Pour débuter en géométrie : chasse aux angles et éléments de géométrie du triangle

Cécile Gachet

Ce document, rédigé à partir de cours donnés lors de stages olympiques ou d'autres événements mathématiques destinés à des collégiens et lycéens, a pour but de vous familiariser avec les résultats de base en géométrie.

Table des matières

1 Quelques conseils pour rédiger un problème de géométrie

Résoudre un problème de géométrie est une vaste entreprise : il y a tant de départs possibles ! Voici quelques conseils de méthode pour bien débuter, et tirer le meilleur profit de ce que vous aurez appris dans la pratique :

- commencez par lire l'énoncé en faisant une grande figure à main levée, dans le cas général : s'il est question d'un triangle ABC quelconque, il faut montrer le résultat quel que soit le triangle. Il ne faut donc pas le tracer isocèle, ni rectangle...
- rajoutez sur votre figure les informations qui vous semblent importantes (si on mentionne le centre du cercle circonscrit, tracez ce cercle : peut-être voyez-vous des points cocycliques ? ; s'il est question du cercle inscrit, pensez aux bissectrices du triangle, rajoutez ses points de tangence aux côtés du triangle ;...)
- si nécessaire, n'hésitez pas à faire une figure propre pour voir ce qui se passe : si vous faites des conjectures intéressantes, vous aurez ensuite une meilleure idée des étapes intermédiaires de votre démonstration.
- au moment de rédiger, pensez à votre lecteur : faites une figure lisible, et reportez-y les points et les angles (en couleur si possible) que vous avez introduit (donnez leur des noms !). Ne recopiez pas l'énoncé, mais définissez bien en une phrase les objets que vous introduisez (« soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$" ; « soit M le projeté orthogonal de P sur la bissectrice de $\widehat{A}$"...).
- annoncez les étapes de votre raisonnement si elles ne s'enchaînent pas immédiatement (« on commence par une chasse aux angles" ; « montrons maintenant que les triangles ABC et MOH sont semblables"...)
- enfin, n'oubliez pas que c'est à force d'entraînement et d'exercices qu'on apprend à résoudre des problèmes de plus en plus complexes !

2 Droites remarquables dans un triangle

2.1 Médiatrices

Définition 2.1 *La médiatrice d'un segment* $[AB]$ *est la perpendiculaire à* (AB) *passant par le milieu de* $[AB]$*.*

Proposition 2.2 *Un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si il est équidistant des deux extrémités de ce segment.*

En d'autres termes, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des deux extrémités de ce segment, et réciproquement (« dans l'autre sens"), si un point est équidistant des deux extrémités d'un segment, alors il appartient la médiatrice de ce segment.

2.2 Hauteurs

Définition 2.3 *Le projeté orthogonal d'un point* A *sur une droite* (d) *est le point d'intersection de* d *et de la perpendiculaire à* (d) *passant par* A*.*

Définition 2.4 *Dans un triangle* ABC*, la hauteur issue de* A *est la perpendiculaire à* (BC) *passant par* A*.*

2.3 Médianes

Définition 2.5 *Dans un triangle* ABC*, la médiane issue de* A *est la droite qui relie* A *et le milieu de* $[BC]$*.*

2.4 Bissectrices

Définition 2.6 *La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles adjacents de même mesure.*

Définition 2.7 *La distance d'un point* A *à une droite* (d) *est la plus petite distance entre* A *et un point* D *de la droite* (d)*.*

Proposition 2.8 *Soit* A *un point,* (d) *une droite,* H *le projeté orthogonal de* A *sur* (d)*. La distance de* A *à* (d) *vaut* AH*.*

Exercice 2.9 *Montrer la proposition 2.8.*

Proposition 2.10 *Un point est sur la bissectrice d'un angle si et seulement si il est équidistant des deux côtés de l'angle.*

3 Éléments de « chasse aux angles"

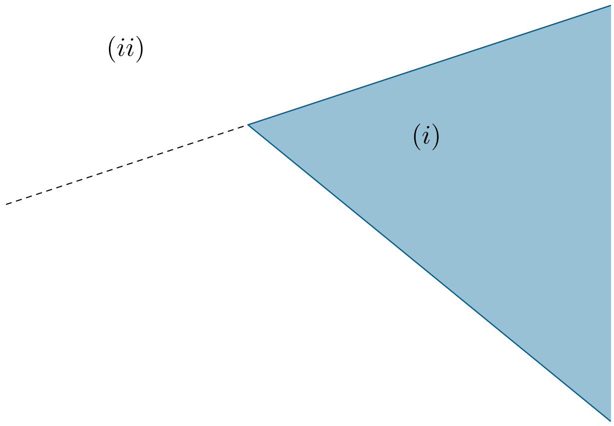
3.1 Notions d'angle géométrique et d'angle orienté

Ce paragraphe donne quelques définitions et notations utilisées par la suite : vous pouvez le négliger en première lecture en restant dans une approche intuitive, quitte à y revenir dès que vous en avez besoin.

Définition 3.1 *Un angle est une portion de plan délimitée par deux demi-droites issues du même point.*

Ce point est le sommet de l'angle, et les demi-droites en sont les côtés.

Deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ déterminent ainsi deux angles. Celui qui est entièrement contenu dans un demi-plan est appelé angle saillant (i)*, et l'autre est appelé* angle rentrant (ii)*.*



En général, l'angle délimité par $[AB)$ et $[AC)$ est noté $\widehat{BAC}$, mais on peut rencontrer la notation $\widehat{A}$, s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Il arrive de donner des noms aux angles qui reviennent souvent dans une figure. On utilise alors des lettres latines comme x, y, z, mais aussi des lettres grecques comme α (qui se lit « alpha"), β (qui se lit « bêta"), γ (qui se lit « gamma"), φ (qui se lit « phi").

Enfin, on pourra rencontrer des angles orientés de droites. Cette notation n'est pas obligatoire, mais vivement conseillée car elle allège souvent la rédaction.

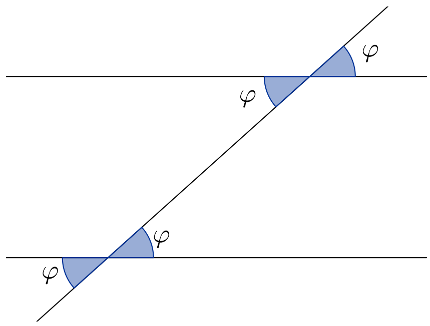
L'angle orienté entre deux droites est une notion qui généralise l'angle géométrique (avec un chapeau). L'angle orienté entre d_1 et d_2 se note (d_1, d_2) et correspond à la mesure de l'angle dont il faut tourner la droite d_1 pour la rendre parallèle (éventuellement confondue) à la droite d_2, à 180° près, et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Il faut connaître quelques règles de calculs sur ces angles : tout d'abord, la convention suivante : si le sens inverse des aiguilles d'une montre est « positif" (c'est ce qu'on a dit au paragraphe précédent), le sens des aiguilles d'une montre est, quant à lui, négatif. Autrement dit, pour toutes droites d_1, d_2, on a : $(d_1, d_2) = -(d_2, d_1)$.

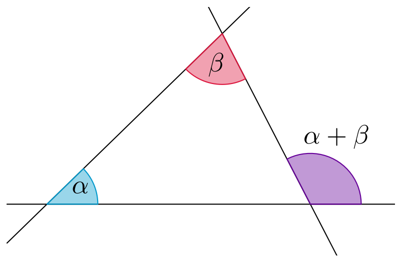
Il faut aussi mentionner une propriété très importante, bien qu'assez intuitive : la relation de Chasles : pour toutes droites d, d_1, d_2, on a $(d_1, d_2) = (d_1, d) + (d, d_2)$. Cela nous permet de composer/décomposer des angles comme bon nous semble, ce qui est très utile !

3.2 Premières figures de style

Il est nécessaire, dans l'apprentissage de la géométrie, de se rendre familier avec un certain nombre de configurations revenant sans cesse dans les problèmes ou exercices. Pour acquérir ces automatismes, il est conseillé au lecteur de regarder régulièrement (du moins au début) les figures suivantes, qui illustrent quelques résultats de géométrie appris au collège absolument cruciaux, exprimés sous une forme peut-être inhabituelle, qu'il faut toutefois apprendre à reconnaître ainsi.

