .

Théorème 8 (Inégalités et moyennes d'ordre α).

Soient $a_1, \dots, a_n > 0$, non tous égaux, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

tous fixés. Alors :

la fonction $M : (\alpha \mapsto M(\alpha))$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c.à.d. :

Pour tous $a_1, \dots, a_n > 0$, et $\alpha < \beta$, on a : $M(\alpha) \leq M(\beta)$,

avec égalité ssi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Preuve à lire chez soi.

Si tous les a_i sont égaux, il est clair qu'alors la fonction M est constante sur \mathbb{R}^* . On suppose maintenant que les a_i ne sont pas tous égaux.

$$2) \text{ On a } \ln(M(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha \right) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

Et, puisque $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a_i^\alpha = 1$ pour tout $a_i > 0$, on a : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = 0$.

Par ailleurs, $f'(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i) a_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha}$ donc, comme ci-dessus :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f'(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(a_i) = \ln \left(\prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \right).$$

D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(M(\alpha)) = \ln \left(\prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \right)$

Ou encore : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} M(\alpha) = \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}$.

Ainsi, en posant $M(0) = \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}$, on prolonge M par continuité en 0.

Soit $\alpha > 1$.

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est alors strictement convexe sur \mathbb{R}^{+*} .

Donc : $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha > \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right)^\alpha$ (l'inégalité est stricte car les a_i ne sont pas tous égaux.)

D'où : $M(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} > \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = M(1)$.

Soient α, β dans \mathbb{R} .

1^{er} cas : si $0 < \alpha < \beta$.

Soit $t = \frac{\beta}{\alpha} > 1$. Pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, on pose $b_i = a_i^\alpha$.

D'après a), on a : $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^t \right)^{\frac{1}{t}} > \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$

C.à.d. $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\beta \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} > \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha$

ou encore $M(\beta) > M(\alpha)$ car la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} .

2^{ème} cas : si $\alpha < \beta < 0$.

Soit $t = \frac{\alpha}{\beta} > 1$. Pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, on pose $b_i = a_i^\beta$.

D'après a), on a : $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^t \right)^{\frac{1}{t}} > \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$

C.à.d. $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} > \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\beta$

ou encore $M(\beta) > M(\alpha)$ car la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\beta}}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .

Finalement, la fonction M est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} , sur \mathbb{R}^{-*} , et elle est continue en 0.

Par conséquent, elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Remarque.

Pour $\alpha > 0$:

Il y a un nombre fini de a_i . Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a_1 = \max\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

$$\text{Alors : } \ln(M(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^\alpha \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(a_1^\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \right)$$

$$\text{D'où : } \ln(M(\alpha)) = \ln(a_1) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \right)$$

Or, pour tout i , on a $0 < \frac{a_i}{a_1} \leq 1$. Donc : $0 < \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \leq 1$.

$$\text{Et } \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha = \lambda_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\ln(\lambda_1)}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \right) \leq 0.$$

On en déduit facilement que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \ln(M(\alpha)) = \ln(a_1)$

C.à.d. $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M(\alpha) = \max\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

- Pour $\alpha < 0$:

On suppose cette fois que $a_1 = \min\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

$$\text{Comme ci-dessus, on a : } \ln(M(\alpha)) = \ln(a_1) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \right),$$

avec $\frac{a_i}{a_1} \geq 1$ pour tout i . Donc $0 < \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^\alpha \leq 1$.

Et on suit le raisonnement précédent pour conclure :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} M(\alpha) = \min\{a_1; a_2; \dots; a_n\}.$$

Finalemnt :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M(\alpha) = \max\{a_1; a_2; \dots; a_n\} \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} M(\alpha) = \min\{a_1; a_2; \dots; a_n\}.$$

Et comme, la fonction M est strictement croissante sur \mathbb{R} , on a donc :

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\min\{a_1; a_2; \dots; a_n\} < M(\alpha) < \max\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

Conséquence

Pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas :

$$\min\{a_1; a_2; \dots; a_n\} < M(-1) < M(0) < M(1) < M(2) < \max\{a_1; a_2; \dots; a_n\}.$$

Ou encore :

$$\min\{a_1; \dots; a_n\} \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \leq \max\{a_1; \dots; a_n\}$$

Avec égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Application 1

Soient trois réels a, b, c strictement positifs tels que $a + b + c = 1$.

$$\text{Démontrer que } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Solution

La fonction $(x \mapsto x^2)$ est convexe donc, d'après l'inégalité de Jensen,

on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \right] &\geq \left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{(abc)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \text{ d'après IAG} \\ &\geq \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{a+b+c} \right)^2 \text{ d'après IAG} \\ &= \left(\frac{1}{3} + 3 \right)^2 \\ &= \frac{100}{9} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Application 2

Soient A, B, C les angles d'un triangle.

Prouver que :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Solution

La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$ donc, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \left(\frac{A + B + C}{3} \right) = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

avec égalité ssi le triangle est équilatéral.

La fonction cos n'est ni concave ni convexe sur $[0, \pi]$. On ne peut donc conclure ainsi dans le cas général. Cependant :

Par symétrie des rôles, on peut supposer que $A \geq B \geq C$.

- Si $A \leq \frac{\pi}{2}$.

Puisque cos est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3 \cos \frac{A + B + C}{3} = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2},$$

avec égalité ssi le triangle est équilatéral.

- Si $A > \frac{\pi}{2}$: alors $\frac{\pi}{2} > B \geq C$.

Et donc, puisque cos est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\cos B + \cos C \leq 2 \cos \left(\frac{B + C}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = 2 \sin \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \cos A + \cos B + \cos C &\leq \cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \\ &= -2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} + 1 \\ &= -2 \left(\sin \left(\frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \\ &< \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

l'inégalité étant stricte car $\frac{A}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ et donc $\sin \left(\frac{A}{2} \right) \neq \frac{1}{2}$.

Finalement : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, avec égalité ssi le triangle est équilatéral.

Application 3

Prouver que, pour tous $a, b, c > 0$: $\frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6$.

Solution

D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et quadratique :

$$\frac{a + 2b + 3c}{6} \leq \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{6}}, \text{ c.à.d. } \frac{(a + 2b + 3c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6.$$

PROBLÈMES

1) Déterminer la plus petite constante M telle que :

$$\text{pour tous } a, b > 0 : a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \leq M (a + b)^{\frac{1}{3}}.$$

2) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

$$\text{Prouver que : } \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

3) Soient $a, b > 0$, et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Prouver que : } \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}. \text{ (Autriche 2000)}$$

4) Prouver que, pour tous réels $\lambda \geq 8$ et $a, b, c > 0$, on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1 + \lambda}}. \text{ (D'après OIM 2001)}$$

5) Soient a, b, c dans $[0, 1]$.

$$\text{Prouver que : } \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1. \\ \text{(USA 1980)}$$

6) Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $\alpha, t \in [1; +\infty[$, et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$.

Soient a_1, a_2, \dots, a_n dans \mathbb{R}^{+*} tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

$$\text{Prouver que : } \sum_{i=1}^n \left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta}\right)^t \geq n \left(\frac{1}{n^\alpha} + n^\beta\right)^t$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

7) Soient $0 < p \leq a, b, c, d, e \leq q$.

$$\text{Prouver que : } (a + b + c + d + e) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2. \\ \text{(USA 1977).}$$

8) Pour $n \geq 1$ entier fixé, déterminer la plus petite valeur de la somme

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \dots + \frac{x_n^n}{n}$$

lorsque x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n$.

(Pologne 1995)

9) Soient $a, b \geq 0$, et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prouver que : $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

10) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$.

Prouver que : $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + 1} \geq \frac{n}{1 + (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ (Proposé

OIM 98)

11) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ tels que $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

Prouver que : $\sum_{i=1}^4 x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^4 x_i, \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i}\right\}$. (Iran 1998)

12) Soient $x, y, z \geq 0$.

Prouver que : $8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy)$.

13) Soient $n > 1$, et $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Prouver que : $\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$.

14) Soient α, β, γ les angles d'un triangle, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Prouver que :

$$\cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 3^{n+1}.$$

15) Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer le minimum de

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}$$

lorsque $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. (Turquie 1997)

Chapitre 5

Inégalités symétriques ou cycliques

I Les polynômes symétriques

Définition.

Soient a_1, a_2, \dots, a_n des réels.

Les coefficients c_1, c_2, \dots, c_n du polynôme

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k}$$

sont appelés les *fonctions symétriques élémentaires* des a_i .

Ainsi : c_k est la somme des produits des a_i choisis k à la fois.

On a donc :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \sum_{i=1}^n a_i \\ c_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \\ &\dots \\ c_n &= a_1 a_2 \dots a_n. \end{aligned}$$

L'intérêt de ces fonctions est que l'on démontre que tout polynôme symétrique en a_1, a_2, \dots, a_n peut s'exprimer (de façon unique) comme un polynôme en c_1, c_2, \dots, c_n .

Parfois, il est plus commode de considérer les *fonctions symétriques élémentaires moyennes* définies par :

$$p_k = \frac{1}{\binom{n}{k}} c_k = \frac{k! (n-k)!}{n!} c_k, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n.$$

Théorème 9 (Inégalités de Newton)

Soient $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} > 0$.

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a :

$$p_{k-1} p_{k+1} \leq p_k^2,$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Preuve

Par récurrence sur n .

- Pour $n = 2$: On a $p_0 p_2 = a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$ d'après le chapitre 1.

- Soit $n > 2$ fixé. Supposons que le théorème soit vrai pour tous réels $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1} > 0$.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. S'ils sont tous égaux, on a clairement l'égalité.

Sinon, on peut supposer que a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ne sont pas tous égaux.

On note c'_i, p'_i les valeurs correspondant aux a_j , et on pose

$$c'_{-1} = p'_{-1} = c'_n = p'_n = 0.$$

Alors, pour $i = 0, 1, \dots, n$, on a :

$$c_i = c'_i + a_n c'_{i-1}, \text{ et donc } p_i = \frac{n-i}{n} p'_i + \frac{i}{n} a_n p'_{i-1}.$$

Par suite : $n^2 (p_{k-1} p_{k+1} - p_k^2) = A + B a_n + C a_n^2$, avec :

$$A = ((n-k)^2 - 1) p'_{k-1} p'_{k+1} - (n-k)^2 (p'_k)^2$$

$$B = (n-k+1)(k+1) p'_{k-1} p'_k + (n-k-1)(k-1) p'_{k-2} p'_{k+1} - 2k(n-k) p'_{k-1} p'_k$$

$$C = (k^2 - 1) p'_{k-2} p'_k - k^2 (p'_{k-1})^2.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$p'_{k-1} p'_{k+1} < (p'_k)^2, p'_{k-2} p'_k < (p'_{k-1})^2,$$

$$\text{et } p'_{k-2} p'_{k-1} p'_k p'_{k+1} < (p'_{k-1} p'_k)^2 \text{ donc } p'_{k-2} p'_{k+1} < p'_{k-1} p'_k.$$

$$\text{Par suite : } A < -(p'_k)^2, B < 2p'_{k-1} p'_k, \text{ et } C < -(p'_{k-1})^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Et ainsi } n^2 (p_{k-1} p_{k+1} - p_k^2) &< -(p'_k)^2 + 2p'_{k-1} p'_k a_n - (p'_{k-1})^2 a_n^2 \\ &= -(p'_k - p'_{k-1} a_n)^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque.

