Lemmes utiles en géométrie

Thomas Budzinski

Avant-propos

La géométrie est un domaine où une bonne culture peut s'avérer très utile pour résoudre des exercices. Ce document est une liste (non exhaustive !) de lemmes qui servent fréquemment, accompagnés de rapides éléments de preuve. Certaines démonstrations ne sont pas évidentes, les compléter peut être un entraînement intéressant mais il n'est pas nécessaire de les connaître. Les lemmes soulignés nous paraissent particulièrement importants.

Dans toute la suite, sauf indication contraire, ABC désigne un triangle. On note a, b et c les longueurs BC, CA et AB, et α, β et γ les angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. On notera aussi $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit et O le centre de $\mathscr{C}$ et R son rayon, H son orthocentre, G son centre de gravité, I le centre de son cercle inscrit et r le rayon du cercle inscrit. On notera enfin $\mathscr{A}_{ABC}$ l'aire du triangle.

Trigonométrie

Lemme 1 (<u>Loi des sinus</u>)**.**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R = \frac{abc}{2\mathscr{A}_{ABC}}$$

Idée de la démonstration. Pour montrer $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, introduire B' diamétralement opposé à B sur $\mathscr{C}$ et considérer le triangle $BB'C$. Pour la dernière partie, exprimer l'aire en fonction de b, c et α. □

Lemme 2 (Formule d'Al-Kashi)**.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Idée de la démonstration. Si vous connaissez le produit scalaire, utilisez-le ! Sinon, introduire D, pied de la hauteur issue de B et calculer AD puis BD et CD puis a en fonction de b, c et α. □

Lemme 3 (Formules d'addition)**.** Pour tous angles α et β :
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

Idée de la démonstration. Utiliser le produit scalaire pour démontrer la seconde formule, puis en déduire les autres. □

Géométrie du triangle

Lemme 4 (Pôle Sud)**.** Soit S le point où la bissectrice (AI) de $\widehat{CAB}$ recoupe le cercle circonscrit à ABC. Alors S est le milieu de l'arc BC qui ne contient pas A. De plus, S est le centre du cercle circonscrit à ABI. S est généralement appelé *pôle Sud* du ABC.

Idée de la démonstration. Chasse aux angles : on vérifie que SBC et SBI sont isocèles en S. □

Lemme 5. Les symétriques de H par rapport à (AB), (BC) et (CA) sont sur $\mathscr{C}$.

Idée de la démonstration. Chasse aux angles. □

Lemme 6. Soit D le point où la bissectrice (AI) recoupe $[BC]$. On a $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Idée de la démonstration. I est équidistant de (AB) et (AC) donc :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\mathscr{A}_{ABD}}{\mathscr{A}_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$$

□

Lemme 7 (Droite d'Euler)**.** Les points O, G, et H sont alignés dans cet ordre et $GH = 2 \cdot OG$. La droite qui contient ces trois points est appelée *droite d'Euler* de ABC.

Idée de la démonstration. On note A', B' et C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. L'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie ABC sur $A'B'C'$. On vérifie que O est l'orthocentre de $A'B'C'$, donc $h(H) = O$. □

Lemme 8 (Cercle d'Euler)**.** On note A', B' et C' les milieux des côtés de ABC, H_A, H_B et H_C les pieds de ses hauteurs et M_A, M_B et M_C les milieux de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$. Alors les neuf points A', B', C', H_A, H_B, H_C, M_A, M_B et M_C sont cocycliques sur un cercle appelé *cercle d'Euler* de ABC. De plus, le centre du cercle d'Euler est le milieu de $[OH]$ et son rayon vaut $\frac{R}{2}$.

Idée de la démonstration. L'homothétie h de la preuve précédente envoie O sur le milieu Ω de $[OH]$, donc le cercle circonscrit à $A'B'C'$, noté $\mathscr{C}'$, est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{R}{2}$. Une chasse aux angles montre que H_A, H_B et H_C sont sur ce cercle. Enfin, Ω et M_A sont les milieux de $[HO]$ et $[HA]$ donc $\Omega M_A = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$ donc M_A est aussi sur ce cercle, de même que M_B et M_C. □

Lemme 9 (Droite de Simson/Steiner)**.**
- Soit P un point du plan et P_A, P_B, P_C ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA) et (AB). Alors P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si $P \in \mathscr{C}$. La droite passant par ces trois points est alors appelée *droite de Simson* de P.
- Soient S_A, S_B et S_C les symétriques de P par rapport à (BC), (CA) et (AB). Alors S_A, S_B et S_C sont alignés si et seulement si $P \in \mathscr{C}$. La droite passant par ces trois points est alors appelée *droite de Steiner* de P.