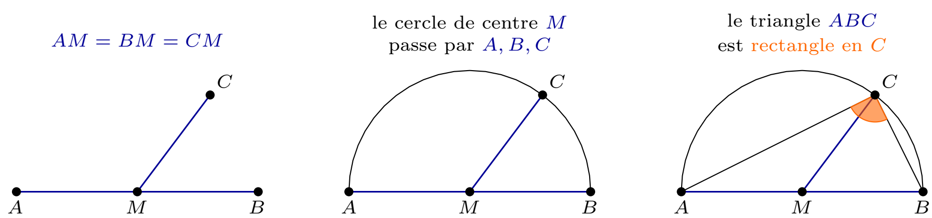


"Chaque fois que je vois des droites parallèles dans un problème d'angles, je pense aux angles correspondants et alternes-internes sur toutes les sécantes !"



"Chaque fois que je veux calculer l'angle entre deux droites, je pense à la relation de Chasles !"

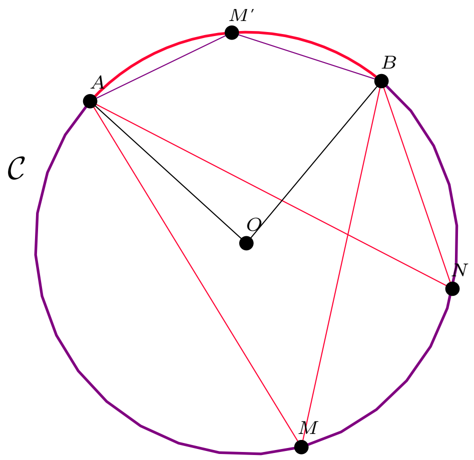
Remarque. Une autre manière de voir les choses est de dire : *"chaque fois que je vois un triangle, je pense que la somme de ses angles vaut* 180°*!"*



"Chaque fois que je vois des égalités de longueurs qui font penser au diamètre d'un cercle, je pense à un triangle rectangle !"

3.3 Théorèmes de l'angle au centre et de l'angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A, B, M, N, M' quatre points de ce cercle, avec M, N, O du même côté de (AB), et M' de l'autre côté de (AB).



Définition 3.2 *Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont appelés angles inscrits dans $\mathcal{C}$.*
L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre dans $\mathcal{C}$.
Les angles $\widehat{AMB}, \widehat{ANB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc du cercle $\mathcal{C}$.

Théorème de l'angle au centre. On a :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

Démonstration. On peut décomposer l'angle :

$$2\widehat{AMB} = 2\widehat{AMO} + 2\widehat{OMB}.$$

Or les triangles AMO et OMB sont isocèles en O. Donc :

$$2\widehat{AMO} + 2\widehat{OMB} = \widehat{AMO} + \widehat{MAO} + \widehat{OMB} + \widehat{OBM}.$$

Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on en déduit que :

$$\widehat{AMO} + \widehat{MAO} + \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 180^\circ - \widehat{AOM} + 180^\circ - \widehat{BOM} = \widehat{AOB}$$

(attention au passage entre les angles saillants et rentrants).
En fin de compte, on a donc bien : $2\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$. □

On en déduit que :

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AMB},$$

et que :

$$\widehat{AM'B} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{AOB}) = 180^\circ - \widehat{AMB}$$

(car un angle rentrant vaut 360° moins l'angle saillant correspondant). Ceci nous amène à énoncer le théorème suivant :

Théorème de l'angle inscrit. Soit Z un point du plan quelconque.
Le point Z est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'une de ces conditions est satisfaite :
(i) Z et M sont du même côté de (AB) et $\widehat{AZB} = \widehat{AMB}$;

(ii) Z et M sont de part et d'autre de (AB) et $\widehat{AZB} = 180^\circ - \widehat{AMB}$.

Définition 3.3 *Quatre points A, B, M, N appartenant à un même cercle sont dits cocycliques.*

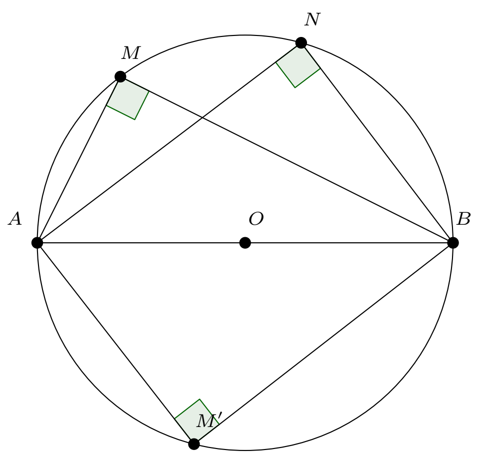
Ainsi, le théorème de l'angle inscrit permet non seulement de montrer que quatre points sont cocycliques en connaissant des égalités d'angles, mais aussi de montrer que des angles sont égaux (ou supplémentaires, ou...) en sachant que des points sont cocycliques.

En montrant que des angles sont égaux ou supplémentaires, on peut donc trouver des points cocycliques, et déduire du théorème de l'angle inscrit d'autres relations entre les angles de ces points, qui nous permettent de trouver encore plus de points cocycliques, donc encore plus d'angles...

De cette manière, on comprend de mieux en mieux ce qui se passe dans la figure, et on avance dans la résolution du problème... C'est ce qu'on appelle la " chasse aux angles", et qui est une méthode très utile en géométrie.

Proposition 3.4 *Un cas particulier très fréquent du théorème de l'angle inscrit est le suivant : soit A, B, M trois points du plan. Le point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.*

En particulier, si A, B, M, N sont quatre points du plan, tels que $\widehat{AMB}$ est un angle droit, alors ces quatre points sont cocycliques si et seulement si $\widehat{ANB}$ est un angle droit, et ce indépendamment de la position relative de M, N et (AB).



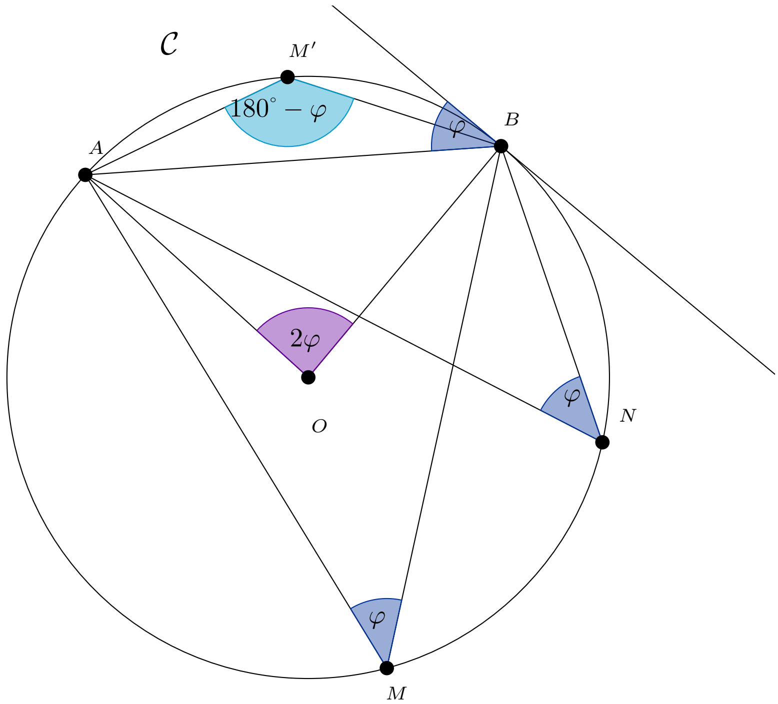
Définition 3.5 *La tangente (d) à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O en un point P est la droite perpendiculaire à (OP) passant par P.*

On dit alors que la droite (d) et le cercle $\mathcal{C}$ sont tangents.

