Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH

Mardi 6 juin 2017

Corrigé

Exercice 1. *N.B. Dans cet exercice, et uniquement celui-ci, on demande une réponse sans justification.*
Soit $m > n > p$ trois nombres (entiers positifs) premiers tels que $m + n + p = 74$ et $m - n - p = 44$. Déterminer m, n et p.
(Un nombre premier est un entier strictement plus grand que un, et dont les seuls diviseurs sont un et lui-même.)

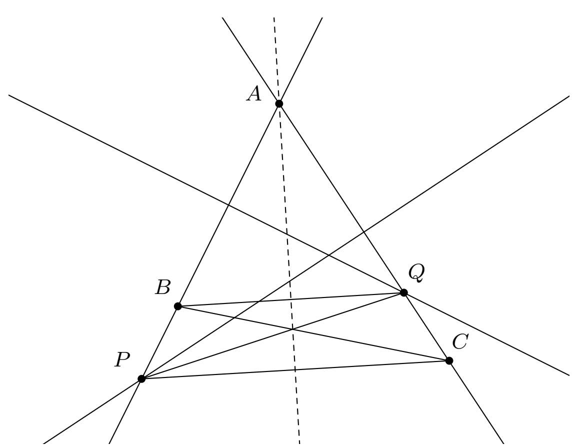
Solution de l'exercice 1 On trouve $m = 59$, $n = 13$ et $p = 2$. Donnons quand même une justification. On a $2m = (m + n + p) + (m - n - p) = 74 + 44 = 118$, donc $m = 59$. Il vient $n + p = 74 - 59 = 15$. Comme $n + p$ est impair, l'un des deux nombres est pair. Or, l'unique nombre premier pair est 2, donc $p = 2$ et $n = 13$.

Exercice 2. Montrer que si n est un nombre entier à cinq chiffres, et m le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres (par exemple si $n = 34170$ alors $m = 07143$), alors l'écriture de $n + m$ comporte au moins un chiffre pair.

Solution de l'exercice 2 On suppose que $n + m$ ne comporte que des chiffres impairs, et on montre que l'on aboutit à une absurdité.
Notons $abcde$ l'écriture décimale de n. Comme le chiffre des unités de $n + m$ est impair, $a + e$ doit être impair.
Si $a + e < 10$, alors il n'y a pas de retenue dans les dizaines, donc $b + d$ est impair. Pour que le chiffre des centaines soit impair, il faut qu'il y ait une retenue, donc $b + d \geqslant 10$. Il y a donc une retenue dans la colonne des dix milliers, donc le chiffre des dix milliers a la même parité que $a + e + 1$ qui est pair, ce qui est absurde.
Si $a + e \geqslant 10$ alors il y a une retenue dans la colonne des dizaines, donc $b + d$ est pair. De plus, comme il y a une retenue dans la colonne des centaines (même raisonnement que ci-dessus), on a $b + d + 1 \geqslant 10$. Comme $b + d$ est pair, nécessairement $b + d \geqslant 10$ donc il y a une retenue dans la colonne des dix milliers, ce qui aboutit comme ci-dessus à une absurdité.

Exercice 3. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. La médiatrice de $[AC]$ coupe (AB) en P, et la médiatrice de $[AB]$ coupe (AC) en Q. Montrer que $PQ = BC$.

Solution de l'exercice 3



Par définition de la médiatrice, le triangle ACP est isocèle en A. Comme $\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = 60°$, il est équilatéral. De même, le triangle ABQ est équilatéral. On a donc $AP = AC$ et $AQ = AB$. Soit s la symétrie axiale dont l'axe est la bissectrice de $\widehat{BAC}$. On a donc $s(C) = P$ et $s(B) = Q$, donc $[PQ]$ est le symétrique de $[BC]$, d'où $PQ = BC$.

Exercice 4. On donne cinq nombres dans l'ordre croissant, qui sont les longueurs des côtés d'un quadrilatère (non croisé, mais non nécessairement convexe, c'est-à-dire qu'une diagonale n'est pas nécessairement à l'intérieur du polygone) et d'une de ses diagonales D. Ces nombres sont $3, 5, 7, 13$ et 19. Quelle peut être la longueur de la diagonale D ?