En fait, ces inégalités restent valables même si l'on ne suppose plus que les a_i sont positifs.

Théorème 10 (Inégalités de Mac Laurin)

Si $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, alors on a :

$$p_1 \geq (p_2)^{\frac{1}{2}} \geq \dots \geq (p_k)^{\frac{1}{k}} \geq \dots \geq (p_n)^{\frac{1}{n}},$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Preuve

Si $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, et d'après les inégalités de Newton, pour $1 \leq k < n$, on a :

$$p_k^{k-1} p_{k+1}^k \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{2i} = (p_0 p_2) (p_1 p_3)^2 (p_2 p_4)^3 \dots (p_{k-1} p_{k+1})^k$$

$$\leq \prod_{i=1}^k p_i^{2i}$$

D'où $p_k^{k-1} p_{k+1}^k \leq p_k^{2k}$, c.à.d. $p_{k+1}^k \leq p_k^{k+1}$.

Avec égalité si et seulement si il y a égalité dans les inégalités de Newton.

Application 1

Soient $a, b, c, d > 0$. On pose :

$u = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ et $v = abc + abd + acd + bcd$.

Prouver que : $\left(\frac{u}{6}\right)^3 \geq \left(\frac{v}{4}\right)^2$. (Allemagne)

Solution

Avec les notations du chapitre, l'inégalité désirée s'écrit : $p_2^3 \geq p_3^2$ ou encore $(p_2)^{\frac{1}{2}} \geq (p_3)^{\frac{1}{3}}$, qui est une des inégalités de Mac-Laurin.

Application 2

Soient $a, b, c, d > 0$.

Prouver que :

$$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}\right) \leq \frac{3}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2.$$

Solution

L'inégalité désirée est équivalente (multiplication par $(abcd)^2$) à :

$$abcd(cd + bd + bc + ad + ac + ab) \leq \frac{3}{8}(bcd + acd + abd + abc)^2$$

$$\text{ou encore : } abcd \left(\frac{cd + bd + bc + ad + ac + ab}{6} \right) \leq \left(\frac{bcd + acd + abd + abc}{4} \right)^2$$

c.à.d. $p_4 p_2 \leq p_3^2$, qui est une des inégalités de Newton.

II Les inégalités homogènes

Il s'agit ici d'étudier les inégalités du type $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, où P est un polynôme homogène symétrique.

Soit $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polynôme.

On notera $\sum_{\text{sym.}} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, où σ décrit

l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Il y a donc $n!$ termes dans cette somme.

$$\text{Par exemple : } \sum_{\text{sym.}} x^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$\sum_{\text{sym.}} x^2 y = x^2 y + x y^2 + x^2 z + x z^2 + y^2 z + z^2 y.$$

$$\sum_{\text{sym.}} xyz = 6xyz.$$

Définition.

On dit que la suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *major*e la suite $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ lorsque :

- a) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ et $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$
- b) $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$
- c) $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$.

Théorème 11 (Domination - Inégalité de Muirhead).

Si α et β sont deux suites de réels positifs ou nuls, et que α *major*e β , alors pour tous réels x_1, x_2, \dots, x_n strictement positifs, on a :

$$\sum_{\text{sym.}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym.}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n},$$

avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta$ ou $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Idée de la démonstration.

Dans les conditions du théorème, on s'appuie sur le lemme suivant [cf.1] :

Si α majore β alors, à chaque permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, on peut associer un réel $k_\sigma \geq 0$ tel que :

$$\sum_{\sigma} k_{\sigma} = 1 \text{ et } \sum_{\sigma} k_{\sigma} (\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Il suffit alors d'utiliser l'IAG pondérée. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} x_1^{\alpha_{\sigma(1)}} x_2^{\alpha_{\sigma(2)}} \dots x_n^{\alpha_{\sigma(n)}} &= \sum_{\sigma, \pi} k_{\pi} x_1^{\alpha_{\sigma(\pi(1))}} x_2^{\alpha_{\sigma(\pi(2))}} \dots x_n^{\alpha_{\sigma(\pi(n))}} \\ &\geq \sum_{\sigma} x_1^{\sum k_{\pi} \alpha_{\sigma(\pi(1))}} x_2^{\sum k_{\pi} \alpha_{\sigma(\pi(2))}} \dots x_n^{\sum k_{\pi} \alpha_{\sigma(\pi(n))}} \\ &= \sum_{\sigma} x_1^{\beta_{\sigma(1)}} x_2^{\beta_{\sigma(2)}} \dots x_n^{\beta_{\sigma(n)}}. \end{aligned}$$

Remarques.

Par exemple : $\sum_{\text{sym.}} x^5 y^2 z \geq \sum_{\text{sym.}} x^4 y^2 z^2$, ou aussi $\sum_{\text{sym.}} x^3 y^2 \geq \sum_{\text{sym.}} x^2 y^2 z \dots$

Application 3

Soient $a, b, c, d > 0$.

Prouver que :

$$\frac{3}{2} (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq ad\sqrt{bc} + bd\sqrt{ac} + cd\sqrt{ab} + bc\sqrt{ad} + ab\sqrt{cd} + ac\sqrt{bd}.$$

Solution

L'inégalité désirée se réécrit : $\sum_{\text{sym.}} a^3 \geq \sum_{\text{sym.}} ab\sqrt{cd}$ (dans le membre

de gauche a^3 apparaît 6 fois, qui est le nombre permutations de (b, c, d) , alors qu'à droite $ab\sqrt{cd}$ apparaît 4 fois, deux permutations de (a, b) et deux permutations de (c, d) donnent ce terme).

En considérant les suites d'exposants $\alpha = (3, 0, 0, 0)$ et $\beta = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on constate que α majore β , et donc l'inégalité n'est qu'une conséquence directe de l'inégalité de Muirhead.

Application 4

Soient $a, b, c > 0$.

Prouver que : $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$. (USA 1997)

Solution

Première méthode.

On élimine les dénominateurs et on multiplie par 2. L'inégalité désirée est alors équivalente à :

$$\sum_{\text{sym.}} (a^3 + b^3 + abc) (b^3 + c^3 + abc) abc \leq 2 (a^3 + b^3 + abc) (b^3 + c^3 + abc) (c^3 + a^3 + abc)$$

ou encore, en développant :

$$\sum_{\text{sym.}} (a^7 bc + 3a^4 b^4 c + 4a^5 b^2 c^2 + a^3 b^3 c^3) \leq \sum_{\text{sym.}} (a^3 b^3 c^3 + 2a^6 b^3 + 3a^4 b^4 c + a^7 bc + 2a^5 b^2 c^2)$$

c.à.d. $\sum_{\text{sym.}} (2a^6 b^3 - 2a^5 b^2 c^2) \geq 0$, qui est une conséquence directe de

l'inégalité de Muirhead car $(6, 3, 0)$ majore $(5, 2, 2)$.

Deuxième méthode.

On a $(a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$ donc $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, avec égalité ssi $a = b$.
(On aurait pu aussi utiliser l'inégalité du réordonnement, en signalant que les suites (a^2, b^2) et (a, b) sont ordonnées dans le même sens.)

Et donc $a^3 + b^3 \geq a^2 b + b^2 a$

Il en découle que : $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b) + abc} = \frac{c}{abc(a + b + c)}$.

De même : $\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a + b + c)}$ et $\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a + b + c)}$.

En sommant, il vient :

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{c + b + a}{abc(a + b + c)} = \frac{1}{abc},$$

avec égalité ssi $a = b = c$.

Théorème 12 (Inégalité de Schur)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $a, b, c > 0$, on a :

$$a^t (a - b)(a - c) + b^t (b - c)(b - a) + c^t (c - a)(c - b) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$.

Preuve

L'inégalité est symétrique en a, b, c , donc :

- si $t \geq 0$, on peut toujours supposer que $a \geq b \geq c > 0$

- si $t < 0$, on peut toujours supposer que $0 < a \leq b \leq c$.

Dans les deux cas, on a :

$$a^t (a - b) (a - c) \geq b^t (b - c) (a - b) \text{ et } c^t (c - a) (c - b) \geq 0.$$

Le résultat en découle par somme.

Application 5

Soient $a, b, c > 0$. Prouver que :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Solution

L'inégalité désirée est équivalente à :

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0.$$

C'est l'inégalité de Schur dans les cas $t = 1$.

L'égalité a lieu ssi $a = b = c$.

Remarque.

L'inégalité de Schur s'écrit donc :
$$\sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2}a^3 - a^2b + \frac{1}{2}abc \right) \geq 0.$$

Application 6

Avec les notations ci-dessus, prouver que dans le cas $n = 3$:

$$3p_1^3 + p_3 \geq 4p_1p_2.$$

Solution

L'inégalité $3p_1^3 + p_3 \geq 4p_1p_2$ s'écrit :

$$3 \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^3 + abc \geq 4 \left(\frac{a + b + c}{3} \right) \left(\frac{ab + bc + ca}{3} \right)$$

$$\text{ou encore : } (a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

C.à.d. après développement :

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0.$$

C'est l'inégalité de Schur dans les cas $t = 1$.

L'égalité a lieu ssi $a = b = c$.

PROBLÈMES

1) Soit $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$, un polynôme à coefficients

réels et positifs ou nuls, avec n racines réelles.

Prouver que, pour tout $x \geq 0$, on a $P(x) \geq (x+1)^n$. (Hongrie 1983)

2) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, et S_k la somme des produits des a_i pris k à la fois. Prouver que :

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \dots a_n. \text{ (Olympiade du Pacifique asiatique 1990).}$$

3) Prouver que, pour tous réels a, b, c , on a :

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

(Proposé OIM 1990)

4) Soient $a, b, c > 0$, avec $abc = 1$.

$$\text{Prouver que : } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \text{ (OIM 1995)}$$

5) Soient $a, b, c, d > 0$.

$$\text{Prouver que : } \frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

(Proposé OIM 1993)

6) Soient $a, b, c > 0$. Prouver que :

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ et } \frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c.$$

7) Soient $x, y, z > 0$.

$$\text{Prouver que : } (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}. \text{ (Iran 1996)}$$

8) Soient $a, b, c > 0$.

$$\text{Prouver que : } \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}. \text{ (Japon 1997)}$$

9) Soient $a, b, c \geq 0$, avec $a+b+c=1$. Prouver que :

$$ab + bc + ca \leq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc.$$

Chapitre 6

Les inégalités géométriques

Au chapitre 1, nous avons déjà rencontré l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dont on a signalé l'interprétation géométrique). On donne ici deux autres inégalités célèbres :

Théorème 13 (Inégalité de Hölder)

Soient p, q dans \mathbb{R}^{+*} tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels. Alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

avec égalité ssi les vecteurs $\vec{u} (a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)$ et $\vec{v} (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$ sont colinéaires et que les nombres $a_i b_i$ sont soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.

Preuve

Soient $u = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et $v = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

D'après l'exercice 9-chapitre 4, pour tout i , on a :

$$\frac{a_i}{u} \times \frac{b_i}{v} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{a_i}{u} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{b_i}{v} \right)^q$$

En sommant ces relations et en multipliant par uv , on obtient l'inégalité de Hölder.