Proposition 3.6 *Un autre cas particulier très utile : soit $\mathcal{C}$ un cercle, A, B, M, N quatre points de ce cercle tels que M et N sont du même côté de (AB). On a $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. Rapprochant maintenant le point M de A, en restant sur le cercle. La droite (AM) se rapproche de la tangente (t) à $\mathcal{C}$ en A, et la droite (MB) se rapproche de la droite (AB), tandis que le théorème de l'angle inscrit* *reste toujours vrai, autrement dit l'angle entre les droites* (AM) *et* (MB) *reste égal à* $\widehat{ANB}$.

Intuitivement, on peut donc comprendre que le théorème de l'angle inscrit reste vrai dans le cas limite où $(AM) = (t)$ *et* $(MB) = (AB)$. *Donc l'angle entre* (t) *et* (AB) *est égal à* $\widehat{ANB}$.

Voici une figure pour récapituler ce que nous dit ce magnifique théorème :



Exercice 3.7 (Droites parallèles et antiparallèles.) *Soient* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *deux cercles ayant deux points d'intersection* A *et* B. *Soient* d_A *une droite passant par* A *et* d_B *une droite passant par* B. *On note* C *et* E *les points d'intersection de* d_A *avec* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *respectivement, et on définit de même* D *et* F *comme les points d'intersection de* d_B *avec* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *respectivement.*

Montrer que les droites CD *et* EF *sont parallèles.*

Exercice 3.8 (Premier théorème de Miquel.) *Soient* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *deux cercles de centres respectifs* O_1 *et* O_2 *s'intersectant en* X *et* Y. *Soit* A *un point de* $\mathcal{C}_1$ *et* B *l'intersection de* AY *et* $\mathcal{C}_2$.

Montrer que XO_1O_2 *et* XAB *sont semblables.*

Exercice 3.9 (Second théorème de Miquel.) *Soit* ABC *un triangle,* P *un point de* BC, Q *un point de* CA, R *un point de* AB. *Les cercles circonscrits à* AQR *et à* BRP *ont pour second point d'intersection* X.

Montrer que X *est aussi sur le cercle circonscrit à* CPQ.

Exercice 3.10 (Droite de Simpson.) *Soient ABC un triangle, P un point et A', B', C' ses projetés orthogonaux sur les côtés $(BC), (CA), (AB)$ du triangle.*

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 3.11 *Soit $\mathcal{C}$ un cercle et BC une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc BC. On considère deux cordes de $\mathcal{C}$ passant par A, notons-les AD et AE, et F et G les points d'intersection respectifs de ces cordes avec BC.*

Montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 3.12 *Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite coupant Γ_1 en A et C et $\mathcal{C}_2$ en B et D, les points étant disposés dans l'ordre A, B, C, D sur la droite.*

Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 3.13 (Point de Miquel.) *Soient A, A', B, B' quatre points, C le point d'intersection de (AA') et (BB') et D le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$.*

Montrer que les cercles circonscrits à $CA'B', CAB, DAA', DBB'$ sont concourants.

L'exercice suivant est très important : en effet, de nombreux exercices de chasse aux angles s'avèrent en être des conséquences directes.

Exercice 3.14 (Théorème du cube.) *Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des points tels que A, B, C, D cocycliques, A, A', B, B' cocycliques, B, B', C, C' cocycliques, C, C', D, D' cocycliques, D, D', A, A' cocycliques.*

Montrer que A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 3.15 *Soient A, B, C, D quatre points sur un cercle $\mathcal{C}$. On note A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur BD, et B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et de D sur AC.*

Montrer que les points A', B', C', D' sont cocycliques.

4 Points remarquables dans un triangle

4.1 Centre du cercle circonscrit

Théorème 4.1 *Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes en un point équidistant des trois sommets du triangle.*

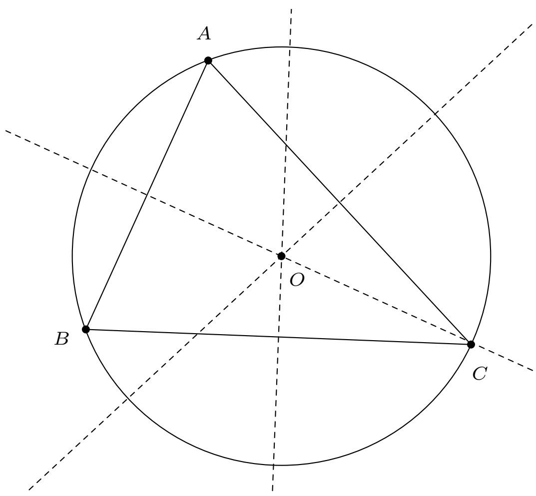
Démonstration. Soit ABC un triangle. Les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ ne sont pas parallèles (sinon (AB) et (BC) seraient perpendiculaires à une même droite, or (AB) et (BC) ne sont pas parallèles).

Ces deux médiatrices ont donc un point d'intersection O. D'après la proposition 2.2, on a donc $OA = OB = OC$. Donc O est équidistant de A et C, donc, réciproquement, d'après la proposition 2.2 O appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$.

Donc les médiatrices de ABC sont concourantes en O, et $OA = OB = OC$. □

Remarque. Comme O est équidistant des trois sommets du triangles, il existe un cercle de centre O qui passe par ces trois sommets.

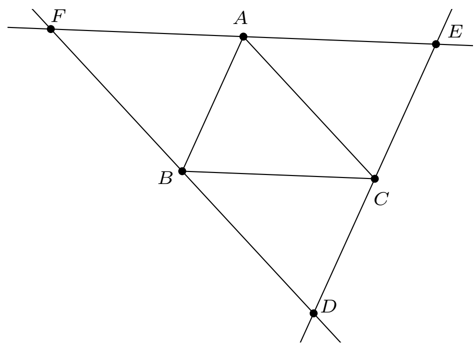
Définition 4.2 *Le cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé le cercle circonscrit au triangle. Son centre, souvent noté O, est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle.*



4.2 Orthocentre

Théorème 4.3 *Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes.*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit DEF le triangle obtenu en prenant les parallèles à (BC), à (CA) et à (AB) passant par A, B, C respectivement.



Par construction, $ACBF$ est un parallélogramme. Donc $AC = BF$. De même, on a $AC = BD$ (en regardant le parallélogramme $ABCD$. Donc $BF = BD$, donc B est le milieu de $[DF]$. De même, A et C sont les milieux respectifs de $[FE]$ et $[ED]$.

Donc les hauteurs dans ABC sont les médiatrices dans DEF. Or, d'après le théorème 4.1, les médiatrices dans DEF sont concourantes.

Donc les hauteurs de ABC sont concourantes. □

Définition 4.4 *Dans un triangle, le point de concours des hauteurs, souvent noté H, est appelé l'orthocentre du triangle.*

Exercice 4.5 *Soit ABC un triangle, A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement, H l'orthocentre.*

Tracer tous les cercles passant par plus de quatre points parmi ceux nommés ci-dessus.

Exercice 4.6 *Soient ABC un triangle dont les trois angles sont aigus, H son orthocentre et A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B et C.*

Calculer les angles de $A'B'C'$ en fonction de ceux de ABC (qu'on notera α, β et γ).

Montrer que H est le centre du cercle inscrit à $A'B'C'$ (la définition du centre du cercle inscrit se trouve quelques pages plus loin).

Exercice 4.7 *Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.*

Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 4.8 (Symétriques de l'orthocentre.) *Soit ABC un triangle d'orthocentre H.*

Montrer que les symétriques de H par rapport à $(AB), (BC), (CA)$ sont sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 4.9 *Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre. Dans ce triangle, on note D le pied de la hauteur issue de A et E le pied de la hauteur issue de C.*

Montrer que O est sur la bissectrice intérieure commune aux angles $\widehat{DHC}$ et $\widehat{AHE}$.

4.3 Centre de gravité

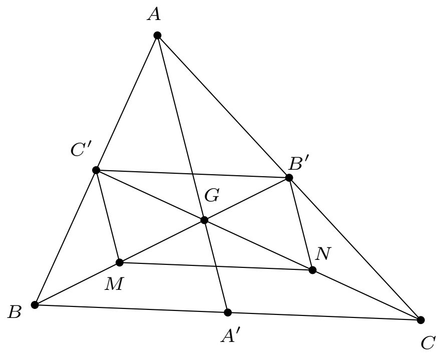
Théorème 4.10 *Soit un triangle ABC, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) les médianes sont concourantes en un point G ;

(ii) ce point partage les médianes aux deux tiers : $AG = \frac{2}{3}AD$;

(iii) la figure formée par les trois médianes partage le triangle en six petits triangles d'aires égales.