Solution de l'exercice 4 On peut reformuler le problème : notons a, b, c, d les longueurs des côtés du quadrilatère, et e la longueur de la diagonale qui sépare d'une part les côtés de longueur a et b, d'autre part les côtés de longueur d et e. Il faut et il suffit que les triplets (a, b, e) et (c, d, e) vérifient l'inégalité triangulaire.
Si $e = 3$ ou $e = 5$, le triplet contenant 19 ne conviendra pas car $19 - 3 > 13$ et $19 - 5 > 13$: le côté de longueur 19 est trop grand.
Si $e = 13$, il faut simultanément $a + b > 13$ et $c + d > 19$. Or si a ou $b = 19$, alors $c + d \leq 5 + 7 < 13$, de même si c ou $d = 19$. Donc on ne peut avoir $e = 13$. On vérifie qu'il en va de même pour $e = 19$.
Reste donc $e = 7$. On peut alors avoir $a = 3, b = 5, c = 13, d = 19$ par exemple.

Exercice 5. On a écrit un nombre au tableau. À chaque étape, on lui ajoute le plus grand de ses chiffres (par exemple, si on a écrit 142, le nombre suivant sera 146). Quel est le plus grand nombre possible de nombres impairs que l'on peut écrire consécutivement en procédant de la sorte ?

Solution de l'exercice 5 La réponse est 5. Supposons qu'on parte d'un nombre impair n. On note n_i le i-ème nombre écrit avec $n_1 = n$. Soient aussi c_i et d_i le plus grand chiffre et le chiffre des unités de n_i. Si c_1 est impair, alors $n_2 = n_1 + c_1$ est pair, et on n'a écrit qu'un seul nombre impair. Notons aussi que c_1 ne peut pas être égal à 0.
Si $c_1 = 2$,alors $d_1 = 1$. On a $n_2 = n_1 + 2$, donc $c_2 = 3$ et $d_2 = 3$, puis $n_3 = n_2 + 3$ est pair. Le troisiéme nombre écrit est donc pair.
Si $c_1 = 4$, alors d_1 peut valoir 1 ou 3. Si $d_1 = 1$, alors $n_2 = n_1 + 4$ donc $c_2 = 5$ et $d_2 = 5$, donc $n_3 = n_2 + 5$ est pair. Si $d_1 = 3$, alors $n_2 = n_1 + 4$ donc $c_2 = 7$ et $d_2 = 7$, donc $n_3 = n_2 + 7$ est pair.
Si $c_1 = 6$, alors d_1 peut valoir 1, 3 ou 5. Dans les deux premiers cas, on obtient n_3 pair comme précédemment. Si $d_1 = 5$, alors $n_2 = n_1 + 6$ donc $d_2 = 1$. De plus, le plus grand chiffre soit reste le même ($c_2 = 6$), soit augmente de 1 ($c_2 = 7$). Dans le second cas, $n_3 = n_2 + 7$ est pair. Dans le premier, $n_3 = n_2 + 6$ donc $d_3 = 7$ et $c_3 = 7$ donc $n_4 = n_3 + 7$ est pair.
Si $c_1 = 8$, alors d_1 peut valoir $1, 3, 5$ ou 7.

- si $d_1 = 1$, on obtient $c_2 = d_2 = 9$ donc n_3 est pair.
- si $d_1 = 3$, alors $d_2 = 1$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 1$) donc n_4 est pair.
- si $d_1 = 5$, alors $d_2 = 3$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 3$) donc n_4 ou n_5 est pair.
- si $d_1 = 7$, alors $d_2 = 5$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 5$) donc n_4 ou n_5 ou n_6 est pair.

Il est donc impossible d'écrire successivement 6 entiers impairs. Par ailleurs, si on commence par 807, on écrira successivement 807, 815, 823, 831 et 839, donc on peut écrire successivement 5 entiers impairs.

