

Eliminatoires de la coupe Animath 2017

Questionnaire lycéens

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription à la coupe Animath 2017 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath 2016 ou aux tests d'entrée de l'OFM passés et futurs.

Exercice 1. Déterminer le nombre de quadruplets d'entiers naturels (a, b, c, d) vérifiant $abcd = 98$.

N.B. $(98, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 98, 1)$ sont des quadruplets différents.

Exercice 2. On considère un damier 10×10 , constitué de 100 cases. Combien existe-t-il de carrés qui sont réunion d'une ou plusieurs cases du damier ?

Exercice 3. Bob possède 10% moins d'argent qu'Alice. Après que celle-ci ait acheté un objet, elle possède 10% moins d'argent que Bob. Combien de pourcents de son argent a-t-elle dépensé ?

Exercice 4. Quel est le nombre maximal d'angles inférieurs à 150° que peut avoir un polygone non croisé à 2017 côtés dont tous les angles sont strictement inférieurs à 180° ?

Exercice 5. Déterminer le nombre d'entiers n tels que $1 \leq n \leq 10^{10}$, et tels que pour tout $k = 1, 2, \dots, 10$, l'entier n soit divisible par k .

Exercice 6. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties (éventuellement vides) de $\{1, 2, \dots, 10\}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.

N.B. Si $A \neq B$ alors $(A, B) \neq (B, A)$.

Exercice 7. Quel est le nombre d'anagrammes du mot AAABBBBCDEF telles que trois lettres consécutives ne soient jamais identiques ?

Exercice 8. Déterminer le nombre d'entiers naturels a tels que $a^2 + a + 100$ soit le carré d'un entier.

Exercice 9. Soient x, y, z des entiers relatifs tels que pour tout triangle ABC on ait $16HN^2 = xBC^2 + yCA^2 + zAB^2$, où H est le pied de la hauteur issue de A , M est le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AM]$. Déterminer $x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 16. Trois cercles de même rayon r sont tangents entre eux deux à deux, et chacun de ces cercles est tangent à deux côtés du triangle. Le rayon r s'écrit $r = \sqrt{a} - b$ où a et b sont des entiers. Déterminer $a + b$.

Exercice 11. Soient $a < b < c$ les solutions de l'équation $2016x^3 - 4x + \frac{3}{\sqrt{2016}} = 0$. Déterminer la valeur de $-1/(ab^2c)$.

Exercice 12. On définit $u_1 = 17 \times (1 + 2)$, $u_2 = 17^2 \times (2 + 2)$, et plus généralement $u_n = 17^n \times (n + 2)$ pour tout entier $n \geq 1$. Soient a et b des nombres réels tels que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n . Déterminer $a^2 - b$.