Démonstration. Soit G le point d'intersection de (BB') et (CC').



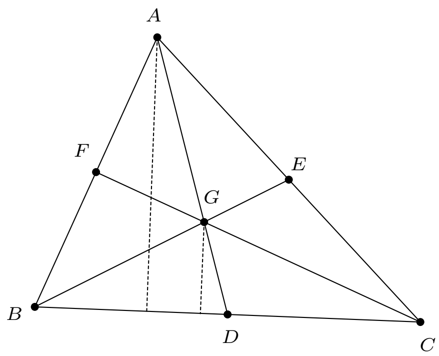
Soit M et N les milieux de $[BG]$ et $[CG]$.

D'après le théorème de la droite des milieux dans ABC, le segment $[B'C']$ est parallèle à $[BC]$ et moitié moins grand. On montre la même propriété pour le segment $[MN]$ en se plaçant dans BCG.

Donc $MNB'C'$ est un parallélogramme. Ainsi $GM = GB'$, d'où $BG = \frac{2}{3}BB'$. On établit de même que $CG = \frac{2}{3}CC'$.

Par symétrie des rôles de A, B, C, on montre de même que le point G' d'intersection de (AA') et (CC') est aux deux-tiers des deux médianes, d'où $G = G'$.

Donc les trois médianes se coupent toutes trois aux deux-tiers de leur longueur en G.



Enfin, comme $GA' = \frac{1}{3}AA'$, d'après le théorème de Thalès, la longueur de la hauteur de GBC issue de G est égale au tiers de la longueur de la hauteur de ABC issue de A (puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à (BC), elles sont parallèles entre elles).

Ainsi, comme $BA' = \frac{1}{2}BC$, compte tenu de la formule :

$$\text{aire} = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur},$$

on obtient que l'aire de GBD vaut $\frac{1}{6}$ de l'aire de ABC.

Le raisonnement est le même pour les cinq petits triangles restants. □

Définition 4.11 *Le point de concours des médianes d'un triangle, souvent noté G, est appelé le centre de gravité du triangle.*

4.4 Centre du cercle inscrit

Théorème 4.12 *Dans un triangle ABC, les bissectrices des trois angles $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont concourantes en un point I. Ce point I est équidistant de $(AB), (BC)$ et (CA).*

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soit I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

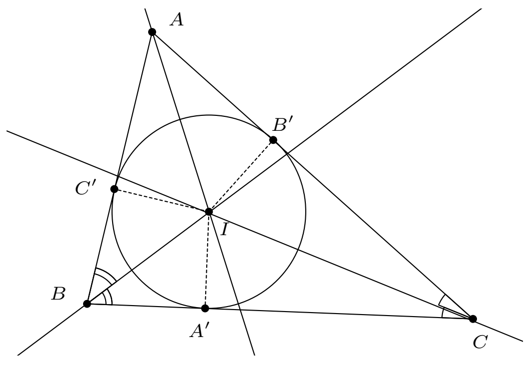
D'après la proposition 2.10, I est équidistant de (BC) et de (BA) d'une part, de (CB) et de (CA) d'autre part. Donc I est aussi équidistant de (AC) et (AB). Donc, d'après la proposition 2.10, I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

Les trois bissectrices sont donc concourantes en I. □

Remarque. Comme I est équidistant de $(AB), (BC)$ et (CA), il existe un cercle de centre I passant par les projetés orthogonaux de I sur $(AB), (BC)$ et (CA). Ce cercle est donc tangent au trois côtés du triangle.

Définition 4.13 *L'unique cercle tangent aux trois côtés d'un triangle est appelé le cercle inscrit de ce triangle. Son centre, souvent noté I, est le point de concours des bissectrices du triangle.*

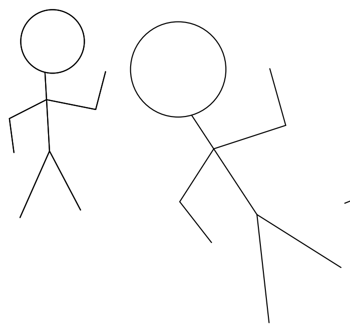
Proposition 4.14 *Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, A et B deux points sur ce cercle tels que les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et en B se coupent en Z. Alors $ZA = ZB$.*



5 Triangles semblables

Dans le langage courant, on dit que deux figures sont semblables lorsqu'elles ont la même “ forme”. Autrement dit, deux figures semblables sont identiques, à leur position sur la feuille et à leur taille près.

Par exemple, les trois bonshommes ci-dessous sont semblables :



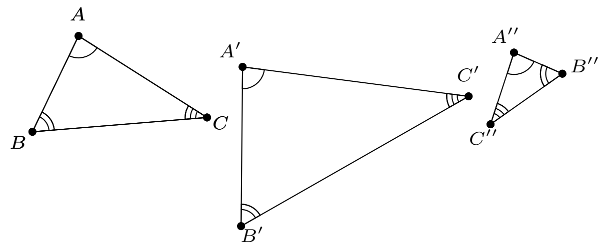
Pour des triangles, le fait d'être semblable est une propriété très intéressante, parce qu'elle relie des égalités d'angles et des égalités de rapports de longueurs ! En effet, dire que deux triangles ont la même “ forme”, c'est dire qu'ils ont les mêmes angles, mais c'est aussi dire que les longueurs de leurs côtés respectifs sont proportionnels !

Ainsi, on donne une proposition rassemblant les définitions équivalentes de triangles semblables :

Proposition 5.1 *Les quatre conditions suivantes sont deux à deux équivalentes :*

- *les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables (ce qui est noté $ABC \sim A'B'C'$),*
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, *et* $\widehat{C} = \widehat{C'}$,
- $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ *et* $\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$,
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$ *et* $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Remarque. Attention, les longueurs dont on prend les rapports dans la troisième condition doivent être celles des segments adjacents aux angles égaux choisis.



Exemple 5.2

Dans cet exemple, $ABC, A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont semblables.

Attention, ce n'est pas pour autant que ABC et $A'C'B'$ sont semblables ! En effet, d'après la définition, cela impliquerait que $\widehat{ABC} = \widehat{A'C'B'}$. Or, s'il semble bien que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, on n'a pas pour autant l'autre égalité : il faudrait pour cela que $\widehat{A'B'C'} = \widehat{A'C'B'}$...

Moralité : il faut toujours faire attention à l'ordre des lettres lorsqu'on écrit que deux triangles sont semblables !

Exercice 5.3 *Quels sont les triangles ABC tels que ABC et ACB sont semblables ? Quels sont les triangles ABC tels que ABC et BCA sont semblables ?*

Exercice 5.4 (Puissance d'un point par rapport à un cercle.) *Soit $\mathcal{C}$ un cercle, P un point à l'extérieur de ce cercle. Soient $(d), (d')$ deux droites passant par P et coupant $\mathcal{C}$ en A, A' (dans cet ordre) et B, B' (dans cet ordre) respectivement.*

Montrer que $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Exercice 5.5 (Lemme d'Euclide.) *Soit ABC un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C.*

Montrer que $AH \times AB = AC^2$.

Montrer que $BH \times BA = BC^2$.

Montrer que $AH \times BH = CH^2$.

Exercice 5.6 (Théorème du pôle sud.) *Soit ABC un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice et de $\mathcal{C}$.*

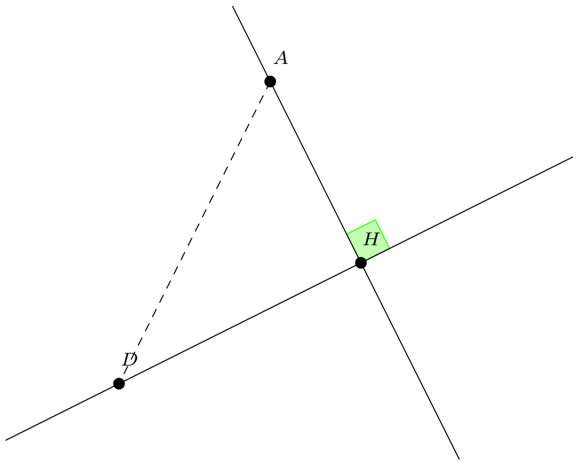
Montrer que S est sur la bissectrice de $[BC]$. Ce point S est appelé le pôle sud de ABC (par rapport à A).

