Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH
Mardi 2 juin 2015

CORRIGÉ

Énoncés collège

Exercice 1. On dispose de trois opérations sur les entiers :

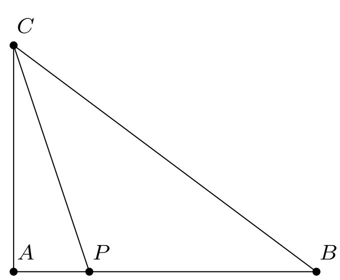
- L'opération A qui consiste à multiplier par 2 et à ajouter 4 au résultat.
- L'opération B qui consiste à multiplier par 4 et à ajouter 16 au résultat.
- L'opération C qui consiste à multiplier par 5 et à ajouter 25 au résultat.

a) Déterminer un entier x tel qu'en partant de x et après avoir utilisé successivement les opérations A, B et C dans cet ordre, on obtienne 1945.
b) Déterminer tous les entiers x tels qu'en partant de x et en utilisant successivement deux opérations différentes, on obtienne 2015.

Solution de l'exercice 1 a) Partant de x, on obtient successivement $2x+4$, $4(2x+4)+16 = 8x+32$ et $5(8x+32)+25 = 40x+185$. On a donc $40x+185 = 1945$. En soustrayant 185 membre à membre, on en déduit $40x = 1760$, donc $x = \frac{1740}{40} = 44$.
b) Si la dernière opération est A ou B, alors le nombre obtenu est pair donc ne peut être 2015. Donc la dernière opération est C.
Soit y l'entier obtenu après avoir appliqué la première opération. On a $5y+25 = 2015$ donc $y = 398$. Or, un nombre obtenu après application de l'opération B est divisible par 4, et 398 n'est pas divisible par 4, donc la première opération est nécessairement A. On en déduit que $2x+4 = 398$. Finalement, $x = 197$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en A. Déterminer le ou les points P du périmètre de ABC tel(s) que $PA+PB+PC$ soit maximal.

Solution de l'exercice 2 Supposons par exemple que $AB > AC$.



Lorsque $P \in [AB]$, on a $PA+PB+PC = (PA+PB)+PC = AB+PC$, qui est maximal lorsque $P = B$. Ce maximum vaut $AB+BC$.
Lorsque $P \in [BC]$, on a $PA+PB+PC = BC+PA$, qui est maximal lorsque $P = B$.

Enfin, lorsque $P \in [CA]$, on a $PA+PB+PC = AC+PB$, qui est maximal lorsque $P = C$. Ce maximum vaut $AC + BC$, qui est strictement plus petit que $AB + BC$.
Conclusion : si $AB > AC$ alors le maximum est atteint uniquement au point $P = B$. De même, si $AC < AB$ alors le maximum est atteint uniquement au point $P = C$, et enfin si $AB = AC$ alors le maximum est atteint aux points $P = B$ et $P = C$.

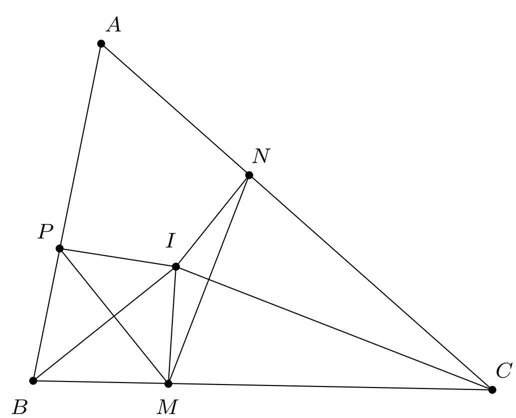
Exercice 3. Pour tout entier n, on note $f(n)$ l'entier écrit en inversant l'ordre des chiffres. Par exemple, $f(2538) = 8352$.
Déterminer tous les entiers n possédant 4 chiffres tels que $f(n) = 4n + 3$.