Exercice 6. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que pour tout entier $d \geqslant 2$, si d est un diviseur de n alors $d - 1$ est un diviseur de $n - 1$.

Solution de l'exercice 6 Si n est un nombre premier, alors $d = n$ est l'unique diviseur ≥ 2 de n, donc n convient.
Si $n = p^2$ est le carré d'un nombre premier, alors $d = p$ ou $d = n$. Or, $p-1$ divise $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ et $n-1$ divise $n-1$, donc n convient.
Réciproquement, supposons que n ne soit ni un nombre premier, ni le carré d'un nombre premier. Soit a le plus petit diviseur ≥ 2 de n. Alors $n = ab$ avec $1 < a \leq b < n$. Comme n n'est pas le carré d'un nombre premier, on a $a < b$ (puisque a est un nombre premier).
Comme $b-1$ est un diviseur de $n-1$, on peut écrire $n - 1 = k(b-1)$ pour un certain entier k, donc $k(b-1) = ab - 1 = (b-1)a + a - 1$, ce qui implique que $a - 1 = (b-1)(k-a)$ est un multiple de $b-1$. Comme $a - 1 > 0$, on a $a - 1 \geq b - 1$, ce qui contredit que $a < b$.
Conclusion : les entiers qui conviennent sont les nombres premiers et les carrés des nombres premiers.

Exercice 7. Un stage de mathématiques contient exactement un million d'élèves, certains d'entre eux étant amis (si A est un ami de B, alors B est un ami de A).

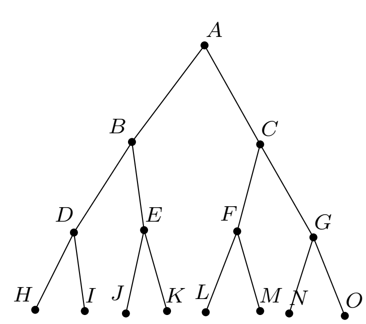
a) On suppose que chaque élève a au plus deux amis. Montrer qu'il est possible d'aligner les élèves de telle manière que si deux élèves sont amis, il y a au plus 2017 élèves entre eux.

b) On suppose maintenant que chaque élève a au plus trois amis. Montrer que ce n'est plus forcément possible.

Solution de l'exercice 7 Numérotons les élèves de 1 à 1000000. On place l'élève 1 tout à droite, en position 1. Si l'élvè 1 a un ou deux amis, on les place en positions 2 et éventuellement 3. Puis on place en position 4 et 5 les seconds amis de 2 et 3 s'ils existent, et ainsi de suite. À chaque étape, on a au plus 2 élèves à placer. On ne peut s'arrêter que dans 3 cas :

- On a placé tous les élèves, auquel cas on a gagné.
- Les deux élèves placés à l'étape précédente sont amis,, auquel cas on place un nouvel élève à la première place disponible et on recommence.
- Les élèves placés à l'étape précédente n'ont pas d'ami supplémentaire n'ont pas d'autres amis, auquel cas on place un nouvel élève à la première place disponible et on recommence.

Ainsi, on peut même placer les élèves de telle manière qu'entre deux amis il y a au plus 1 élève !
Si chaque élève a trois amis, cela ne marche plus. En effet, supposons que les relations d'amitié soient décrites par un arbre binaire complet de hauteur 18 (voir schéma ci-dessous, où on n'a représenté que les quatre premiers étages). C'est possible car $2^{19} < 1000000$.



Alors l'élève A a deux amis, appelons-les B et C qui doivent chacun être à distance au plus 2018 de A. Les deux amis de B et de C doivent chacun être à distance au plus 2018 de B ou de C, donc à distance au plus 2×2018 de A. Ainsi, tous les élèves qui sont connectés à A dans l'arbre (il y en a $2^{19} - 1 > 500000$) doivent être à distance au plus $19 \times 2018 < 40000$ de A. Cependant, au maximum $2 \times 40000 = 80000$ élèves peuvent être aussi proches de A, donc on ne peut pas placer les élèves.