Montrer que $BS = CS = IS$. Le cercle de centre S passant par B, C, I est appelé le cercle antarctique de ABC (par rapport à A).

Montrer que les triangles ABS et BI_AS sont semblables.

6 Solutions des exercices

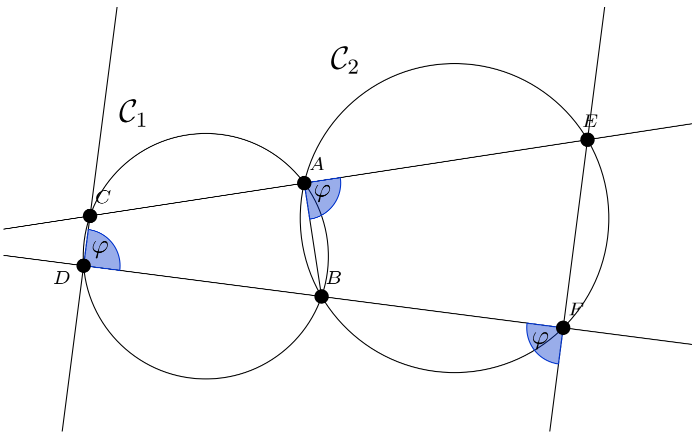
Solution de l'exercice 2.9.



Pour tout point D de (d), le triangle AHD est rectangle en H, donc d'hypoténuse $[AD]$. Or l'hypoténuse d'un triangle rectangle est son plus long côté.

Donc $AD \geq AH$ pour tout D, autrement dit AH est minimale (et H appartient bien à (d)). Donc la distance de A à (d) vaut bien AH.

Solution de l'exercice 3.7.

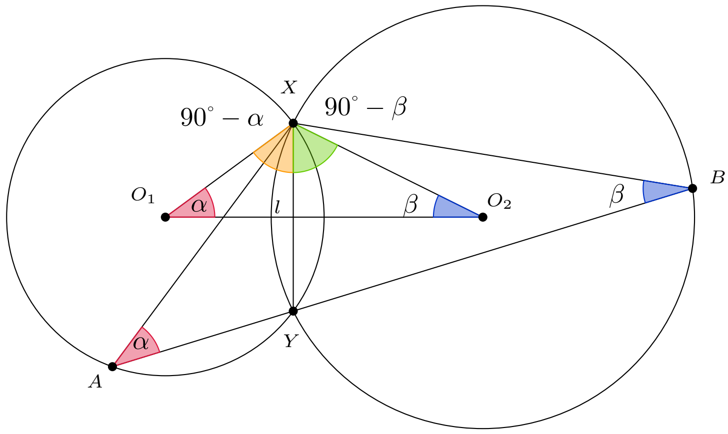


Posons $\varphi := \widehat{CDB}$. Comme les points A, B, C, D sont cocycliques, on obtient que $\widehat{BAC} = 180^\circ - \varphi$. De plus, les points C, A, E sont alignés dans cet ordre. Donc $\widehat{BAE} = \varphi$.

En outre, les points A, B, F, E sont cocycliques. Donc $\widehat{BFE} = 180^\circ - \varphi$.

Donc les droites CD et EF sont parallèles.

Solution de l'exercice 3.8.

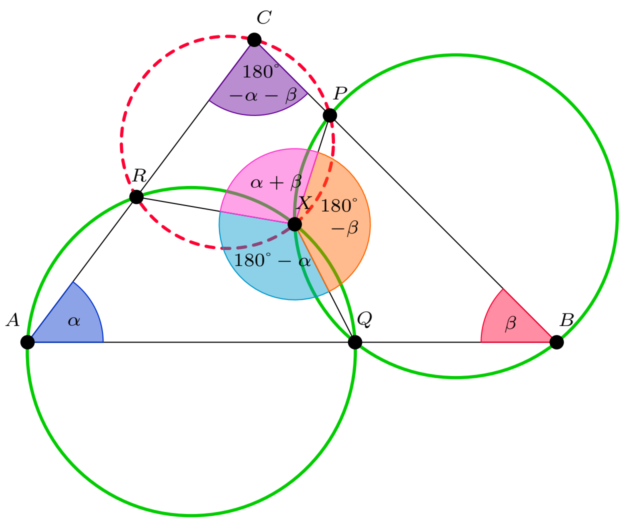


On effectue une chasse aux angles : en posant $\widehat{XAY} = \alpha$, on trouve $\widehat{XO_1Y} = 2\alpha$ grâce au théorème de l'angle au centre. Or, la figure étant symétrique par rapport à l'axe (O_1O_2), on en déduit que $\widehat{XO_1O_2} = \alpha$.

De même, on montre que $\widehat{XBY} = \widehat{XO_2O_1}$, ce qui conclut.

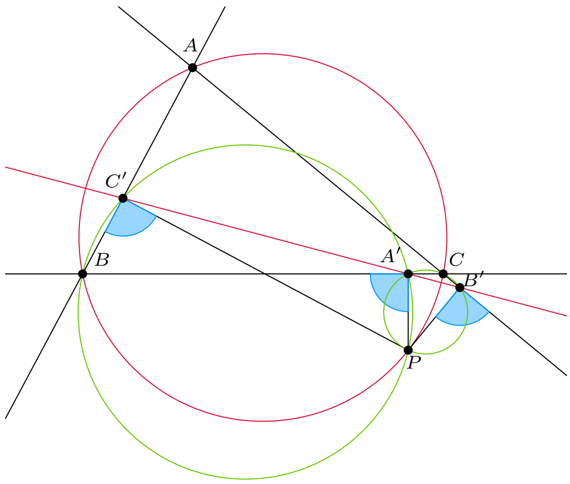
En outre, on remarque au passage que, pour deux cercles de centres O_1 et O_2 s'intersectant en deux points X et Y, les droites O_1O_2 et XY sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 3.9.



On pose $\alpha := \widehat{BAC}$ et $\beta := \widehat{CBA}$. Comme les points A, Q, R, X sont cocycliques, on a $\widehat{QXR} = 180^\circ - \alpha$. De même, on a aussi $\widehat{PXQ} = 180^\circ - \beta$. On en déduit que $\widehat{RXP} = \alpha + \beta = 180^\circ - \widehat{PXC}$, car $\widehat{PXC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{CBA} = 180^\circ - \alpha - \beta$. Donc les points C, P, R, X sont également cocycliques.

Solution de l'exercice 3.10.



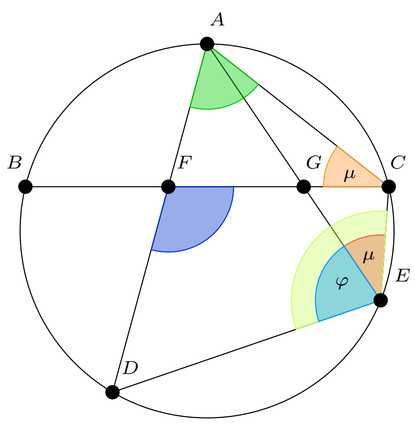
On ne change pas une méthode qui marche : procédons à une chasse aux angles. Grâce aux angles droits, on a P, A', B, C' et P, A', B', C cocycliques. On en déduit :

$$\begin{aligned}(PB, PC) - (AB, AC) &= (PB, PA') + (PA', PC) + (AC, AB)\\ &= (C'B, C'A') + (B'A', B'C) + (B'C, C'B)\\ &= (A'B', A'C')\end{aligned}$$

Ainsi, P est sur le cercle circonscrit à ABC si et seulement si l'angle que nous venons de calculer est nul modulo 180°, ce qui équivaut bien à A', B', C' alignés.

Solution de l'exercice 3.11. En posant $\varphi := \widehat{DEA}$ et $\mu := \widehat{CEA}$, on peut rédiger une chasse aux angles usuelle, en passant par les étapes indiquées sur la figure.