Idée de la démonstration.
- Chasse aux angles (comme il y a beaucoup de positions possibles des points les uns par rapport aux autres, il est recommandé d'utiliser des angles orientés).
- S_A, S_B et S_C sont les images de P_A, P_B et P_C par l'homothétie de centre P et de rapport 2, donc les trois premiers ont alignés ssi les trois derniers le sont.

□

Lemme 10 (Points de contact du cercle inscrit)**.** Soient D, E et F les points où le cercle inscrit touche [BC], [CA] et [AB]. On a :

— $AE = AF = \frac{b+c-a}{2}$

— $BF = BD = \frac{c+a-b}{2}$

— $CD = CE = \frac{a+b-c}{2}$

Idée de la démonstration. On note $x = AE = AF$, $y = BF = BD$ et $z = CD = CE$: on a $x + y = c$, $y + z = a$ et $z + x = b$, et on résout le système... □

Définition. La *bissectrice extérieure* de $\widehat{CAB}$ est la perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{CAB}$ passant par A. C'est en quelque sorte la "deuxième bissectrice" formée par les droites (AB) et (AC). On définit de même les bissectrices extérieures de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

Lemme 11 (Cercle exinscrit)**.**

— Il existe un unique cercle tangent au segment [BC], à la demi-droite [AB) au-delà de B et à la demi-droite [AC) au-delà de C. Ce cercle est appelé *cercle A-exinscrit* à ABC.

— Le centre I_A du cercle A-exinscrit est l'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$ et des bissectrices extérieures de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

Idée de la démonstration. Similaire à la preuve correspondante pour le cercle inscrit : les trois bissectrices sont concourrantes en un point équidistant de (AB), (BC) et (CA). □

Lemme 12 (Cercle exinscrit, suite)**.**

— I_A est sur le cercle centré au pôle Sud S passant par B, C et I, et S est le milieu de $[I_A I]$.

— Soit D', E' et F' les point où le cercle A-exinscrit touche respectivement [BC], [AC) et [AB). On a $AE' = AF' = \frac{a+b+c}{2}$, $BD' = BF' = \frac{a+b-c}{2} = CD$ et $CD' = CE' = \frac{a+c-b}{2} = BE$.

Idée de la démonstration.

— Les triangles $I_A IB$ et $I_A IC$ sont rectangles en B et C.

— Similaire à la preuve pour les points de contact du cercle inscrit.

□

Notation. $\overline{AB}$ désignera la *longueur algébrique* entre A et B, c'est-à-dire que $\overline{AB}$ vaudra AB ou $-AB$ selon l'ordre dans lequel A et B apparaissent sur la droite (AB). Par exemple, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ vaudra $-\frac{AB}{AC}$ si A est entre B et C car AB et AC sont dirigés dans des sens différents. Par contre, il vaudra $+\frac{AB}{AC}$ si B est entre A et C car alors les deux seront dirigés dans le même sens.

Lemme 13 (Théorème de Ménélaüs)**.** Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$. Alors A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = +1$$

Idée de la démonstration. Si A', B' et C' sont alignés sur (d), on introduit la parallèle à (BC) passant par A : elle coupe (d) en X, puis on applique deux fois le théorème de Thalès. Pour la réciproque, étant donnés A' et B', on sait qu'un seul point $C' \in (AB)$ est sur $(A'B')$, et que ce point permet vérifie $\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}$. Or, un rapide calcul montre qu'un seul point C' vérifie cette formule. □

Lemme 14 (Théorème de Céva)**.** Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$. Alors (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = -1$$

Idée de la démonstration. Si les trois droites sont concourantes en X, montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathscr{A}_{ABX}}{\mathscr{A}_{ACX}}$ et deux relations similaires, puis faire le produit. Pour la réciproque, ça marche comme pour Ménélaüs. $\square$

Lemme 15 (Théorème de Céva trigonométrique)**.** Soient (Ax), (By) et (Cz) trois droites passant par A, B et C. Ces trois droites sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{\sin \widehat{BAx}}{\sin \widehat{CAx}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBy}}{\sin \widehat{ABy}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACz}}{\sin \widehat{BCz}} = 1$$

Idée de la démonstration. Si les trois droites sont concourantes en un point X, appliquer la loi des sinus dans les triangles ABX, BCX et CAX. Pour la réciproque, c'est similaire aux deux théorèmes précédents. On a besoin de montrer que $\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)}$ est strictement croissante. $\square$

Remarque. Un sens reste vrai avec plus de trois points : si on a un polygone à n sommets avec une droite partant de chaque sommet et si les n droites sont concourantes, alors on a une formule du même type. En revanche, la formule ne suffit pas à assurer que les n droites sont concourantes.