Remarque.

Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 14 (Inégalité de Minkowski)

Soient $p \in [1; +\infty[$, et x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels.

Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec égalité ssi les vecteurs $\vec{u} (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $\vec{v} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sont colinéaires de même sens.

Preuve

Soit $q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $(p-1)q = p$.

Pour tout i , on a : $|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i|$
 $\leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$

En sommant, il vient :

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| |x_i + y_i|^{p-1}) + \sum_{i=1}^n (|y_i| |x_i + y_i|^{p-1})$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| |x_i + y_i|^{p-1}) &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

De même :

$$\sum_{i=1}^n (|y_i| |x_i + y_i|^{p-1}) \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Et ainsi :

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{D'où : } \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{c.à.d. } \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque.

On se place dans l'espace euclidien usuel. Si $M(x_1, x_2, x_3)$ et $P(y_1, y_2, y_3)$,

$$\text{on pose : } d_p(M, P) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'inégalité de Minkowski signifie que d_p vérifie l'inégalité triangulaire :

$$d_p(A, B) \leq d_p(A, C) + d_p(C, B), \text{ pour tous points } A, B, C.$$

Ce qui permet de prouver que d_p est une *distance*.

PROBLÈMES

1) Soient $x, y, z > 0$.

Prouver que :

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} (x + z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}} + (y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}} (y + x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}} + (z^2 + x^2)^{\frac{1}{3}} (z + y)^{\frac{2}{3}}} \leq 1.$$

2) Soient a, b, c, d des réels. Déterminer le minimum de :

$$S = \sqrt{(a+1)^2 + 2(b-2)^2 + (c+3)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + 2(c-2)^2 + (d+3)^2} \\ + \sqrt{(c+1)^2 + 2(d-2)^2 + (a+3)^2} + \sqrt{(d+1)^2 + 2(a-2)^2 + (b+3)^2}.$$

Chapitre 7

Des idées utiles

I Où a lieu l'égalité ?

Trouver un cas d'égalité dans l'inégalité étudiée donne parfois une indication sur le type d'inégalités de références à utiliser. La plupart des inégalités présentées ici sont des égalités si et seulement si les variables sont égales. Donc, si par exemple l'égalité a lieu aux extrémités de l'intervalle d'étude (et à ce sujet, il peut être judicieux de faire tendre une ou plusieurs variables vers ces extrémités, même dans le cas d'un intervalle ouvert, ou si l'inégalité étudiée est une inégalité stricte), il paraît peu probable que le résultat cherché provienne de ces inégalités de références.

Par contre, il a déjà été signalé qu'une fonction affine atteint ses bornes aux extrémités de l'intervalle d'étude. Et, plus généralement, qu'une fonction convexe (resp. concave) atteint son maximum (resp. minimum) aux bornes de l'intervalle d'étude. Si cela n'est pas exploitable, il reste toujours possible de procéder par récurrence (sur le nombre de variables), ou à une étude de fonctions (dérivée, variations...).

II Changement de variables

Il est toujours possible de procéder à un changement de variables pour :

- Simplifier l'expression étudiée.

Attention, il faut alors tenir compte de la contrainte éventuelle portant

sur les variables de départ.

- Simplifier la contrainte.

Donnons deux exemples importants :

1) Si les variables sont les longueurs a, b, c des côtés d'un triangle.

La triple contrainte $\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a \\ c + a > b \end{cases}$ peut être neutralisée par le changement

de variables $\begin{cases} x = a + b - c \\ y = b + c - a \\ z = c + a - b \end{cases}$ c.à.d. $\begin{cases} a = \frac{x + z}{2} \\ b = \frac{x + y}{2} \\ c = \frac{y + z}{2} \end{cases}$.

Notons qu'alors x, y, z sont seulement supposés strictement positifs.

1) Si la contrainte est $a + b + c = abc$, avec $a, b, c > 0$.

C'est souvent la porte ouverte au changement de variables : $\begin{cases} a = \tan \alpha \\ b = \tan \beta \\ c = \tan \gamma \end{cases}$.

Notons qu'alors α, β, γ peuvent être considérés comme les angles d'un triangle aigu, c.à.d. $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

III Briser ou créer une symétrie

- Si l'expression est symétrique, on peut ordonner les variables. Cela donne des possibilités supplémentaires dans la gestion des calculs, ou permet, par exemple, d'envisager l'utilisation de l'inégalité du réordonnement ou de l'inégalité de Chebyshev

- Si l'expression est cyclique, ordonner les variables n'est plus possible. Par contre, on peut toujours choisir celle des variables qui sera la plus petite de toutes (ou la plus grande, mais probablement pas imposer les deux à la fois).

- Si l'expression est homogène, on peut toujours *normaliser* le problème

en imposant une contrainte du type $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ou $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. Dans le

premier cas, on se met alors en situation d'utiliser les inégalités type Jensen.

Notons qu'inversement, on peut parfois rendre une inégalité homogène en utilisant la contrainte de façon judicieuse. Ce qui prépare à une utilisation de l'inégalité de Muirhead.

Exemple

Soient $x, y, z > 1$.

Prouver que : $x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+x+zx}$.

(Proposé USA 1999)

Solution

L'inégalité proposée est équivalente à :

$$(x^2 + 2yz) \ln x + (y^2 + 2zx) \ln y + (z^2 + 2xy) \ln z \\ \geq (xy + yz + x + zx) (\ln x + \ln y + \ln z)$$

c.à.d.

$$(x - y)(x - z) \ln x + (y - z)(y - x) \ln y + (z - x)(z - y) \ln z \geq 0.$$

Notons que $\ln x, \ln y, \ln z > 0$ car $x, y, z > 1$.

La dernière inégalité étant symétrique, on peut supposer que $x \geq y \geq z$.

Alors $(z - x)(z - y) \ln z \geq 0$. De plus, puisque la fonction \ln est croissante sur \mathbb{R}^{+*} , on a $(x - y)(x - z) \ln x \geq (y - z)(x - y) \ln y$, car chaque facteur est positif ou nul, et que chaque facteur du membre de gauche est majoré par un facteur différent dans le membre de droite.

L'inégalité désirée découle directement de ces deux inégalités.

IV - Majorer (resp. minorer) chaque terme de façon symétrique.

Si l'un des membres d'une inégalité symétrique une somme de termes symétriques en les variables, on peut tenter de travailler sur chacun de ces termes individuellement.

Exemple

Soient $a, b, c > 0$, avec $abc = 1$.

Prouver que : $\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$. (Proposé OIM 1996)

Solution

On a :

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$= (a+b) [(a-b)(a^3-b^3) + a^2b^2] \\ \geq (a+b)a^2b^2, \text{ car } (a-b)(a^3-b^3) \geq 0.$$

$$\text{Donc : } \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{(a+b)a^2b^2+ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{1}{ab(a+b+c)} =$$

$$\frac{c}{a+b+c}$$

On procède de même pour les autres termes. Alors :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} \\ = 1.$$

Et l'égalité a lieu ssi $a = b = c$.

IV Manipuler avec adresse

Ne jamais oublier que certaines inégalités ne nécessitent aucune connaissances particulières, et peuvent s'obtenir par des manipulations algébriques directes.

Exemple

Soient a, b, c les longueurs d'un triangle.

Prouver que : $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$, et déterminer les cas d'égalité. (OIM 1983)

Solution

Soit $f(a, b, c) = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$.

On vérifie facilement que f est invariante par permutation cyclique de (a, b, c) . On peut donc supposer que $a = \max(a, b, c)$.

Mais alors $f(a, b, c) = a(b-c)^2(b+c-a) + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \geq 0$.

D'où la conclusion, avec égalité ssi $a = b = c$.

PROBLÈMES

1)a) Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels appartenant à $\{-1; 0; 1\}$.

Quel est le minimum de $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$?

b) Reprendre le problème avec $x_i \in [-1; 1]$, pour tout i .

2) Prouver que si $a, b, c > 0$ alors

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

3) Soient $a, b, c > 0$ tels que $a + b + c = abc$.

Prouver que : $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$. (Corée 1998)

4) Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} = 1$.

Prouver que : $\prod_{i=1}^{n+1} x_i \geq n^{n+1}$.

5) Soient $a, b, c > 0$ tels que $a + b + c = abc$.

Prouver que : $\max(a, b, c) \geq \sqrt{3}$.

6) Soit $n \geq 2$ un entier.

a) Déterminer la plus petite constante C telle que, pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, on ait :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4.$$

b) Pour cette constante C , déterminer les cas d'égalité. (OIM 1999)

7) Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$.

Prouver que : $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$. (OIM 2000)

8) Soient $a, b, c > 0$.

Prouver que, pour tout réels $\lambda > 3$, on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} < 2. \text{ (D'après OIM 2001)}$$

Chapitre 8

Solutions

Chapitre 1

1) On a :

$$0 \leq (x - \sqrt{y^2 + 1})^2 + (y - \sqrt{x^2 + 1})^2$$

d'où $x^2 + y^2 + 1 \geq x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

L'égalité n'ayant lieu que si $\begin{cases} x = \sqrt{y^2 + 1} \\ y = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$, et donc $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2$,

cette impossibilité assure l'inégalité stricte.

2) On a : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca} = 8abc$

De plus : $a \geq \sqrt{a^2 - (b - c)^2} = \sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c}$

De même $b \geq \sqrt{b + a - c}\sqrt{b + c - a}$ et $c \geq \sqrt{c + a - b}\sqrt{c + b - a}$

Ainsi : $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

D'où le résultat.

3) Pour i fixé :

$$n |a_i| = |(n-1)a_i - (-a_i)| = \left| \sum_{i \neq j} (a_i - a_j) \right| \leq \sum_{i \neq j} |a_i - a_j|$$

En sommant sur i , il vient :

$$n \sum_{i=1}^n |a_i| \leq 2 \sum_{i < j} |a_i - a_j|, \text{ d'où la conclusion.}$$

Notons que pour $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = x$ et $a_n = (n-1)x$, on a l'égalité, ce qui assure que $\frac{n}{2}$ ne peut être remplacé par une valeur plus grande.

4) D'après C.S., on a : $\left(\sum_{i=1}^n \frac{s}{s-a_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{s-a_i}{s}\right) \geq n^2$.

Or : $\sum_{i=1}^n \frac{s-a_i}{s} = \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n a_i = n - 1$, d'où $\sum_{i=1}^n \frac{s}{s-a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$.

D'autre part : $\sum_{i=1}^n \frac{s-a_i}{a_i} = -n + \sum_{i=1}^n \frac{s}{a_i}$

Or, comme ci-dessus : $\left(\sum_{i=1}^n \frac{s}{a_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s}\right) \geq n^2$ avec $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s} = 1$.

Ainsi : $\sum_{i=1}^n \frac{s-a_i}{a_i} \geq -n + n^2 = n(n-1)$.

Enfin : $\left(\sum_{i=1}^n 1\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$, donc $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \geq \frac{s^2}{n}$.

Or : $\left(\sum_{i=1}^n [a_i(s-a_i)]\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = s^2$

donc : $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{s^2}{s \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i^2} \geq \frac{s^2}{s^2 - \frac{s^2}{n}} = \frac{n}{n-1}$.