On peut aussi rédiger cette chasse aux angles à l'aide d'angles orientés.



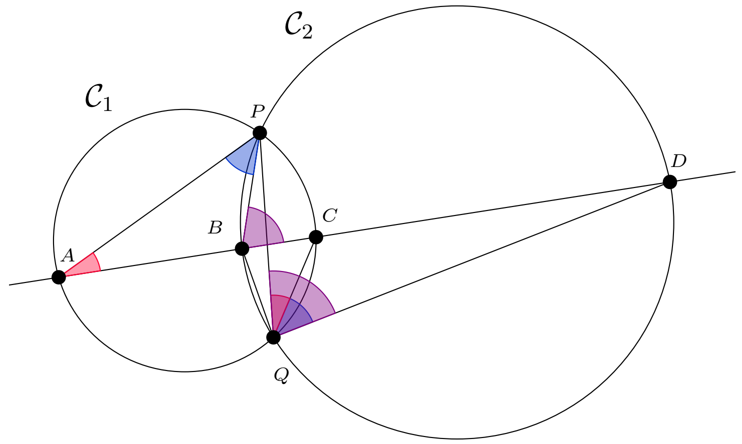
L'angle bleu foncé est de mesure $180^\circ - \varphi$, et l'angle vert est de mesure $180^\circ - \mu - \varphi$.

Pour montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques, il suffit de montrer que $(ED, EG) = (FD, FG)$. Or :

$$\begin{aligned}
(ED, EG) &= (ED, EA), \text{ car les points } E, A, G \text{ sont alignés,}\\
&= (ED, EC) + (EC, EA), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (AD, AC) + (EC, EA), \text{ car les points } A, C, D, E \text{ sont cocycliques,}\\
&= (AD, AC) + (AC, BC), \text{ car les arcs } AB \text{ et } AC \text{ sont de même longueur,}\\
&= (AD, BC), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (FD, BC), \text{ car les points } A, D, F \text{ sont alignés,}\\
&= (FD, FG), \text{ car les points } B, C, F, G \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

Donc les points D, E, F, G sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3.12.



Les angles bleus sont de mesure φ, les angles rouges de mesure μ, et les angles violets de mesure $\varphi + \mu$.

En chasse aux angles usuelle : on pose $\varphi := \widehat{APB}$ et $\mu := \widehat{BAP}$. Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, $\widehat{PBA} = 180^\circ - \varphi - \mu$, d'où $\widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

De plus, comme les points A, C, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{CQP} = \widehat{CAP} = \widehat{BAP} = \mu$.

Enfin, comme les points B, D, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{DQP} = \widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

Ainsi, $\widehat{DQC} = \widehat{DQP} - \widehat{CQP} = \varphi + \mu - \mu = \varphi = \widehat{APB}$, et c'est ce qu'il fallait prouver.

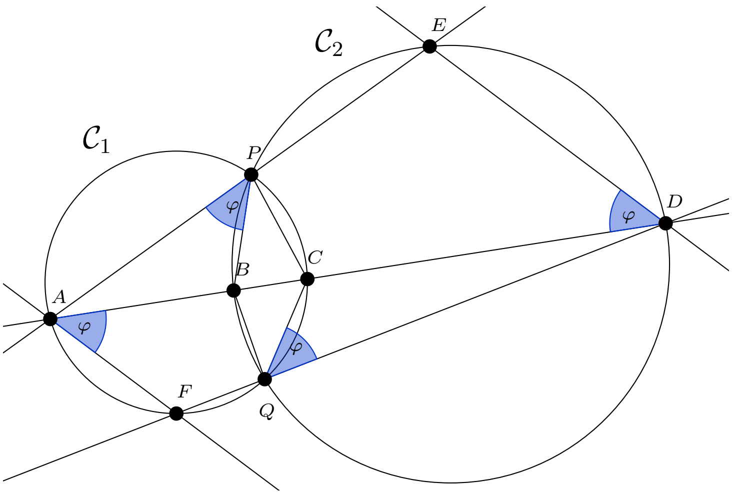
Autre solution :

En angles orientés :

$$\begin{aligned}(AP, BP) &= (AP, AB) + (AB, BP)\\ &= (AP, AC) + (BD, BP),\ \text{car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,}\\ &= (QP, QC) + (BD, BP),\ \text{car les points } A, C, P, Q \text{ sont cocycliques,}\\ &= (QP, QC) + (QD, QP),\ \text{car les points } B, D, P, Q \text{ sont cocycliques,}\\ &= (QD, QC).\end{aligned}$$

Autre solution :

Une autre approche de cet exercice consiste à rajouter les droites AP et DQ. Ces dernières sont en effet assez sympathiques comme on sait qu'elles sont parallèles : c'était l'exercice 3.7.



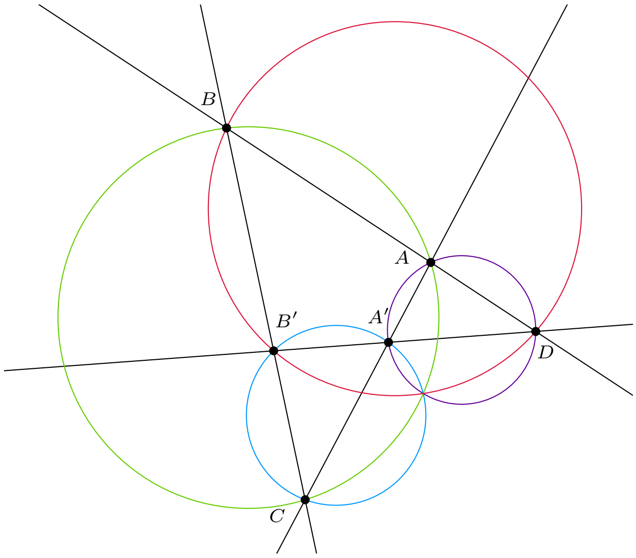
Posons maintenant $\varphi := \widehat{APB}$. On a alors $\widehat{BPE} = 180^\circ - \varphi$, et donc, comme les points B, D, E, P sont cocycliques, $\widehat{BDE} = \varphi$. Comme les droites DE et AF sont parallèles, on a donc $\widehat{FAC} = \varphi$. Comme les points A, C, F, Q sont cocycliques, $\widehat{FQC} = 180^\circ - \varphi$, d'où l'on déduit que $\widehat{DQC} = \varphi$.

Autre solution :

En angles orientés, cela donne :

$$\begin{aligned}(AP, BP) &= (PE, BP),\ \text{car les points } A, E, P \text{ sont alignés,}\\ &= (DE, BD),\ \text{car les points } B, D, E, P \text{ sont cocycliques,}\\ &= (AF, BD),\ \text{car les droites } AF \text{ et } DE \text{ sont parallèles,}\\ &= (AF, AC),\ \text{car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,}\\ &= (QF, QC),\ \text{car les points } A, C, F, Q \text{ sont cocycliques,}\\ &= (QD, QC),\ \text{car les points } D, F, Q \text{ sont alignés.}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.13.



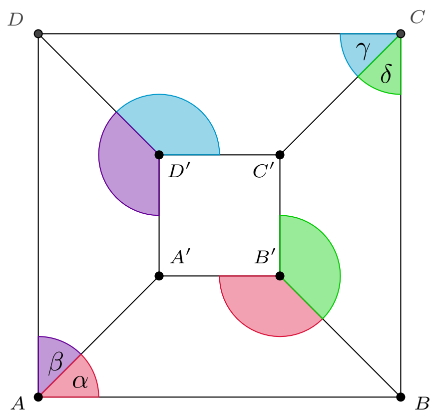
On définit P comme l'intersection des cercles circonscrits à $CA'B'$ et à DBB'. Montrons que P, D, A, A' sont cocycliques et alors, par symétrie, on aura gagné.

Or, par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}(A'P, PD) &= (A'P, PB') + (PB', PD)\\ &= (A'C, CB') + (BB', BD)\\ &= (AA', BB') + (BB', AD)\\ &= (AA', AD),\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3.14. Plutôt que d'utiliser une figure, on représente souvent la configuration du théorème du cube par un diagramme donnant les relations entre les points impliqués. Le théorème dit alors que, si pour cinq faces du " cube", les quatre sommets de la face sont cocycliques, alors c'est aussi vrai pour la sixième face.

