



Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH

Mardi 31 mai 2016

Durée : 3 heures (collégiens), 4 heures (lycéens)

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées** (sauf pour l'exercice 1), où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les collégiens traitent les exercices 1 à 5. Les lycéens traitent les exercices 4 à 8.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collègue

Exercice 1. N.B. Dans cet exercice, et uniquement celui-ci, on demande une réponse sans justification.

Soit $ABCD$ un carré de côté 10 cm . On note X le milieu de $[AB]$. On place un point Y tel que le triangle ABY est isocèle en Y , et la zone qui est à la fois à l'intérieur de ABY et de $ABCD$ a une aire de 99 cm^2 . Combien vaut XY ?

Exercice 2. Anne a conduit sa voiture pendant un nombre entier (et non nul) d'heures, et a parcouru un nombre entier de kilomètres, à la vitesse de 55 km/h . Au début du trajet, le compteur indiquait abc kilomètres, où abc est un nombre de 3 chiffres tel que $a \geq 1$ et $a + b + c \leq 7$. A la fin du trajet, le compteur indiquait cba kilomètres. Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre abc .

Exercice 3. 2016 personnes sont en file indienne. Chacune d'elles est soit un truand (qui ment toujours), soit un chevalier (qui dit toujours la vérité). Chacune des 2016 personnes sait qui sont les truands et les chevaliers. Chaque personne, excepté celle qui est tout devant, désigne l'une des personnes devant elle et dit l'une des deux phrases : "cette personne est un truand" ou "cette personne est un chevalier". Sachant qu'il y a strictement plus de truands que de chevaliers, comment un observateur peut-il déterminer qui est un truand et qui est un chevalier ?

Énoncés communs

Exercice 4. Dans le plan, on considère un trapèze $ABCD$ dont les diagonales sont de même longueur. Prouver que, pour tout point M du plan, la somme des distances de M à trois sommets quelconques du trapèze est toujours strictement plus grande que la distance de M au quatrième sommet.

Exercice 5. Soient $a < b < c < d < e$ des nombres réels. On calcule toutes les sommes possibles de deux nombres distincts parmi ces cinq nombres. Les trois plus petites valent 32, 36 et 37 et les deux plus grandes valent 48 et 51. Trouver toutes les valeurs possibles de e .

Énoncés lycée

Exercice 6. Dans un polygone convexe à 2016 côtés, on trace certaines diagonales, qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone. Ce dessin décompose le polygone en 2014 triangles. Est-il possible qu'exactly la moitié de ces triangles aient leurs trois côtés qui soient des diagonales ?

Exercice 7. Montrer que parmi 18 entiers consécutifs inférieurs ou égaux à 2016, il en existe au moins un qui est divisible par la somme de ses chiffres.

Exercice 8. a) Un contrôle a eu lieu dans une classe. On sait qu'au moins les deux tiers des questions de ce contrôle étaient difficiles : pour chacune de ces questions difficiles, au moins les deux tiers des élèves n'ont pas su répondre. On sait aussi qu'au moins les deux tiers des élèves ont bien réussi le contrôle : chacun d'eux a su répondre à au moins deux tiers des questions. Est-ce possible ?

b) La réponse à la question précédente serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par trois quarts ?

c) La réponse à la première question serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par sept dixièmes ?