5) L'inégalité proposée est équivalente à :

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0, \text{ qui est triviale.}$$

Notons que l'égalité a lieu ssi $x = y = z$.

6) L'inégalité de gauche est équivalente à :

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\text{c.à.d. } \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.$$

D'où le résultat, avec égalité ssi $a = b = c$.

Notons que la conclusion reste vraie pour $a, b, c > 0$ quelconques.

Comme a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a :

$$|a-b| < c, |b-c| < a, \text{ et } |c-a| < b.$$

Alors :

$$4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 = c^2 - (a-b)^2 + a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 > 0.$$

7) On pose $x = a + b - c, y = b + c - a, z = c + a - b$.

Alors $x, y, z > 0$ et $a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{y+x}{2}, c = \frac{z+y}{2}$.

Notons que : $2(x+y) \geq x+y+2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$, avec égalité ssi $x = y$.

Ainsi :

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{b}.$$

De même : $\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}$

et $\sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq 2\sqrt{a}$.

En sommant, on obtient l'inégalité désirée.

L'égalité ayant lieu ssi $x = y = z$, c.à.d. $a = b = c$.

8) Posons $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.

Alors $a, b, c > 0$. Et on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} &= \frac{(a-b)c}{b} + \frac{(b-c)a}{c} + \frac{(c-a)b}{a} \\ &= \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c \end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{2} \left(\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \right) = a \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq a$ avec égalité ssi $b = c$.

De même : $\frac{1}{2} \left(\frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right) \geq c$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} \right) \geq b$.

En sommant, on obtient $\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c \geq 0$.

Ce qui assure la conclusion.

Notons que l'égalité a lieu ssi $a = b = c$, c.à.d. $x = y = z$.

9) supposons tout d'abord que chaque facteur du membre de gauche soit positif ou nul.

$$\text{On a : } b - 1 + \frac{1}{c} = b \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} \right) = b \left(1 + a - \frac{1}{b} \right).$$

$$\text{Par suite : } \left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) = b \left(a^2 - \left(1 - \frac{1}{b} \right)^2 \right) \leq ba^2.$$

En procédant de même pour les autres facteurs, il vient :

$$\left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) \leq cb^2 \text{ et } \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) \left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \leq ac^2.$$

$$\text{D'où } \left[\left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) \right]^2 \leq (abc)^2 = 1.$$

et on a l'inégalité désirée.

Si, par exemple, $a - 1 + \frac{1}{b} < 0$ alors $a < 1$ et $b > 1$.

Dans ces conditions, on a alors : $b - 1 + \frac{1}{c} > 0$ et $c - 1 + \frac{1}{a} > 0$.

Ainsi, un seul des facteurs est négatif, et on a alors clairement la conclusion.

10) D'après C.S., pour tout i , on a : $S_2 - a_i^2 \geq \frac{1}{n-1} (S_1 - a_i)^2$

Par suite : $\frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_i} \geq \frac{1}{n-1} (S_1 - a_i)$

et donc $\sum_{k=1}^n \frac{S_2 - a_k^2}{S_1 - a_k} \geq \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (S_1 - a_k) = S_1$.

11)a) Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

Il suffit alors de prouver que $a_1 + a_2 > a_3$.

Or : $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$ est équivalente à :

$(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) > 0$.

Puisque trois des facteurs sont clairement positifs, il en est du même du quatrième. D'où la conclusion.

b) Première méthode.

Le cas $n = 3$ a été prouvé au a). On suppose donc que $n \geq 4$.

Par symétrie des rôles, il suffit alors de prouver que a_1, a_2, a_3 sont les longueurs des côtés d'un triangle.

Or, d'après l'énoncé et C.S. :

$$\begin{aligned} (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) &< (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \sum_{k=4}^n a_k^4 \right)^2 \\ &\leq (n-1) \left(\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} + \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} + \sum_{k=4}^n a_k^4 \right) \end{aligned}$$

D'où $2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$, et le a) permet de conclure.

Deuxième méthode.

Par récurrence sur n . Le cas $n = 3$ a été prouvé au a).

Soit $n \geq 3$ fixé, pour lequel on suppose la propriété vraie.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} > 0$ tels que : $n \sum_{k=1}^{n+1} a_k^4 < \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right)^2$.

C.à.d. $(n-1) a_{n+1}^4 - 2a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + n \sum_{k=1}^n a_k^4 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 < 0$.

Considérant cette inégalité comme une inéquation du second degré en a_{n+1}^2 , de coefficient dominant strictement positif, il faut donc que le discriminant soit strictement positif.

Or : $\Delta = 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 - 4(n-1) \left(n \sum_{k=1}^n a_k^4 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \right)$

Ainsi $\Delta > 0$ implique $\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 > (n-1) \sum_{k=1}^n a_k^4$.

L'hypothèse de récurrence assure alors que, pour $1 \leq i < j < k \leq n$, les nombres a_i, a_j, a_k sont les longueurs des côtés d'un triangle. Par symétrie des rôles, cela est aussi vrai pour $1 \leq i < j < k \leq n+1$.

Ce qui assure la conclusion.

12) Soit $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^{+*} / a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^3\}$ et f la fonction

définie sur E par $f(a, b, c, d) = \frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} - 1$.

Il est facile de voir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$:

$(a, b, c, d) \in E$ et $f(a, b, c, d) \geq 0$ si et seulement si $(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d) \in E$ et $f(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d) \geq 0$.

Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $(a, b, c, d) \in E$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors : $c^2 + d^2 = 1$.

D'après C.S., il vient : $\left(\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \right) (ac + bd) \geq (c^2 + d^2)^2 = 1$.

Or : $ac + bd \leq \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 1$.

Et ainsi : $\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq \frac{1}{ac + bd} \geq 1$.

13) D'après C.S., il vient :

$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z} \sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}}$

Or : $\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$.

D'où la conclusion.

L'égalité a lieu ssi $\frac{x-1}{x^2} = \frac{y-1}{y^2} = \frac{z-1}{z^2}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

c.à.d. $x = y = z = \frac{3}{2}$.

14) Posons $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$.

La contrainte $xyz \geq xy + yz + zx$, s'écrit aussi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$.

Elle conduit donc à $a + b + c \leq 1$.

D'autre part $xyz \geq 3(x + y + z)$ est équivalente à :

$ab + bc + ca \leq 1$.

Or : $1 \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

Et, d'après C.S., on a : $ab + bc + ca \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$

c.à.d. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Ainsi : $1 \geq 3(ab + bc + ca)$, d'où la conclusion.

Chapitre 2

1) L'inégalité souhaitée est équivalente à : $\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$, qui découle directement de l'inégalité du réordonnement.

2) Soit $n \geq 1$.

D'après l'inégalité du réordonnement, on a $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2}$ minimale lorsque

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Or, dans ces conditions, puisque les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont des entiers strictement positifs deux à deux distincts, on a facilement $a_i \geq i$ pour

tout i . Et alors $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

3) Posons $a_{n+1} = a_1$.

Première méthode.

L'inégalité du réordonnement conduit directement à :

$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i} = \sum_{i=1}^n a_i$, d'où la conclusion.

Deuxième méthode.

D'après C.S. :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_{i+1}} \frac{a_i}{\sqrt{a_{i+1}}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \right)$$

et donc $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n a_i$.

Troisième méthode.

D'après I.A.G., pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\frac{a_i^2}{a_{i+1}} + a_{i+1} \geq 2a_i$.

En sommant, il vient : $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^n a_{i+1} \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i$.

Et comme $\sum_{i=1}^n a_{i+1} = \sum_{i=1}^n a_i$, on a : $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n a_i$.

4) Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a \geq b \geq c$.

Alors $a^n \geq b^n \geq c^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

D'après l'inégalité du réordonnement, on a :

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{a+b} + \frac{b^n}{b+c} + \frac{c^n}{c+a}$$

$$\text{et } \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{c+a} + \frac{b^n}{a+b} + \frac{c^n}{b+c}.$$

En sommant, il vient :

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a^n + b^n}{a+b} + \frac{b^n + c^n}{b+c} + \frac{c^n + a^n}{c+a} \right)$$

De plus, d'après l'inégalité de Chebyshev :

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2} (a^{n-1} + b^{n-1}) (a+b), \text{ d'où } \frac{a^n + b^n}{a+b} \geq \frac{1}{2} (a^{n-1} + b^{n-1}).$$

$$\text{De même : } \frac{b^n + c^n}{b+c} \geq \frac{1}{2} (b^{n-1} + c^{n-1}) \text{ et } \frac{c^n + a^n}{c+a} \geq \frac{1}{2} (c^{n-1} + a^{n-1})$$

$$\text{et ainsi, en sommant : } \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

5) Par symétrie des rôles, on peut supposer que la suite (x_i) est croissante.

Alors la suite $(\ln x_i)$ l'est également. L'inégalité de Chebyshev conduit à :

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)$$

$$\text{c.à.d. } \prod_{i=1}^n x_i^{x_i} \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}.$$

6) Par symétrie des rôles, on peut supposer que $x \leq y \leq z$.

$$\text{Alors } \frac{1}{(1+y)(1+z)} \leq \frac{1}{(1+z)(1+x)} \leq \frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

D'après l'inégalité de Chebyshev, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} &\geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \left[\frac{1}{(1+y)(1+z)} + \right. \\ &\left. \frac{1}{(1+z)(1+x)} + \frac{1}{(1+x)(1+y)} \right] \\ &= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \times \frac{3 + x + y + z}{(1+y)(1+z)(1+x)} \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \frac{x + y + z}{3} = a.$$

Alors, d'après les inégalités entre moyennes :

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq a^3, \quad 3a = x + y + z \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}} = 3, \text{ et}$$

$$(1+y)(1+z)(1+x) \leq \left[\frac{(1+x) + (1+y) + (1+z)}{3} \right]^3 = (1+a)^3.$$

Ainsi :

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq a^3 \times \frac{6}{(1+a)^3}.$$

$$\text{Il suffit donc de prouver que } \frac{6a^3}{(1+a)^3} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Or, puisque } a \geq 1 \text{ et comme } \frac{6a^3}{(1+a)^3} = 6 \left(1 - \frac{1}{1+a} \right)^3, \text{ avec}$$

$$f : \left(a \mapsto 6 \left(1 - \frac{1}{1+a} \right)^3 \right) \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^+,$$

on a $f(a) \geq f(1) = \frac{3}{4}$, ce qui assure la conclusion.

Chapitre 3

1) D'après IAG, on a directement :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd &\geq 10 (a^2 b^2 c^2 d^2 abacadbcbcdcd)^{\frac{1}{10}} \\ &= 10 (a^5 b^5 c^5 d^5)^{\frac{1}{10}} \\ &= 10, \end{aligned}$$

avec égalité ssi $a = b = c = d = 1$.