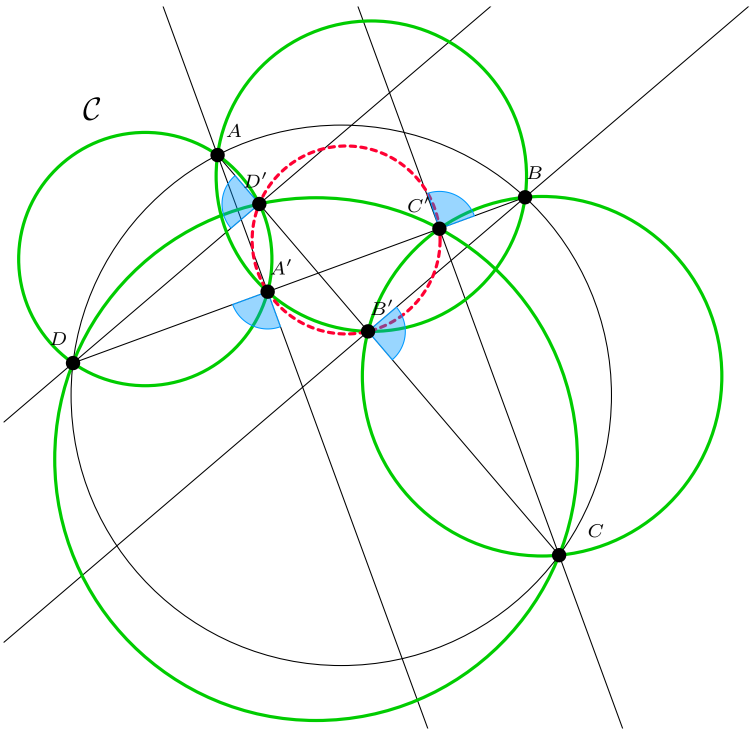


Par cocyclicité, la somme de deux angles de la même couleur vaut toujours 180°. Comme A, B, C, D sont cocycliques, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Donc la somme des quatre angles intérieurs marqués vaut $180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma + 180^\circ - \delta = 540^\circ$.

De plus, la somme des angles autour d'un point vaut 360° : donc on a deux angles opposés dans $A'B'C'D'$ dont la somme vaut $720^\circ - 540^\circ = 180^\circ$.

Donc A', B', C', D' sont cocycliques.

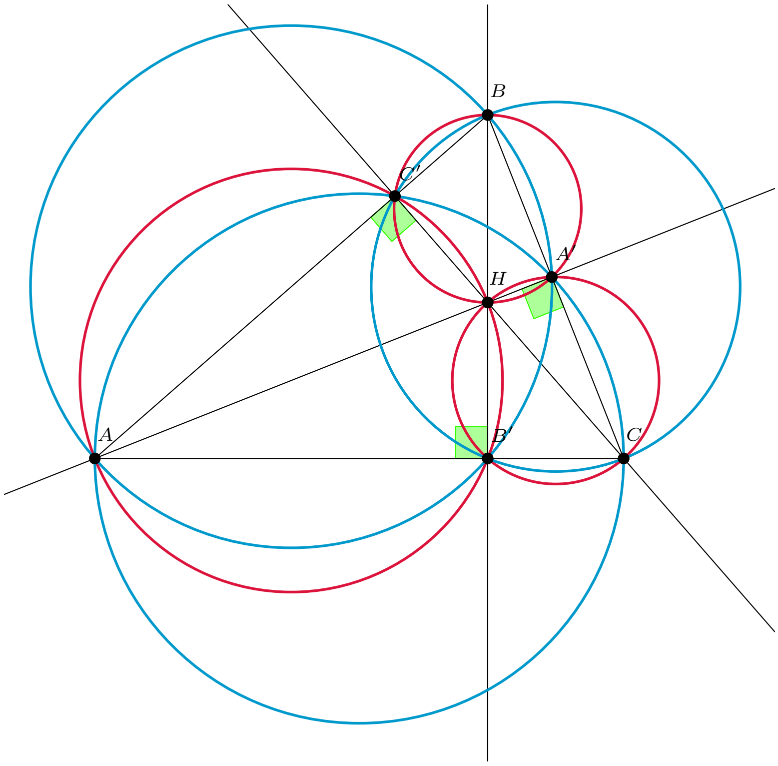
Solution de l'exercice 3.15. Dans cet exercice, les projetés orthogonaux nous donnent beaucoup d'angles droits. Ceci nous permet de trouver beaucoup de points cocycliques : par exemple, $\widehat{AA'B} = 90^\circ$ et $\widehat{AB'B} = 90^\circ$. Ainsi, les points A, A', B, B' sont cocycliques. On obtient de même que B, B', C, C' et C, C', D, D' et $D, D'A, A'$ sont cocycliques, ce qui nous permet de tracer les quatre cercles verts de la figure ci-dessous.



Les angles bleus clair sont de mesure 90°.

Dès lors, d'après le théorème du cube, comme A, B, C, D sont cocycliques, A', B, C', D' le sont aussi.

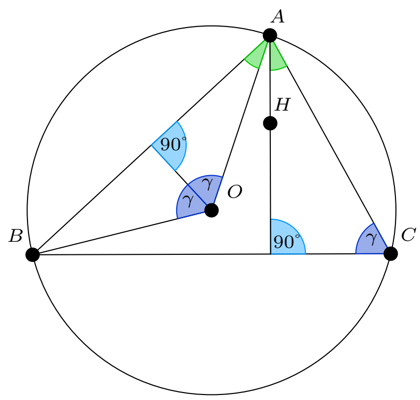
Solution de l'exercice 4.5. D'après le théorème de l'angle inscrit dans le cas particulier d'un angle droit, on peut tracer les six cercles suivants :



Solution de l'exercice 4.6. Réutilisons la figure de l'exercice précédent : comme les points A, C, A' et C' sont cocycliques (sur un cercle bleu), on a $\widehat{BA'C'} = \widehat{180^\circ} - \widehat{CA'C'} = \alpha$. De même A, B, A' et B' sont cocycliques donc $\widehat{CA'B'} = 180^\circ - \widehat{BA'B'} = \alpha$, donc $\widehat{B'A'C'} = 180^\circ - 2\alpha$.

Passons à la deuxième question : on veut montrer que H est sur la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$ (et des trois angles analogues), donc il suffit de vérifier $\widehat{HA'B'} = \widehat{HA'C'}$. Or, H, A', B' et C sont cocycliques (sur un cercle rouge) donc $\widehat{HA'B'} = \widehat{HCB'} = \widehat{C'CA} = 90^\circ - \alpha$ (car ACC' est rectangle en C'). De même en utilisant le cercle rouge passant par H, A', C' et B, on vérifie que $\widehat{HA'C'} = 90^\circ - \alpha$, donc H est bien sur les bissectrices des angles de $A'B'C'$.

Solution de l'exercice 4.7. Cet exercice se résout très bien au moyen d'une chasse aux angles rapide, faisant intervenir les propriétés angulaires de O et de H – propriétés qu'il faut au demeurant maîtriser–.



Les angles verts sont de mesure $90^\circ - \gamma$.

Ainsi, si l'on pose $\widehat{BCA} = \gamma$, comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{BOA} = 2\gamma$. De plus, par définition de O, on a aussi $OA = OB$, et donc le triangle BOA est isocèle en O. Donc $\widehat{BAO} = 90^\circ - \gamma$.

D'autre part, comme H est l'orthocentre du triangle ABC, on sait que le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, noté A', est le point d'intersection des droites AH et BC. Dans le triangle $AA'C$, on connaît deux angles : $\widehat{AA'C} = 90^\circ$ et $\widehat{A'CA} = \gamma$. Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on en déduit que $\widehat{CAA'} = 90^\circ - \gamma$. Donc $\widehat{CAH} = 90^\circ - \gamma$.

