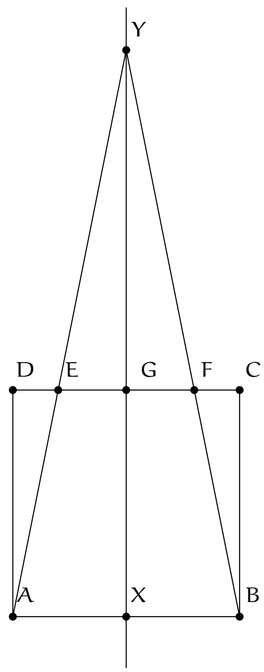
Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH
Mardi 31 mai 2016

CORRIGÉ

Exercice 1. N.B. Dans cet exercice, et uniquement celui-ci, on demande une réponse sans justification.
Soit $ABCD$ un carré de côté $10\,\mathrm{cm}$. On note X le milieu de $[AB]$. On place un point Y tel que le triangle ABY est isocèle en Y, et la zone qui est à la fois à l'intérieur de ABY et de $ABCD$ a une aire de $99\,\mathrm{cm}^2$. Combien vaut XY ?

Solution de l'exercice 1



Notons E et F les points d'intersection de (AY) et de (BY) avec (CD). Soit G le milieu de $[CD]$.
Pour des raisons de symétrie, l'aire de ADE vaut $\frac{1}{2}(100-99) = 1/2\,\mathrm{cm}^2$. On en déduit que $\frac{1}{2} \times AD \times DE = \frac{1}{2}$, ce qui donne $DE = \frac{1}{10}$, et donc $EG = \frac{49}{10}$. Or, d'après le théorème de Thalès on a $\frac{ED}{EG} = \frac{DA}{GY}$, donc $GY = DA \times \frac{EG}{ED} = 10 \times 49 = 490$, ce qui donne $XY = 500\,\mathrm{cm}$.

Remarque Si on ne connaît pas le théorème de Thalès, on peut raisonner comme suit : soit $x = XY$. L'aire du triangle ABY vaut $\frac{1}{2} \times AB \times XY = 5x$ et celle de EFY vaut $\frac{1}{2} \times EF \times GY = \frac{49}{10}(x-10)$. L'aire du quadrilatère $ABEF$ est la différence des deux, d'où $99 = 5x - \frac{49}{10}(x-10) = \frac{1}{10}x + 49$, donc $\frac{1}{10}x = 50$ et finalement $x = 500\,\mathrm{cm}$.

Exercice 2. Anne a conduit sa voiture pendant un nombre entier (et non nul) d'heures, et a parcouru un nombre entier de kilomètres, à la vitesse de $55\,\mathrm{km/h}$. Au début du trajet, le compteur indiquait abc kilomètres, où abc est un nombre de 3 chiffres tel que $a \geqslant 1$ et $a+b+c \leqslant 7$. A la fin du trajet, le compteur indiquait cba kilomètres. Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre abc.

Solution de l'exercice 2 Soit d la durée du trajet exprimée en heures. On a $55d = (100c+10b+a)-(100a+10b+c) = 99(c-a)$. Ceci se simplifie en $5d = 9(c-a)$. Ceci implique que $c-a$ est un multiple de 5. D'autre part, $c-a = 5d/9 > 0$ et $c-a \leqslant c < 10$, donc $c-a = 5$.

Si $a = 1$ alors $c = 6$, et comme $a + b + c \leqslant 7$ on en déduit que $abc = 106$.
Si $a > 1$ alors $c = 5 + a > 6$ donc $a + b + c > 7$, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc l'unique valeur possible de abc est 106.

Exercice 3. 2016 personnes sont en file indienne. Chacune d'elles est soit un truand (qui ment toujours), soit un chevalier (qui dit toujours la vérité). Chacune des 2016 personnes sait qui sont les truands et les chevaliers. Chaque personne, excepté celle qui est tout devant, désigne l'une des personnes devant elle et dit l'une des deux phrases : "cette personne est un truand" ou "cette personne est un chevalier". Sachant qu'il y a strictement plus de truands que de chevaliers, comment un observateur peut-il déterminer qui est un truand et qui est un chevalier ?

Solution de l'exercice 3 Si la personne A désigne la personne B, et si elle dit "B est un chevalier" alors A et B sont dans le même groupe. Inversement, si elle dit "B est un truand", alors A et B sont dans des groupes différents.
Numérotons les personnes $P_1, \ldots, P_{2016}$, la personne P_1 étant tout devant.
P_2 est obligée de désigner P_1, donc l'observateur sait si P_2 est dans le même groupe que P_1.
P_3 est obligée de désigner, soit P_1, soit P_2, donc l'observateur sait si P_3 est dans le même groupe que P_1.
En continuant le raisonnement, l'observateur peut déterminer exactement quelles sont les personnes qui sont dans le même groupe que P_1 et celles qui ne le sont pas.
Comme le groupe le plus nombreux est constitué de truands, l'observateur en déduit si P_1 est un truand ou un chevalier, puis détermine qui est un chevalier et qui est un truand.

Exercice 4. Dans le plan, on considère un trapèze $ABCD$ dont les diagonales sont de même longueur. Prouver que, pour tout point M du plan, la somme des distances de M à trois sommets quelconques du trapèze est toujours strictement plus grande que la distance de M au quatrième sommet.

Solution de l'exercice 4 D'après l'inégalité triangulaire, on a $MA \leqslant MC + CA = MC + BD \leqslant MC + BM + MD$. L'égalité a lieu si et seulement si $C \in [MA]$ et $M \in [BD]$. Si ces deux conditions sont vérifiées, nécessairement M se trouve à la fois sur (AC) et (BD), donc M est l'intersection des diagonales. Mais dans ce cas, la condition $C \in [MA]$ ne peut pas être satisfaite. On en déduit que $MA < MB + MC + MD$. Par symétrie des rôles de A, B, C, D, les autres inégalités similaires sont également satisfaites.