2) On a

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) \\ &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \times 6(a^6b^6c^6)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{d'après IAG}) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 24abc. \end{aligned}$$

3) D'après IAG, on a directement :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n a_k (1 - a_k) &= \prod_{k=1}^n a_k \times \prod_{k=1}^n (1 - a_k) \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - a_k) \right)^n \\ &\leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}} \end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} &= \left(b + \frac{1}{2a} \right)^2 + a^2 + \frac{3}{4a^2} \\ &\geq a^2 + \frac{3}{4a^2} \quad \text{avec égalité ssi } b = -\frac{1}{2a} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{d'après IAG} \end{aligned}$$

D'où $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$, avec égalité ssi $a^4 = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{2a}$.

5) D'après IAG, pour $n \geq 2$:

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} < \frac{(n-1) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

d'où $U_{n-1} < U_n$

D'autre part :

$$\left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

d'où $\left(\frac{n-1}{n} \right)^n < \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$, c.à.d. $\frac{1}{V_{n-1}} < \frac{1}{V_n}$,

et donc $V_n < V_{n-1}$.

6) On pose $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}$.

Les indices sont considérés modulo n .

Comme il n'y a qu'un nombre fini de termes, on peut toujours supposer que $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

On pose alors $i_1 = 1$.

Soit i_2 l'indice du plus grand des deux nombres a_2 et a_3 , et si $a_2 = a_3$ on pose $i_2 = 2$. Alors $i_2 \leq i_1 + 2$.

On construit ainsi une suite (i_k) par récurrence :

si i_k est construit, on note i_{k+1} l'indice du plus grand des nombres $a_{i_{k+1}}$ et a_{i_k+2} , avec $i_{k+1} = i_k + 1$ si $a_{i_{k+1}} = a_{i_k+2}$.

Dans ces conditions : $i_{k+1} \leq i_k + 2$.

Puisque $i_1 = 1$, il vient $i_{k+1} \leq 1 + 2k$, pour tout k .

Comme $a_1 = a_{n+1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$, il existe r tel que $i_{r+1} = n + 1$.

Alors $i_r = n - 1$ ou $i_r = n$. D'où $n - 1 \leq i_r \leq 1 + 2(r - 1)$.

Et ainsi $r \geq \frac{n}{2}$. (1)

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } f(a_1, a_2, \dots, a_n) &\geq \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_{r+1}}} \quad (2) \\ &\geq \frac{r}{2} \left(\frac{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}}{a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_{r+1}}} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (\text{d'après IAG}) \\ &= \frac{r}{2} \\ &\geq \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

Et pour que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{4}$, il faut qu'il y ait égalité dans (1) et (2).

Or, l'égalité dans (2) implique que l'on ait $r = n$ termes dans le membre de droite, ce qui est incompatible avec l'égalité dans (1).

Donc $f(a_1, a_2, \dots, a_n) > \frac{n}{4}$.

7) Pour tout i , d'après IAG, on a :

$$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3(a_i)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Et donc } \prod_{i=1}^n (2 + a_i) \geq 3^n \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{3}} = 3^n.$$

8) On a $C(n) = n(n - 1)$.

Les indices sont considérés modulo n .

Pour tous entiers k, j , on pose $\alpha_{k,j} = \frac{x_{j+k}}{x_j}$.

Alors, pour tout $k : \prod_{j=1}^n \alpha_{k,j} = 1$.

D'après IAG :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{a_j (s - x_j)}{x_j} &= \sum_{j=1}^n \left(a_j \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} a_j \alpha_{k,j} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} n \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= n(n-1) \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

D'où $C(n) = n(n-1)$, comme annoncé.

9) On veut minimiser $\sum_{i=1}^k C_{n_i}^2$ sous la condition $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

On va faire du lissage discret.

S'il existe i, j tels que $n_i - n_j \geq 2$ alors, en enlevant une boule de la boîte n° i pour la mettre dans la boîte n° j , le nombre de paires diminue de $C_{n_i}^2 + C_{n_j}^2 - C_{n_i-1}^2 - C_{n_j+1}^2 = n_i - n_j - 1 > 0$.

Par suite, on minimisera le nombre de paires en s'assurant que les nombres de boules dans deux boîtes différentes ne contiennent pas de plus de une unité. Il s'en suit que chaque boîte contiendra $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ boules.

10) On pose $P = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)$

Alors $P = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz}$

D'après IAG : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3q$, où $q = \frac{1}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}$

De même : $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3q^2$, et $\frac{1}{xyz} = q^3$.

Ainsi : $P \geq 1 + 3q + 3q^2 + q^3 = (1 + q)^3$.

Mais, toujours d'après IAG : $q \geq \frac{3}{x+y+z} = 3$

donc $P \geq 4^3 = 64$, avec égalité ssi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

11) Lemme.

Pour tous $a, b > 0$, on a : $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$, avec égalité ssi $a = b$.

Preuve

$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$ équivaut à $3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2$

c.à.d. $a^2 + b^2 \geq 2ab$, qui est vraie. Et l'égalité a lieu ssi $a = b$.

On pose $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$, et $a_i = x_i^3$ pour tout i .

Alors, $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, et, d'après le lemme :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i^3 + a_j^3}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[(a_i + a_j) \frac{a_i^2 - a_i a_j + a_j^2}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2} \right] \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \\ &= \frac{n-1}{3} \sum_{i=1}^n a_i \\ &\geq \frac{n(n-1)}{3} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ (IAG)} \\ &= \frac{n(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Donc $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{n(n-1)}{3}$, avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

$$\begin{aligned} 12) \text{ Posons } f(a, b, c, d) &= abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd \\ &= bc(a+d) + ad \left(b+c - \frac{176}{27}bc \right) \end{aligned}$$

On note que $f(a, b, c, d)$ est symétrique.

Cas n°1 : si $b+c - \frac{176}{27}bc \leq 0$.

Alors, d'après IAG, on a : $f(a, b, c, d) \leq bc(a+d) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Ce qui assure le résultat dans ce cas.

Cas n°2 : si $b+c - \frac{176}{27}bc > 0$.

Alors, d'après IAG, on a cette fois :

$$f(a, b, c, d) \leq bc(a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \left(b+c - \frac{176}{27}bc\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right).$$

On itère ce procédé :

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\leq f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right) \\ &= f\left(b, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, c\right) \text{ car } f \text{ est symétrique} \\ &\leq f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\ &\leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ &= f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{a+d}{2}\right) \\ &\leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat dans ce cas.

13) On pose $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, avec $a_i \geq 0$ pour $i < n$, et $a_n > 0$.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. On pose $x_{n+1} = x_1$.

Si $n = 1$, il y a clairement égalité.

Si $n \geq 2$, on a $P^2(X) = \sum_{i=0}^n a_i^2 X^{2i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j X^{i+j}$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p$.

Alors, d'après IAG : $S_p \geq \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{x_{k+1}}{x_k} \right)^p \right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

Mais alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^2 \left(\frac{x_{k+1}}{x_k} \right) = \sum_{i=0}^n a_i^2 S_{2i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j S_{i+j} \geq \sum_{i=0}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j = P^2(1).$$

D'où $\sum_{k=1}^n P^2 \left(\frac{x_{k+1}}{x_k} \right) \geq n P^2(1)$, avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

14) Soit $E = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+*} / a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1\}$

et f la fonction définie sur E par :

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = n^2(n-1) \prod_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n P_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\text{où } P_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_k} \prod_{i=1}^n a_i.$$

Faisons un lissage classique :

Si tous les a_i ne sont pas égaux, il en existe deux, par exemple a_1, a_2 tels que $a_1 < m < a_2$, où m désigne la moyenne arithmétique des a_i .

On a $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 + a_2)A + a_1 a_2 B$,

où $A = \prod_{i=3}^n a_i$ et $B = n^2(n-1) \prod_{i=3}^n a_i + \sum_{i=3}^n \frac{P_i(a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 a_2}$ (et si $n = 2$, on pose $A = 1$ et $B = n^2(n-1)$).

Alors :

$$\begin{aligned} f(m, a_1 + a_2 - m, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) &= B(m(a_1 + a_2 - m) - a_1 a_2) \\ &= B(m - a_1)(a_2 - m) \\ &> 0. \end{aligned}$$

On est en plein dans la situation "du cours"...

Donc $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(m, m, \dots, m)$ avec égalité ssi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = m.$$

$$\text{Or, ici } m = \frac{1}{n}, \text{ et donc } f(m, m, \dots, m) = \frac{n^2(n-1)}{n^n} + n \cdot \frac{1}{n^{n-1}} = \frac{n^3}{n^n}.$$

$$\text{Et ainsi : } \frac{1}{n^{n-3}} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n^2(n-1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k},$$

avec égalité ssi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

15) Soit S la sphère de centre O et de rayon R . Soient A_1, A_2, A_3, A_4 des

points de S .

D'après IAG, on a : $\left(\prod_{i<j} A_i A_j\right)^{\frac{1}{6}} \leq \frac{1}{6} \sum_{i<j} A_i A_j^2$

ou encore $\prod_{i<j} A_i A_j \leq \frac{1}{6^3} \left(\sum_{i<j} A_i A_j^2\right)^3$, avec égalité ssi $A_i A_j = \text{constante}$.

D'autre part :

$$\sum_{i<j} A_i A_j^2 = \sum_{i<j} \left(OA_i^2 + OA_j^2 - 2\overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} \right) = 12R^2 - 2 \sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^4 \overrightarrow{OA_i} \right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{OA_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{OA_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 OA_i^2 + 2 \sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} \\ &= 4R^2 + 2 \sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} \end{aligned}$$

Par suite $-2 \sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} = 4R^2 - \left\| \sum_{i=1}^4 \overrightarrow{OA_i} \right\|^2 \leq 4R^2$, avec égalité ssi

$\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$, c.à.d. O est l'isobarycentre des A_i .

On a donc : $\sum_{i<j} A_i A_j^2 \leq 16R^2$, et ainsi $\prod_{i<j} A_i A_j \leq \frac{1}{6^3} (16R^2)^3 = \frac{2^9}{3^3} R^6$,

avec égalité ssi O est l'isobarycentre des A_i , et les distances $A_i A_j$ sont toutes égales lorsque $i \neq j$. Cette dernière condition signifie que $A_1 A_2 A_3 A_4$ est un tétraèdre régulier, et entraîne donc que O est l'isobarycentre des A_i . Ainsi : $\prod_{i<j} A_i A_j \leq \frac{2^9}{3^3} R^6$, avec égalité ssi $A_1 A_2 A_3 A_4$ est un tétraèdre

régulier. Comme nous sommes par hypothèse dans le cas d'égalité, c'est donc que $A_1 A_2 A_3 A_4$ est un tétraèdre régulier.

16) On pose $a_0 = 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

Alors $a_0 > 0$ et $\sum_{k=0}^n a_k = 1$.

$$\text{De plus : } \frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) (1 - a_1) (1 - a_2) \dots (1 - a_n)} = \frac{\prod_{k=0}^n a_k}{\prod_{k=0}^n (1 - a_k)}$$

Or, d'après IAG, pour tout i , on a :

$$1 - a_i = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) - a_i = \sum_{k \neq i} a_k \geq n \left(\prod_{k \neq i} a_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \prod_{k=0}^n (1 - a_k) &\geq n^{n+1} \left(\prod_{k \neq 0} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{k \neq 1} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\prod_{k \neq n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= n^{n+1} \prod_{k=0}^n a_k, \text{ car chaque } a_i \text{ apparaît exactement} \end{aligned}$$

n fois.

$$\text{Et ainsi : } \frac{\prod_{k=0}^n a_k}{\prod_{k=0}^n (1 - a_k)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}, \text{ comme désiré, avec égalité}$$

$$\text{ssi } a_0 = a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Chapitre 4

1) La fonction $(x \mapsto x^{\frac{1}{3}})$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Donc, d'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ c.à.d. } a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} (a+b)^{\frac{1}{3}}, \text{ avec égalité ssi } a = b.$$

La plus petite constante M cherchée est donc $M = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}}$.