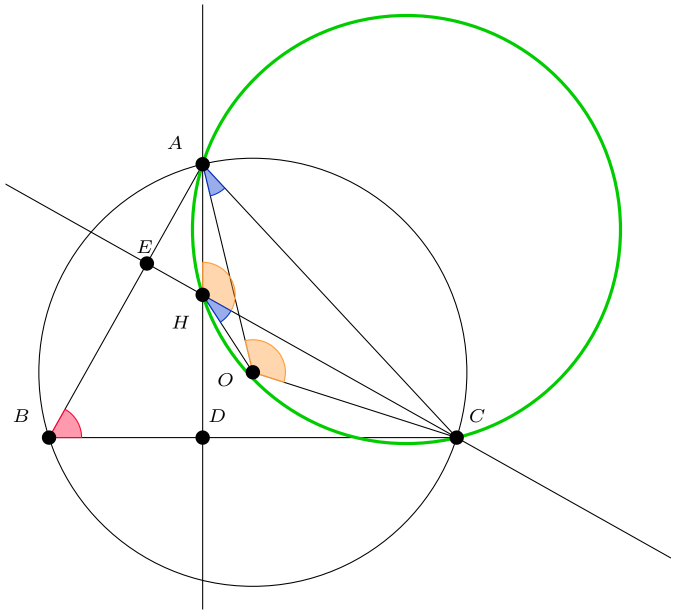
Donc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Solution de l'exercice 4.8. Il suffit de noter H_A le symétrique de H par rapport à (BC) et de montrer que A, B, C, H_A sont cocycliques : le fait que H_B et H_C, définis de façon analogue, soient sur le même cercle, suivra alors par symétrie de l'énoncé.

Or $\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC}$ par symétrie, et on calcule grâce aux angles droits $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{HBC} - \widehat{HCB} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

Donc A, B, C, H_A sont cocycliques, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4.9.



L'angle bleu est de mesure 60°, les angles orange sont de mesure 120°, les angles rouges de mesure 30°.

Comme $\widehat{BDH} = 180^\circ - \widehat{BEH} = 90^\circ$, les points B, D, E, H sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{DHE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Donc $\widehat{AHC} = 120^\circ$.

De plus, comme $\widehat{ABC} = 60^\circ$, d'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

Donc les points A, C, H, O sont cocycliques.

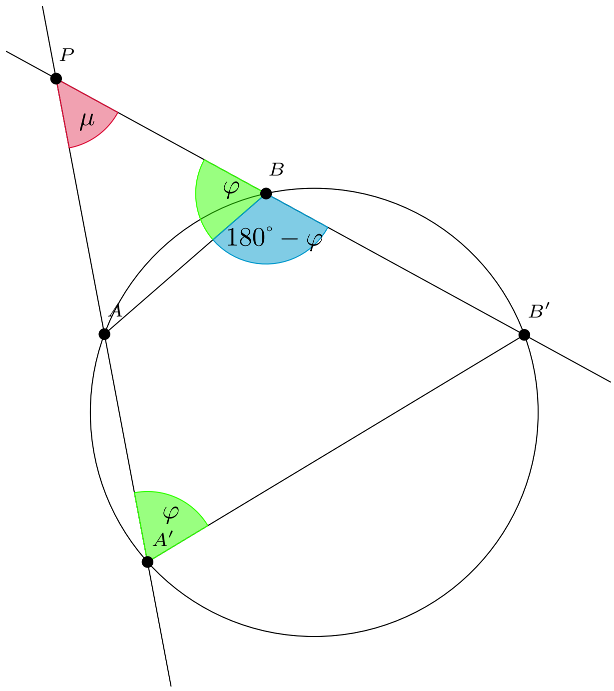
De plus, comme le triangle AOC est isocèle en O, on a $\widehat{OAC} = 30^\circ$. Donc, par cocyclicité, $\widehat{OHC} = 30^\circ$. Comme $\widehat{CHD} = 180^\circ - \widehat{DHE} = 60^\circ$, on a également $\widehat{OHD} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Comme la bissectrice commune des angles $\widehat{AHE}$ et $\widehat{CHD}$ dédouble chacun de ces angles de 60° en deux angles de 30°, tout comme le fait la droite OH, on en déduit que le point O est sur cette bissectrice.

Solution de l'exercice 5.3. Les triangles ABC et ACB sont semblables si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{A}$ et $\widehat{B} = \widehat{C}$ (pas besoin de préciser la troisième égalité d'angle, puisque dans chaque triangle, la somme des angles vaut 180°). Autrement dit, ABC et ACB sont semblables si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A.

Les triangles ABC et BCA sont semblables si et seulement si $\widehat{A} = \widehat{B}$ et $\widehat{B} = \widehat{C}$, ce qui équivaut à ABC équilatéral.

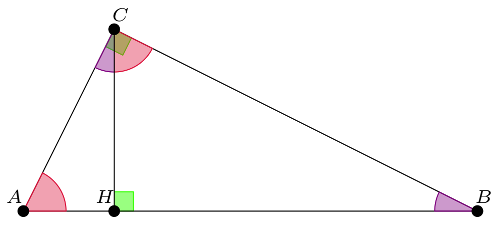
Solution de l'exercice 5.4.



Il semble que PAB et $PB'A'$ sont semblables. De plus, cela suffirait pour conclure : on aurait alors $\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'}$, et c'est ce qu'on veut.

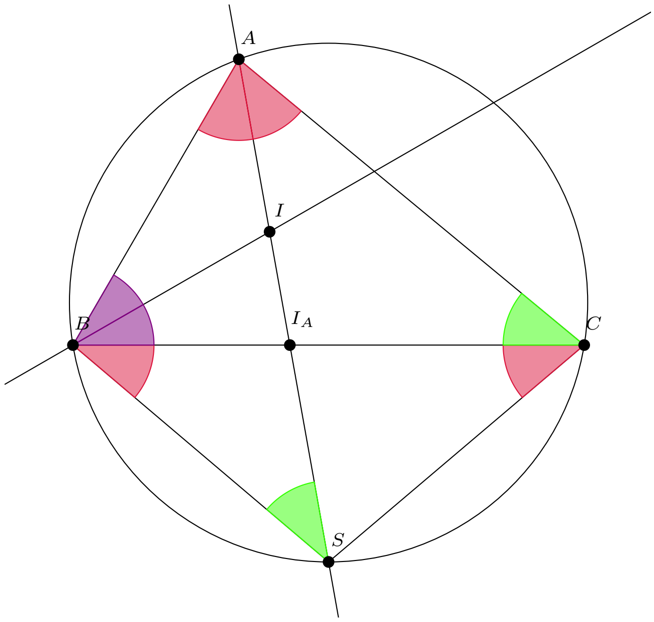
Montrons-le. Tout d'abord, l'angle en P est le même dans les deux triangles ; il reste donc à montrer que $\widehat{PBA} = \widehat{PA'B'}$. Posons $\widehat{PBA} = \varphi$. On a alors $\widehat{ABB'} = 180^\circ - \varphi$, d'où, par cocyclicité, $\widehat{AA'B'} = \varphi$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5.5. Du fait que la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on obtient aisément les égalités d'angles indiquées en couleur sur la figure ci-dessous.



On en déduit que les triangles ABC, ACH et CBH sont semblables.
Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$, d'où $AB \times AH = AC^2$.
Donc $\frac{BA}{BC} = \frac{BC}{BH}$, d'où $BA \times BH = BC^2$.
Donc $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, d'où $AH \times BH = CH^2$.

Solution de l'exercice 5.6. Posons $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \gamma$ et $\widehat{CBA} = \beta$. On a alors $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. On fait une chasse aux angles utilisant le fait que A, B, C, S cocycliques.



Les angles roses sont de mesure $\frac{\alpha}{2}$, les angles verts sont de mesure γ et les angles violets sont de mesure $\frac{\beta}{2}$.

Ainsi, le triangle BCS est isocèle en S, donc S est sur la médiatrice de $[BC]$.

De plus, comme la somme des angles dans un triangle fait 180°, on a $\widehat{BIS} = 180^\circ - \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Donc BIS isocèle en S, d'où $CS = BS = IS$.

Enfin, comme $\widehat{BSA} = \widehat{I_ASB}$ et $\widehat{BAS} = \widehat{I_ABS}$, les triangles ABS et BI_AS sont bien semblables.