Exercice 5. Soient $a < b < c < d < e$ des nombres réels. On calcule toutes les sommes possibles de deux nombres distincts parmi ces cinq nombres. Les trois plus petites valent 32, 36 et 37 et les deux plus grandes valent 48 et 51. Trouver toutes les valeurs possibles de e.

Solution de l'exercice 5 Les deux plus petites sommes sont $a + b < a + c$ donc $a + b = 32$ et $a + c = 36$. De même, les deux plus grandes sont $c + e < d + e$ donc $c + e = 48$ et $d + e = 51$. La troisième plus petite somme peut être soit $a + d$ soit $b + c$. Dans le premier cas, on a $a + d = 37$ donc d'une part $a+c+d+e = (a+c)+(d+e) = 36+51 = 87$ et d'autre part $a+c+d+e = (a+d)+(c+e) = 37+48 = 85$, ce qui est absurde.
On est donc dans le deuxième cas donc $b+c = 37$. On en déduit $2(a+b+c) = (a+b)+(a+c)+(b+c) = 105$ donc $c = \frac{105}{2} - 32 = \frac{41}{2}$, puis $e = 48 - \frac{41}{2} = \frac{55}{2}$.

Exercice 6. Dans un polygone convexe à 2016 côtés, on trace certaines diagonales, qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone. Ce dessin décompose le polygone en 2014 triangles. Est-il possible qu'exactement la moitié de ces triangles aient leurs trois côtés qui soient des diagonales ?

Solution de l'exercice 6 Soit a le nombre de triangles dont les trois côtés sont des diagonales, b le nombre de triangles dont deux côtés sont des diagonales et c le nombre de triangles dont un côté est une diagonale. Par hypothèse, on a $a + b + c = 2014$.
Comme une arête du polygone est un côté d'un triangle et un seul, et comme le polygone a 2016 arêtes, on a $2016 = b + 2c$, donc $b + 2c > a + b + c$. On en déduit que $c > a$, donc $2a < a + c \leqslant a + b + c = 2014$. Par conséquent, on ne peut pas avoir $a = 2014/2$, autrement dit la réponse à la question est non.

Exercice 7. Montrer que parmi 18 entiers consécutifs inférieurs ou égaux à 2016, il en existe au moins un qui est divisible par la somme de ses chiffres.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Notons $s(n)$ la somme des chiffres de n. Si un entier n est inférieur ou égal à 2016, alors $s(n) \leqslant 28$. En effet, si $n < 2000$ alors $s(n) \leqslant 1+9+9+9 = 28$, et si $2000 \leqslant n \leqslant 2016$ alors $s(n) \leqslant 2+0+1+9 = 12$.
Or, parmi 18 entiers consécutifs, il y a un entier n divisible par 18. Comme n est divisible par 9, la somme de ses chiffres est divisible par 9, donc $s(n) = 9$ ou $s(n) = 18$ ou $s(n) = 27$.
Si $s(n) = 9$ ou $s(n) = 18$, alors n est bien divisible par la somme de ses chiffres.
Si $s(n) = 27$, alors n est l'un des nombres $999, 1899, 1989, 1998$. Or, n est pair donc $n = 1998$, et n est bien divisible par 27.

Exercice 8. a) Un contrôle a eu lieu dans une classe. On sait qu'au moins les deux tiers des questions de ce contrôle étaient difficiles : pour chacune de ces questions difficiles, au moins les deux tiers des élèves n'ont pas su répondre. On sait aussi qu'au moins les deux tiers des élèves ont bien réussi le contrôle : chacun d'eux a su répondre à au moins deux tiers des questions. Est-ce possible ?
b) La réponse à la question précédente serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par trois quarts ?
c) La réponse à la première question serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par sept dixièmes ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> a) C'est possible avec une classe de trois élèves A, B, C et un contrôle de trois questions, en supposant que A a réussi les questions 1 et 2, B a réussi les questions 1 et 3 et C n'a réussi aucune question.
b) et c) On montre que la réponse est non. Plus précisément, pour tout $p > 2/3$ on montre qu'il n'est pas possible que la proportion d'élèves ayant bien réussi soit $\geqslant p$ et que la proportion de questions difficiles (réussies par une proportion d'élèves $\leqslant 1-p$) soit $\geqslant p$.
Supposons en effet le contraire. Soit n le nombre d'élèves et m le nombre de questions. Soit A l'ensemble des élèves ayant bien réussi, D l'ensemble des questions difficiles et F l'ensemble des questions faciles.
Pour tout ensemble X, on notera $|X|$ le nombre d'éléments de X. Soit a tel que $|A| = an$. Supposons $a \geqslant p \geqslant 2/3$.
Considérons l'ensemble E des couples (x, y) où x est un élève de A ayant réussi la question y.
Pour tout $x \in A$, x a résolu au moins pm questions, donc $|E| \geqslant pamn$.
Pour tout $y \in D$, y a été résolue par au plus $(1-p)n$ élèves, et pour tout $y \in F$, y a été résolue par au plus an élèves de A, donc $|E| \leqslant |D| \times (1-p)n + |F| \times an = (m - |F|) \times (1-p)n + |F| \times an = (1-p)mn + |F| \times (a+p-1)n \leqslant (1-p)(a+p)mn$.
On en déduit que $pamn \leqslant (1-p)(a+p)mn$, donc $a(2p-1) \leqslant p(1-p)$. Par conséquent, $2p-1 \leqslant 1-p$. En simplifiant, cela donne $p \leqslant 2/3$.