2) La fonction $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}})$ est convexe sur $]1, +\infty[$. Puisque $\sum_{i=1}^n x_i = 1$,

les x_i peuvent servir de "poids" dans l'inégalité de Jensen. Il vient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}.$$

Or, d'après C.S., on a : $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{n}$

donc : $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$,

avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

3) - Si $n \geq 0$:

La fonction $(x \mapsto x^n)$ est convexe sur \mathbb{R}^{+*} . Alors :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &\geq 2 \left(\frac{1 + \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}}{2}\right)^n \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Or : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, donc $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

- Si $n < -1$:

On pose $p = -n > 1$.

Alors $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ s'écrit : $\frac{b^p}{(a+b)^p} + \frac{a^p}{(a+b)^p} \geq \frac{1}{2^{p-1}}$

ou encore : $\frac{b^p + a^p}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$.

Cette dernière inégalité est une conséquence immédiate de la convexité de la fonction $(x \mapsto x^p)$ sur \mathbb{R}^{+*} , ce qui assure la conclusion.

Notons que l'égalité a lieu ssi $n \in \{0, -1\}$ (et a, b quelconques), ou $n \notin \{0, -1\}$ et $a = b$.

4) L'inégalité à prouver est homogène, on peut donc supposer que $a + b + c = 1$ (*).

La fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen

et (*) :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2 + \lambda bc) + b(b^2 + \lambda ca) + c(c^2 + \lambda ab)}}$$

Il suffit donc de prouver que :

$$a(a^2 + \lambda bc) + b(b^2 + \lambda ca) + c(c^2 + \lambda ab) \leq \frac{1 + \lambda}{9}.$$

$$\text{c.à.d. } a^3 + b^3 + c^3 + 3\lambda abc \leq \frac{1 + \lambda}{9}.$$

Or :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc)$$

Donc (d'après (*)) :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3\lambda abc &= 1 - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 3(\lambda - 2)abc \\ &\leq 1 - 3 \times 6abc + 3(\lambda - 2)abc \quad (\text{IAG}) \\ &= 1 + 3(\lambda - 8)abc \\ &\leq 1 + 3(\lambda - 8) \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^3 \quad (\text{IAG et car } \lambda \geq 8) \\ &= 1 + \frac{\lambda - 8}{9} \\ &= \frac{1 + \lambda}{9}. \end{aligned}$$

Finalement, on a $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$,

et l'égalité ne peut avoir lieu que si elle a lieu dans IAG, c.à.d. que pour $a = b = c$. Or, il est facile de vérifier que, si $a = b = c$ alors il y a bien égalité.

5) Posons $f(a) = \frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{c + a + 1} + \frac{c}{a + b + 1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c)$,
où b, c

sont considérés comme fixes. C'est une somme de fonctions affines et du type $\left(x \mapsto \frac{A}{x + B}\right)$ avec $A, B \geq 0$. C'est donc une somme de fonctions convexes. Il en découle que le maximum de f est atteint aux extrémités de l'intervalle d'étude, ici $[0, 1]$. En raisonnant de même pour les autres variables, on en déduit que le membre de gauche de l'inégalité atteint son maximum en un (ou plusieurs) des huit triplets (a, b, c) où $a, b, c \in \{0, 1\}$. On vérifie facilement qu'en chacun de ces triplets, l'expression est égale à 1, ce qui assure la conclusion.

6) Puisque la fonction $(x \mapsto x^t)$ est convexe sur \mathbb{R}^+ , on a (inégalité de Jensen) :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta} \right)^t \geq n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta} \right) \right)^t \quad (*)$$

$$= n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^\beta} \right)^t$$

Or :

a) Puisque $\alpha \geq 1$, la fonction $(x \mapsto x^\alpha)$ est convexe sur \mathbb{R}^+ , et on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha = \frac{1}{n^\alpha}$$

b) Puisque $\beta > 0$, la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^\beta})$ est convexe sur \mathbb{R}^{+*} , et on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^\beta} \geq \left(\frac{\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i}}{n} \right)^\beta = n^\beta$$

De (*), a) et b), il vient immédiatement :

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta} \right)^t \geq n \left(\frac{1}{n^\alpha} + n^\beta \right)^t \text{ comme annoncé.}$$

De plus, dans chacune des inégalités de convexité, il y a égalité si et

seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Compte-tenu de la condition $\sum_{i=1}^n a_i = 1$,

on en déduit que l'égalité a lieu si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

7) Le membre de gauche est une fonction convexe en chacune des variables. Elle atteint son maximum en un des 32 quintuplets (a, b, c, d, e) tels que $a, b, c, d, e \in \{p, q\}$.

Soit n le nombre de variables égales à p , et donc $5 - n$ le nombre de celles qui sont égales à q , avec $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il s'agit donc de maximiser l'expression $f(n) = (np + (5 - n)q) \left(\frac{n}{p} + \frac{5 - n}{q} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } f(n) &= n^2 + (5 - n)^2 + n(5 - n) \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} \right) \\ &= n^2 + (5 - n)^2 + 2n(5 - n) + n(5 - n) \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= 25 + n(5 - n) \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

donc $f(n)$ est maximale ssi $n(5 - n) = \frac{25}{4} - \left(n - \frac{5}{2}\right)^2$ est maximal,

c.à.d. $n = 2$ ou $n = 3$. Et alors $f_{\max} = 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$.

8) On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et, pour $i = 1, \dots, n$: $\omega_i = \frac{1}{iH_n}$.

Alors $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = \frac{1}{H_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{H_n} H_n = 1$.

Soit $S = x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \dots + \frac{x_n^n}{n}$.

Alors : $\frac{S}{H_n} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{i\omega_i}$ d'après IAG pondérée

$$= \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{H_n}}$$

Mais, d'après IAG : $\prod_{i=1}^n x_i \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \right)^n = 1$.

Donc $\frac{S}{H_n} \geq 1$, avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

9) D'après IAG pondérée : $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} = ab$.

10) La fonction $f : \left(x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}\right)$ est convexe sur \mathbb{R}^+ . En effet, elle est deux

fois dérivable sur \mathbb{R}^+ , et pour tout $x \geq 0$, on a : $f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(1 + e^x)^3} \geq 0$, car

\exp est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, on pose $x_i = e^{y_i}$. Comme $x_i \geq 1$, on a $y_i \geq 0$.

Ainsi, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^{y_i} + 1} \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i} + 1} = \frac{1}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} + 1}, \text{ avec égalité}$$

ssi $x_1 = \dots = x_n$.

11) On pose $A = \sum_{i=1}^4 x_i^3$, et $A_i = A - x_i^3$.

Alors $A = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 A_i$.

D'après IAG, on a $\frac{1}{3}A_1 \geq (x_2^3 x_3^3 x_4^3)^{\frac{1}{3}} = x_2 x_3 x_4 = \frac{1}{x_1}$.

On prouve de même que $\frac{1}{3}A_i \geq \frac{1}{x_i}$ pour $i = 2, 3, 4$.

Et ainsi $A \geq \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i}$.

D'autre part, d'après l'inégalité entre moyennes d'ordre 3 et 1, et IAG :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}A &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i^3 \geq \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \right) \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \right) \left(\text{on a } \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \geq (x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{4}} = 1 \right) \end{aligned}$$

Donc $A \geq \sum_{i=1}^4 x_i$.

Et la conclusion est assurée.

12) - Si l'un des nombres est nul, par exemple $z = 0$:

L'inégalité s'écrit :

$8(x^6 + y^6 + 2x^3 y^3) \geq 9x^3 y^3$, qui est clairement vraie, avec égalité

ssi $x = y = z = 0$.

- Si $x, y, z > 0$, on a :

$$\begin{aligned} 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy) &\leq \frac{9}{8}(2x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + 2y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) \\ &\leq \frac{9}{8} \left[\frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \right]^3 \text{ (d'après IAG)} \\ &= 9 \times 8 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3 \end{aligned}$$

$$\leq 9 \times 8 \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^2 \quad (\text{d'après l'inégalité}$$

entre

moyennes d'ordre 3 et 2)

$$= 8(x^3 + y^3 + z^3)^2,$$

avec égalité ssi $x = y = z$.

13) La fonction $f : \left(x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)$ est convexe. D'après l'inégalité de Jensen,

$$\text{il vient : } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

D'autre part, d'après l'inégalité entre moyennes d'ordre 1 et $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2$$

$$\text{d'où } \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq \sqrt{n}, \text{ et donc } \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

ce qui assure le résultat.

14) On pose :

$$A_n = \cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{et } B = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

D'après C.S., on a : $A_1 \times B \geq 9$.

Or, puisque α, β, γ sont les angles d'un triangle, on a :

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

donc $B = 1$. Et ainsi : $A_1 \geq 9$.

Mais alors, d'après l'inégalité entre les moyennes d'ordre n et 1 :

$$\frac{A_n}{3} \geq \left(\frac{A_1}{3}\right)^n, \text{ c.à.d. } A_n \geq 3^{n+1}.$$

Notons que l'égalité a lieu ssi le triangle est équilatéral.

15) On pose $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Première méthode.

$$\begin{aligned}
\text{D'après C.S. : } \left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{S-x_i} \right] \left[\sum_{i=1}^n (S-x_i) \right] &\geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^5} \right)^2 \\
&= n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{5}{2}} \right)^2 \\
&\geq n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

(d'après l'inégalité entre les moyennes d'ordre $\frac{5}{2}$ et 2)

$$= \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

D'autre part :

$$0 < \sum_{i=1}^n (S-x_i) = (n-1) \sum_{i=1}^n x_i = n(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \leq n(n-1) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(d'après l'inégalité entre les moyennes d'ordre 1 et 2)

donc $0 < \sum_{i=1}^n (S-x_i) \leq \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}}$, avec égalité ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Et finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{S-x_i} &\geq \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}} \times \frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}, \text{ avec égalité ssi } x_1 = x_2 = \dots = \\
x_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode.

Pour tout i , on a : $\frac{x_i}{S-x_i} = -1 + \frac{S}{S-x_i}$. Ainsi, les suites $(x_1^4, x_2^4, \dots, x_n^4)$

et $\left(\frac{x_1}{S-x_1}, \frac{x_1}{S-x_2}, \dots, \frac{x_1}{S-x_n} \right)$ sont rangées dans le même ordre.

D'après l'inégalité de Chebyshev, on a donc :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{S-x_i} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} \right)$$

De plus, pour S fixée, la fonction $f : \left(x \mapsto \frac{x}{S-x} \right)$ est convexe.

