Eliminatoires de la coupe Animath 2016

Questionnaire lycéens

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription à la coupe Animath 2016 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath 2015 ou aux tests d'entrée de l'OFM passés et futurs.

Exercice 1. Une plante A grandit de 2 cm par jour, et une plante B de 3 cm par jour. Aujourd'hui, B est 6 fois plus grande que A. Dans 20 jours, elle sera 4 fois plus grande que A. Déterminer la somme des âges actuels de A et de B (exprimée en jours).

Exercice 2. Déterminer la somme de tous les entiers naturels a tels que $\dfrac{2 \times 16^{95}}{2^{13a}}$ soit la puissance 17-ième d'un entier.

Exercice 3. Un pion se déplace sur un échiquier 6×6. Il part de la case en bas à gauche. A chaque étape, il peut sauter soit sur la case juste à droite, soit sur la case juste en haut, et doit rejoindre la case en haut à droite, de sorte qu'il ne se trouve jamais strictement au-dessus de la diagonale reliant la case de départ et la case d'arrivée. Déterminer le nombre de chemins possibles.

Exercice 4. Soient ABC et ABD deux triangles rectangles en C et D respectivement, tels que C et D ne soient pas dans le même demi-plan délimité par (AB). On note E le milieu de $[AB]$. Calculer la mesure en degrés de l'angle (saillant) $\widehat{CED}$ sachant que $\widehat{BAC} = 14°$ et $\widehat{BAD} = 17°$.

Exercice 5. Soit $u_1, u_2, u_3, \dots$ une suite de nombres réels tels que $u_1 = 7$, $u_{2016} = 6102$ et $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$ pour tout n. Déterminer la valeur u_{4031}.

Exercice 6. m, n, p, q sont des entiers tels que $a^4 + ma^3 + na^2 + pa + q = 0$, où $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Déterminer $m^2 + n^2 + p^2 + q^2$.

Exercice 7. Déterminer le nombre d'entiers $n \geqslant 1$ vérifiant les deux conditions suivantes:
(i) le produit de tous les entiers naturels qui divisent n est égal à n^2 ;
(ii) n n'est divisible par aucun nombre premier $\geqslant 10$.

Exercice 8. Quel est le plus grand entier qui divise tous les entiers de la forme $a(a+2)(a+4)$ $(a \in \mathbb{N}^*)$?

Exercice 9. Soit a_n le nombre de manières de colorier chaque case d'un échiquier $2 \times n$ en bleu ou en rouge, de sorte que deux cases bleues ne soient jamais adjacentes (deux cases sont dites adjacentes si elles ont une arête commune). On a par exemple $a_1 = 3$. Déterminer a_{10}.

Exercice 10. Soit $S = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$. Trouver le plus grand entier n vérifiant la propriété suivante : il existe un sous-ensemble A de S possédant n éléments tel que la différence de deux éléments quelconques de A ne divise jamais leur somme.

Exercice 11. ABC est un triangle isocèle en A tel que AB et BC soient des entiers. On suppose que $BI = 8$, où I est l'intersection des bissectrices de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Calculer $AB + BC$.

Exercice 12. Quatre points A, O, B, O' sont alignés dans cet ordre sur une droite. Soit C le cercle de centre O et de rayon 2015, et C' le cercle de centre O' et de rayon 2016. On suppose que A et B sont des intersections de deux tangentes communes aux deux cercles. Calculer AB sachant que AB est un entier $< 10^7$ et que AO et AO' sont des entiers.