Eliminatoires de la coupe Animath 2016

Questionnaire collégiens

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription à la coupe Animath 2016 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath 2015 ou aux tests d'entrée de l'OFM passés et futurs.

Exercice 1. Soit A le nombre $A = \frac{3}{4+(\sqrt{3})^6} + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$. On écrit A sous la forme d'une fraction irréductible $A = \frac{a}{b}$ (i.e. a et b entiers naturels et a est le plus petit possible). Calculer $a+b$.

Exercice 2. Soient a et b des entiers naturels tels que $\frac{a}{b}$ soit une fraction irréductible. On suppose que $c = \frac{(1+\sqrt{2})^3}{\frac{a}{b}+\sqrt{2}}$ est un entier naturel. Calculer $a+b+c$.

Exercice 3. p et q sont deux nombres premiers tels que $q-p$ et $q+p$ sont premiers. Que vaut $p+q$?

Exercice 4. Combien y a-t-il d'entiers n compris entre 1 et 1000 tels que $3n+1$ soit divisible par 10 ?

Exercice 5. 100 points sont disposés de manière régulière sur un cercle. On trace toutes les droites reliant deux voisins quelconques. Combien de points d'intersection obtient-on au total (y compris les 100 points de départ) ?

Exercice 6. On dispose n personnes en cercle. Au départ, l'une d'entre elles dispose de n jetons, et les autres aucun. A chaque étape, une personne peut donner un jeton au voisin de l'un de ses voisins. On suppose qu'il est possible que, après un certain nombre d'étapes, chaque personne possède exactement 1 jeton.

Déterminer le nombre de valeurs possibles de n, sachant que $1 \leqslant n \leqslant 2016$.

Exercice 7. $ABCD$ est un carré, et EFG est un triangle équilatéral, tels que les points A, E, B, F, C, D, G soient sur un même cercle et dans cet ordre, et tels que $AE = EB$. Déterminer la valeur en degrés de l'angle $10 \times \widehat{DAG}$.

Exercice 8. Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 12$ et $BC = 13$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. On écrit HA sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Calculer $a+b$.

Exercice 9. Une plante A grandit de 2 cm par jour, et une plante B de 3 cm par jour. Aujourd'hui, B est 6 fois plus grande que A. Dans 20 jours, elle sera 4 fois plus grande que A. Déterminer la somme des âges actuels de A et de B (exprimée en jours).

Exercice 10. Déterminer la somme de tous les entiers naturels a tels que $\frac{2 \times 16^{95}}{2^{13a}}$ soit la puissance 17-ième d'un entier.

Exercice 11. Un pion se déplace sur un échiquier 6×6. Il part de la case en bas à gauche. A chaque étape, il peut sauter soit sur la case juste à droite, soit sur la case juste en haut, et doit rejoindre la case en haut à droite, de sorte qu'il ne se trouve jamais strictement au-dessus de la diagonale reliant la case de départ et la case d'arrivée. Déterminer le nombre de chemins possibles.

Exercice 12. Soient ABC et ABD deux triangles rectangles en C et D respectivement, tels que C et D ne soient pas dans le même demi-plan délimité par (AB). On note E le milieu de $[AB]$. Calculer la mesure en degrés de l'angle (saillant) $\widehat{CED}$ sachant que $\widehat{BAC} = 14°$ et $\widehat{BAD} = 17°$.