Donc : $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S-x_i} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq n f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = n f\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{n}{n-1}$, avec égalité

ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

D'autre part, d'après l'inégalité entre les moyennes d'ordre 4 et 2, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \text{ avec égalité ssi } x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

$$\text{Et donc, } \sum_{i=1}^n \frac{x_i^5}{S-x_i} \geq \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

On vérifie alors que l'égalité a lieu pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui assure que cette valeur est bien un minimum.

Chapitre 5

1) Puisque les coefficients sont positifs ou nuls, les racines sont toutes strictement négatives. On les note $-r_i$, avec $r_i > 0$, pour $i = 1, \dots, n$.

Alors $\prod_{i=1}^n r_i = 1$. Et, d'après IAG, si les sommes et produits non indexés sont pris sur toutes les combinaisons à k éléments parmi les r_i :

$$\begin{aligned} a_k &= \sum r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \geq C_n^k \left(\prod r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \right)^{\frac{1}{C_n^k}} \\ &= C_n^k \left(\prod_{i=1}^n r_i \right)^{\frac{k}{C_n^k}} \quad (\text{car chaque } r_i \text{ apparaît } C_{n-1}^{k-1} \text{ fois} \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}.)$$

$$= C_n^k.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, il vient :

$$f(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^i + 1 \geq \sum_{i=0}^n C_n^i x^i = (x+1)^n, \text{ d'après la formule du}$$

binôme.

2) Comme dans l'exercice précédent, on prouve que :

$$\text{pour tout } 1 \leq k \leq n, S_k \geq C_n^k \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{k}{n}}.$$

Ainsi : $S_k S_{n-k} \geq C_n^k C_n^{n-k} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{k}{n}} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{n-k}{n}} = C_n^k C_n^{n-k} \prod_{i=1}^n a_i$

et, comme $C_n^k = C_n^{n-k}$, il vient : $S_k S_{n-k} \geq (C_n^k)^2 a_1 a_2 \dots a_n$.

$$3) \text{ On a : } (a^2 + ab + b^2) (b^2 + bc + c^2) (c^2 + ca + a^2) \\ = \sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2} a^3 b^3 + \frac{1}{2} a^2 b^2 c^2 + \frac{1}{2} a^4 bc + 2a^3 b^2 c + a^4 b^2 \right)$$

et $(ab + bc + ca)^3$

$$= \sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2} a^3 b^3 + a^2 b^2 c^2 + 3a^3 b^2 c \right)$$

donc

$$(a^2 + ab + b^2) (b^2 + bc + c^2) (c^2 + ca + a^2) - (ab + bc + ca)^3 \\ = \sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2} a^4 bc + a^4 b^2 - \frac{1}{2} a^2 b^2 c^2 - a^3 b^2 c \right)$$

Or, les suites $(4, 2, 0)$ et $(4, 1, 1)$ majorent respectivement les suites $(2, 2, 2)$ et $(3, 2, 1)$. Donc, d'après l'inégalité de Muirhead,

$$\sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2} a^4 bc + a^4 b^2 - \frac{1}{2} a^2 b^2 c^2 - a^3 b^2 c \right) \geq 0, \text{ ce qui assure la conclusion.}$$

4) Première méthode.

On commence par rendre l'équation homogène en éliminant la contrainte. Prouvons que l'on a :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{\frac{4}{3}}}.$$

Pour simplifier l'expression, on pose $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$.

$$\text{L'expression devient : } \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

On élimine les dénominateurs, pour obtenir l'inégalité équivalente :

$$\sum_{\text{sym.}} (x^4 + 2x^3y + x^2yz) \geq \sum_{\text{sym.}} \left(x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{4}{3}} z^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{7}{3}} y^{\frac{4}{3}} z^{\frac{1}{3}} \right)$$

Or, les suites $(4, 0, 0)$, $(3, 1, 0)$ et $(2, 1, 1)$ majorent respectivement les

suites $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, et $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Donc la dernière inégalité découle de l'inégalité de Muirhead.

Notons que l'égalité a lieu ssi $a = b = c$.

Deuxième méthode.

On pose $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Alors $xyz = 1$.

$$\text{Et } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

D'après C.S. :

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \geq (x+y+z)^2.$$

$$\text{Donc : } \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

$$\text{Et, d'après IAG : } \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2} (xyz)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}, \text{ avec égalité ssi } a = b = c = 1.$$

5) On pose : $A = b + 2c + 3d$, $B = c + 2d + 3a$,

$C = d + 2a + 3b$, et $D = a + 2b + 3c$.

D'après l'inégalité de C.S. :

$$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} + \frac{d}{D} \right) (aA + bB + cC + dD) \geq (a + b + c + d)^2$$

donc :

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Il suffit donc de prouver que :

$$8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq 3(a+b+c+d)^2$$

$$\text{ou encore : } 48p_2 \leq 3 \times 16p_1^2$$

c.à.d. $(p_2)^{\frac{1}{2}} \leq p_1$, ce qui découle immédiatement des inégalités de Mac-Laurin.

6)a) On a :

$$\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}, \frac{1}{b} - \frac{c+a}{b^2+ca} = \frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}, \frac{1}{c} - \frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \left(\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \right) \\ &= \frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)} + \frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)} \end{aligned}$$

Puisque f est symétrique, on peut supposer que $a \leq b \leq c$.

Alors : $\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)} \geq 0$, avec égalité ssi $c = a$ ou $c = b$.

De plus : $\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)} = \frac{(b-a)^2(a+b)}{ab(a^2+bc)(b^2+ca)} (a(c-b) + cb) \geq 0$,

avec égalité ssi $a = b$.

Finalement, $f(a, b, c) \geq 0$, ce qui est l'inégalité désirée, avec égalité ssi $a = b = c$.

b) D'après l'inégalité de Schur pour $t = -1$, $x = a + b$, $y = b + c$,

et $z = c + a$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{x}(x-y)(x-z) + \frac{1}{y}(y-z)(y-x) + \frac{1}{z}(z-x)(z-y) \\ &= \frac{(a-c)(b-c)}{a+b} + \frac{(b-a)(c-a)}{b+c} + \frac{(c-b)(a-b)}{c+a} \\ &= \frac{c^2+ab}{a+b} - c + \frac{a^2+bc}{b+c} - a + \frac{b^2+ca}{c+a} - b \end{aligned}$$

d'où $\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c$, avec égalité ssi $x = y = z$, c.à.d. $a = b = c$.

7) On a :

$$\begin{aligned} &(xy + yz + zx) \left((x+y)^2(y+z)^2 + (y+z)^2(z+x)^2 + (z+x)^2(x+y)^2 \right) \\ &= \sum_{\text{sym.}} \left(x^5y + 2x^4y^2 + \frac{5}{2}x^4yz + \frac{3}{2}x^3y^3 + 13x^3y^2z + 4x^2y^2z^2 \right) \end{aligned}$$

et

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 = \sum_{\text{sym.}} \left(x^4y^2 + x^4yz + x^3y^3 + 6x^3y^2z + \frac{5}{3}x^2y^2z^2 \right)$$

On fait donc disparaître les dénominateurs, pour obtenir l'inégalité équivalente :

$$\sum_{\text{sym.}} (4x^5y + x^4yz + x^2y^2z^2 - x^4y^2 - 3x^3y^3 - 2x^3y^2z) \geq 0 \quad (1)$$

Or, la suite $(5, 1, 0)$ majore les deux suites $(4, 2, 0)$ et $(3, 3, 0)$.

Donc, d'après l'inégalité de Muirhead, on a :

$$\sum_{\text{sym.}} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3) \geq 0. \quad (2)$$

D'autre part, on a vu que l'inégalité de Schur s'écrivait :

$$\sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xyz - x^2y \right) \geq 0.$$

En multipliant chaque terme par $2xyz$, il vient :

$$\sum_{\text{sym.}} (x^4yz + x^2y^2z^2 - 2x^3y^2z) \geq 0 \quad (3)$$

Ainsi, en sommant (2) et (3), on obtient (1).

D'où la conclusion, avec égalité ssi $x = y = z$.

8) On a :

$$\begin{aligned} & (b+c-a)^2 ((c+a)^2 + b^2) ((a+b)^2 + c^2) \\ & \quad + (c+a-b)^2 ((a+b)^2 + c^2) ((b+c)^2 + a^2) \\ & \quad + (a+b-c)^2 ((b+c)^2 + a^2) ((c+a)^2 + b^2) \\ & = \sum_{\text{sym.}} \left(\frac{3}{2}a^6 + 2a^5b + a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & ((c+a)^2 + b^2) ((a+b)^2 + c^2) ((b+c)^2 + a^2) \\ & = \sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2}a^6 + 2a^5b + 3a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 + 8a^3b^2c + \frac{7}{3}a^2b^2c^2 \right) \end{aligned}$$

On élimine donc tous les dénominateurs, et compte-tenu du coefficient $\frac{3}{5}$,

on obtient l'inégalité équivalente (1) :

$$\sum_{\text{sym.}} (3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 - 12a^3b^2c + 4a^2b^2c^2) \geq 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Schur :

$$\sum_{\text{sym.}} \left(\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}abc - a^2b \right) \geq 0.$$

En multipliant chaque terme par $4abc$, il vient :

$$\sum_{\text{sym.}} (4a^4bc - 8a^3b^2a + 4a^2b^2c^2) \geq 0 \quad (2)$$

Il reste donc à prouver que :

$$\sum_{\text{sym.}} (3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 - a^4bc + 2a^3b^3 - 4a^3b^2c) \geq 0.$$

Or, la suite $(6, 0, 0)$ majore les suites $(4, 1, 1)$ et $(3, 2, 1)$,

$$\text{donc } \sum_{\text{sym.}} (3a^6 - a^4bc - 2a^3b^2c) \geq 0. \quad (3)$$

De plus, la suite $(5, 1, 0)$ majore la suite $(4, 2, 0)$,

donc $\sum_{\text{sym.}} (2a^5b - 2a^4b^2) \geq 0$. (4)

Et enfin, la suite (3, 3, 0) majore la suite (3, 2, 1),

donc $\sum_{\text{sym.}} (2a^3b^3 - 2a^3b^2c) \geq 0$. (5)

En sommant (2),(3),(4) et (5), il vient (1). Ouf!

La conclusion en découle, avec égalité ssi $a = b = c$.

9) Avec les notations du chapitre, on pose :

$c_1 = a + b + c$, $c_2 = ab + bc + ca$, et $c_3 = abc$.

Les inégalités souhaitées sont alors équivalentes à :

$$c_1c_2 \leq c_1^3 - 3c_1c_2 + 9c_3 \leq c_1(c_1^2 - 2c_2) \leq 2(c_1^3 - 3c_1c_2) + 9c_3.$$

Or, la première et la troisième sont équivalentes à :

$$c_1^3 + 9c_3 \geq 4c_1c_2, \text{ c.à.d. } 27p_1^3 + 9p_3 \geq 36p_1p_2,$$

ou encore $3p_1^3 + p_3 \geq 4p_1p_2$, dont on a vu en application qu'elle était équivalente au cas $t = 1$ de l'inégalité de Schur.

D'autre part, celle du milieu s'écrit : $c_1c_2 \geq 9c_3$,

c.à.d. $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$, qui est bien connue (cf. chapitre 3, application1). D'où la conclusion.