Lemme 16 (Conjugué isogonal)**.** Soit X un point du plan. On note (d_A) le symétrique de (AX) par rapport à la bissectrice de $\widehat{CAB}$, et on définit de même les droites (d_B) et (d_C). Alors (d_A), (d_B) et (d_C) sont concourantes en un point appelé *conjugué isogonal* de X.

Idée de la démonstration. Utiliser le théorème de Céva trigonométrique. $\square$

Remarque. On pourra vérifier que O est le conjugué isogonal de H, et I est son propre conjugué isogonal.

Autres

Lemme 17 (Quadrilatère circonscriptible)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère. $ABCD$ est circonscriptible (c'est-à-dire qu'il existe un cercle tangent à ses quatre côtés) si et seulement si $AB + CD = AD + BC$.

Idée de la démonstration. Si $ABCD$ est circonscriptible, on fait une "chasse aux tangentes" : on décompose chaque côté en deux en coupant au point de contact du cercle, et on utilise le fait que A est équidistant des points de tangence à [AB] et [AD]...
Pour la réciproque, supposons quitte à changer les noms des points que [AD] et [BC] se recoupent en X, et soit ω le cercle inscrit à ABX : il touche [AB] en U, [AX] en V et [BX] en W. La condition $AB + CD = AD + BC$ donne $CD = DV + CW$. On a ainsi $XV = \frac{XV+VW}{2} = \frac{XD+XC+VD+CW}{2} = \frac{XD+XC+CD}{2}$, donc ω est le cercle X-exinscrit à XCD, donc il est tangent à [CD], et on savait déjà qu'il était tangent aux trois autres côtés. $\square$

Lemme 18 (Diagonales perpendiculaires)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère. Alors (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Idée de la démonstration. Si les diagonales sont perpendiculaires, on obtient la formule en appliquant plusieurs fois le théorème de Pythagore. Pour la réciproque, on put utiliser la trigonométrie mais le plus simple est d'utiliser le produit scalaire pour montrer :

$$AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$\square$

Lemme 19 (Puissance d'un point)**.** Soit Γ un cercle et P un point. On considère une droite (d) passant par P qui recoupe Γ en A et B. Alors $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ ne dépend pas de la droite (d), et est appelé *puissance de* P *par rapport à* Γ.
De plus, si on note O le centre de Γ et r son rayon, la puissance de P par rapport à Γ vaut $OP^2 - r^2$.

Idée de la démonstration. Si deux droites (d) et (d') coupent Γ en A, B et A', B', montrer que PAA' et $PB'B$ sont semblables. □

Lemme 20 (Axe radical)**.** Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 différents. L'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 est une droite perpendiculaire à (O_1O_2), appelée *axe radical* de Γ_1 et Γ_2. De plus, si Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B, il s'agit de la droite (AB).

Idée de la démonstration. On note r_1 et r_2 les rayons des deux cercles. Soit X un point qui a la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 (on admet qu'il existe) : on a $O_1X^2 - r_1^2 = O_2X^2 - r_2^2$. Si Y est un point quelconque, les deux puissances de Y sont les mêmes ssi $O_1Y^2 - O_2Y^2 = r_1^2 - r_2^2 = O_1X^2 - O_2X^2$ ssi (O_1O_2) et (XY) sont perpendiculaires d'après le lemme précédent, donc l'axe radical est la perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X.
Si Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B, A et B ont une puissance nulle par rapport aux deux cercles, donc son sur l'axe radical. □

Lemme 21 (Axes radicaux, suite)**.** Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles de centres deux à deux distincts. On note (d_1) l'axe radical de Γ_2 et Γ_3, (d_2) celui de Γ_3 et Γ_1 et (d_1) celui de Γ_1 et Γ_2. Alors (d_1), (d_2) et (d_3) sont parallèles ou concourrantes.

Idée de la démonstration. Le point d'intersection de (d_1) et (d_2) a même puissance par rapport aux trois cercles donc est sur (d_3). □

Lemme 22 (Théorème de Miquel)**.** Soient quatre droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4). Ces quatre droites définissent quatre triangles, un pour chaque choix de 3 droites parmi les 4 (une telle figure est appelée *quadrilatère complet*). Alors les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles ont un point commun, appelé *point de Miquel* du quadrilatère complet.

Idée de la démonstration. Donner des noms à tous les points d'intersection et faire une chasse aux angles. □

Remarque. Le point de Miquel est également le centre de nombreuses similitudes directes impliquant les points d'intersection des quatre droites (cf. cours sur les transformations).