Chapitre 6

1) On pose $S = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}(x + z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}} + (y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}(y + x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}} + (z^2 + x^2)^{\frac{1}{3}}(z + y)^{\frac{2}{3}}}$.

Et $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$.

D'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}(x + z)^{\frac{2}{3}} &= [(a^2)^3 + (b^2)^3]^{\frac{1}{3}}[(c^2)^{\frac{3}{2}} + (a^2)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}} \\ &\geq a^2c^2 + b^2a^2 \\ &= (xy)^{\frac{2}{3}} + (xz)^{\frac{2}{3}} \\ &\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

Et donc : $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}(x + z)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + (xy)^{\frac{2}{3}} + (xz)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}}$

On procède de même pour les autres termes et, en sommant, il vient :

$$S \leq \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

2) Soient a, b, c, d dans \mathbb{R} . On pose $s = a + b + c + d$.

D'après l'inégalité de Minkowski :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sqrt{(a+1)^2 + 2(b-2)^2 + (c+3)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + 2(c-2)^2 + (d+3)^2} \\
&\geq \sqrt{(a+b+2)^2 + 2(b+c-4)^2 + (c+d+6)^2} \\
S_2 &= \sqrt{(c+1)^2 + 2(d-2)^2 + (a+3)^2} + \sqrt{(d+1)^2 + 2(a-2)^2 + (b+3)^2} \\
&\geq \sqrt{(c+d+2)^2 + 2(d+a-4)^2 + (a+b+6)^2}
\end{aligned}$$

Et, à nouveau :

$$S = S_1 + S_2 \geq \sqrt{(s+4)^2 + 2(s-8)^2 + (s+12)^2}$$

$$\text{ou encore : } S \geq \sqrt{4s^2 + 288} \geq \sqrt{288}.$$

Donc la valeur minimale de S est $12\sqrt{2}$, atteinte pour, par exemple, pour $a = b = c = d = 0$.

Chapitre 7

1) On pose $E = [-1; 1]^n$,

$F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \{-1; 0; 1\} \text{ pour tout } i\}$,

$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \{-1; 1\} \text{ pour tout } i\}$.

Et, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, on pose $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.

Puisque F et G sont finis (de cardinaux respectifs 3^n et 2^n), la fonction f admet un minimum sur F et sur G .

Et, comme $G \subset F$, on a $\min_F f \leq \min_G f$.

Or, par rapport à chacune des variables x_1, x_2, \dots, x_n , la fonction f est affine. Elle atteint donc son minimum sur $[-1; 1]$ en une des extrémités de cet intervalle. Ainsi, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min\{f(-1, x_2, \dots, x_n), f(1, x_2, \dots, x_n)\}$. Par symétrie des rôles, on en déduit que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min_G f$.

Par suite, f admet un minimum sur F et $\min_E f = \min_G f = \min_F f$. En particulier, la réponse aux questions a) et b) est la même, et il suffit de déterminer $\min_G f$.

Soit donc $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$. Soit $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ le nombre de x_i égaux à 1 (et donc, il y en a $n - p$ égaux à -1). Alors :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{x_i = x_j = 1} x_i x_j + \sum_{x_i = x_j = -1} x_i x_j + \sum_{x_i = 1, x_j = -1} x_i x_j \\
&= C_p^2 + C_{n-p}^2 - p(n-p) \\
&= \frac{1}{2} ((2p-n)^2 - n).
\end{aligned}$$

Et donc :

- Si n est pair, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq -\frac{n}{2}$ avec égalité ssi $p = \frac{n}{2}$.
- Si n est impair, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{1-n}{2}$ avec égalité ssi $p = \frac{n+1}{2}$ ou $p = \frac{n-1}{2}$.

2) Si le membre de droite est négatif ou nul, l'inégalité stricte est vérifiée. Sinon, on a par exemple $a = \max(a, b, c)$. Il est clair qu'alors $a + b - c$ et $c + a - b$ sont strictement positifs. Donc, le troisième facteur est lui aussi strictement positif. On en déduit qu'alors a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, ce qui conduit au changement de variables :

$$a + b - c = x, b + c - a = y, c + a - b = z$$

$$\text{c.à.d. } x, y, z > 0 \text{ et } a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{y+x}{2}, c = \frac{z+y}{2}.$$

L'inégalité s'écrit alors : $(x+z)(y+x)(z+y) \geq 8xyz$.

Or, d'après IAG : $(x+z)(y+x)(z+y) \geq 2\sqrt{xz}2\sqrt{yx}2\sqrt{zy} = 8xyz$, avec égalité ssi $x = y = z$, c.à.d. $a = b = c$.

3) On pose $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$.

Alors x, y, z sont les angles d'un triangle aigu, et l'inégalité s'écrit :

$$\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$$

ce que l'on a déjà prouvé (cf. chap.4 application 2).

Le résultat en découle, avec égalité ssi $a = b = c = \sqrt{3}$.

4) Pour tout i , on pose : $a_i = \frac{1}{1+x_i}$.

Alors $0 < a_i < 1, x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$, et $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$.

$$\text{Ainsi : } \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}.$$

Or, d'après IAG :

$$1 - a_i = \sum_{k \neq i} a_k \geq n \left(\prod_{k \neq i} a_k \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ avec égalité ssi tous les } a_k \text{ sont égaux.}$$

$$\text{Donc } \prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i) \geq n^{n+1} \left(\prod_{k \neq 1} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\prod_{k \neq n+1} a_k \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= n^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} a_i.
\end{aligned}$$

Et ainsi
$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \geq n^{n+1},$$

avec égalité ssi tous les $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$,
c.à.d. $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = n$.

5) On pose $a = \tan x$, $b = \tan y$, $c = \tan z$.

Alors x, y, z sont les angles d'un triangle aigu, et l'inégalité s'écrit :

$$\max(\tan x, \tan y, \tan z) \geq \sqrt{3}.$$

Or, l'un des angles du triangle, par exemple x , est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{3}$.

Donc, comme la fonction \tan est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan x \geq \sqrt{3}$.

6) On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right)^2 \\
&\geq 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(2 \sum_{i<j} x_i x_j \right) \quad (\text{car } (a+b)^2 \geq 4ab) \quad (1) \\
&= 8 \sum_{i<j} \left(x_i x_j \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \\
&\geq 8 \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \quad (2)
\end{aligned}$$

On a égalité dans (2) ssi au moins $n-2$ des x_i sont nuls. Par exemple, $x_3 = \dots = x_n = 0$. Dans ces conditions, (1) est une égalité ssi $2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2$, c.à.d. $x_1 = x_2$.

Finalement, $C = \frac{1}{8}$, avec égalité ssi au moins $n-2$ des x_i sont nuls, et les deux autres sont égaux.

7) Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$.

Alors, l'un de ces nombres est supérieur ou égal à 1, et un autre est inférieur ou égal à 1. Comme l'inégalité à prouver est cyclique, on peut donc supposer que $a \leq 1$ et $c \geq 1$.

Après développement, et comme $abc = 1$, l'inégalité désirée est

$$\text{équivalente à : } a + b + c + ab + bc + ca \leq 3 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b},$$

$$\text{c.à.d. } (a-1) \left(\frac{1}{c} - 1 \right) + (b-1) \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + (c-1) \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \geq 0.$$

On remplace b par $\frac{1}{ac}$, et on multiplie tout par a^2c . On obtient une inégalité

$$\text{équivalente : } a^2(1-a)(c-1) + (ac-1)^2(ac+1-a) \geq 0$$

Dans cette dernière inégalité, chaque facteur est clairement positif ou nul.

La conclusion en découle, avec égalité ssi $ac = 1$ et ($a = 1$ ou $c = 1$),

c.à.d. $a = c = b = 1$.

8) L'inégalité à prouver est homogène et symétrique, on peut donc imposer $0 < a \leq b \leq c$ et $abc = 1$. Alors $a \leq 1 \leq c$ et $ab \leq 1$.

Dans ces conditions, le membre de gauche est :

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + \frac{\lambda}{a}}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + \frac{\lambda}{b}}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + \frac{\lambda}{c}}} \\ &= \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + \lambda}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + \lambda}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + \lambda}} \end{aligned}$$

On pose $x = a^3, y = b^3, z = c^3$.

Alors $xyz = 1, 0 < xy \leq 1 \leq z$, et $x \leq y \leq z$.

$$\text{Ainsi } f(a, b, c) = g(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{x + \lambda}} + \sqrt{\frac{y}{y + \lambda}} + \sqrt{\frac{z}{z + \lambda}}$$

Comme on a clairement $\sqrt{\frac{z}{z + \lambda}} < 1$, il suffit de prouver

$$\text{que } \sqrt{\frac{x}{x + \lambda}} + \sqrt{\frac{y}{y + \lambda}} < 1.$$

$$\text{Or ceci est équivalent à } \frac{x}{x + \lambda} + \frac{y}{y + \lambda} + 2\sqrt{\frac{xy}{(x + \lambda)(y + \lambda)}} < 1$$

$$\text{c.à.d. } 2\sqrt{\frac{xy}{(x + \lambda)(y + \lambda)}} < \frac{\lambda^2 - xy}{(x + \lambda)(y + \lambda)}$$

$$\text{ou encore } 2\sqrt{xy}\sqrt{(x + \lambda)(y + \lambda)} < \lambda^2 - xy \quad (1)$$

Comme $\lambda > 1$, on a $\lambda^2 - xy > 0$, et (1) est équivalente à :

$$4xy(x + \lambda)(y + \lambda) < (\lambda^2 - xy)^2 \quad (2).$$

Or, $x + y \leq 2z = \frac{2}{xy}$ donc :

$$\begin{aligned} 4xy(x + \lambda)(y + \lambda) &= 4xy(xy + \lambda^2 + \lambda(x + y)) \\ &\leq 4xy\left(xy + \lambda^2 + \frac{2\lambda}{xy}\right) \\ &= 4(xy)^2 + 4xy\lambda^2 + 8\lambda \\ &\leq 4 + 4\lambda^2 + 8\lambda \\ &= 4(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

D'autre part $(\lambda^2 - xy)^2 \geq (\lambda^2 - 1)^2$.

Il est facile de vérifier que $(\lambda^2 - 1)^2 > 4(\lambda + 1)^2$, s'écrit aussi $(\lambda + 1)(\lambda - 3) > 0$. Puisque $\lambda > 3$, on en déduit facilement (2), et la conclusion désirée en découle.

On peut noter que pour $a = \frac{1}{c^2}$ et $b = c$, on a $\lim_{c \rightarrow +\infty} f(a, b, c) = 2$, ce qui permet d'affirmer que le membre de droite ne peut être remplacé par une valeur plus petite.

Chapitre 9

Bibliographie

- [1] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press.
- [2] D.S.Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, Springer.
- [3] P.S.Bullen, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, *Means and their Inequalities*, Kluwer.
- [4] P.Bornsztein, *Supermath*, Vuibert.
- [5] P.Bornsztein, *Mégamath*, Vuibert.
- [6] T.B.Soulami, *Les olympiades de mathématiques*, Ellipses.
- [7] A.Engel, *Problem-solving strategies*, Springer.
- [8] E.Lozansky ; C.Rousseau, *Winning solutions*, Springer.