Solution de l'exercice 3 On note $\overline{abcd}$ l'entier dont l'écriture décimale s'écrit avec les chiffres a, b, c, d. On cherche $n = \overline{abcd}$ tel que $\overline{dcba} = 4\overline{abcd} + 3$. Déjà, $4n + 3 < 10000$ donc $n < 3000$. On en déduit que $a = 1$ ou $a = 2$.
Comme $\overline{dcba} = 4n + 3$ est impair, a est impair donc $a = 1$. On a alors $4000 < 4n + 3 < 8000$, donc d est l'un des nombres $4, 5, 6, 7$. Comme le dernier chiffre de $4\overline{abcd} + 3$ est 1, on a a nécessairement $d = 7$.
L'équation $\overline{7cb1} = 4\overline{1bc7} + 3$ se traduit par $7001 + 100c + 10b = 4031 + 400b + 40c$, ou encore $2970 + 60c = 390b$.
En divisant membre à membre par 30, on obtient $99+2c = 13b$, donc $b > 7$ et $13b$ est impair. nécessairement, $b = 9$, donc $99 + 2c = 117$, ce qui donne $c = 9$. Finalement, $n = 1997$.

Énoncés communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. On choisit M sur le côté $[BC]$, N sur le côté $[CA]$ et P sur le côté $[AB]$ de sorte que $BM = BP$ et $CM = CN$. On note D_B la droite passant par B et perpendiculaire à $[MP]$ et D_C la droite passant par C et perpendiculaire à $[MN]$. On suppose que les droites D_B et D_C se rencontrent en I. Prouver que les angles $\widehat{IPA}$ et $\widehat{INC}$ sont égaux.

Solution de l'exercice 4



Comme BMP est isocèle en B, la hauteur D_B en B de ce triangle est un axe de symétrie, donc $\widehat{BPI} = \widehat{BMI}$, et de même $\widehat{CNI} = \widehat{CMI}$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $\widehat{BPI} + \widehat{CNI} = 180°$, donc $\widehat{CNI} = 180° - \widehat{BPI} = \widehat{API}$.

Exercice 5. 2015 entiers strictement positifs sont placés autour d'un cercle. Montrer qu'il est possible de trouver deux entiers voisins tels que, après les avoir supprimés, les nombres restants ne puissent pas être séparés en deux groupes de même somme.

Solution de l'exercice 5 Si tous les entiers sont pairs, on peut tous les diviser par 2 sans changer la propriété à démontrer. En répétant cette opération, on se ramène au cas où au moins l'un de ces entiers est impair.

Si la somme des 2015 entiers est paire, ces entiers ne sont pas tous impairs donc il y a deux voisins de parités différentes. On les élimine, et les termes restants ont une somme impaire donc ne peuvent pas être séparés en deux groupes de même somme.
Si la somme des 2015 entiers est impaire, on observe que les parités des nombres ne peuvent pas alterner car 2015 est impair, donc il y a deux voisins de même parité, et on les élimine.

Énoncés lycée

Exercice 6. On note $[x]$ la partie entière de x. Par exemple, $[15/4] = 3$. On note $f(n) = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$. Trouver tous les entiers n tels que $f(n+1) > f(n)$.

Solution de l'exercice 6 Soit $m = [\sqrt{n}]$. C'est l'unique entier tel que $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$.
Si $n = (m+1)^2 - 1$, alors $[\sqrt{n+1}] = m+1$ donc $f(n) = \left[\frac{n}{m}\right]$ et $f(n+1) = \left[\frac{n+1}{m+1}\right]$.
Comme $f(n+1) > f(n)$, on a $\frac{n+1}{m+1} > \frac{n}{m}$, donc $(n+1)m > n(m+1)$. Après simplification, il vient $m > n$. Or, $m \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$, donc $n < n$. Impossible.
Si $n < (m+1)^2 - 1$, alors $f(n+1) = \left[\frac{n+1}{m}\right]$. Alors $f(n+1) > f(n)$ si et seulement si $\frac{n+1}{m}$ est un entier. Comme $m^2 < n+1 < m^2+2m+1$, ceci se produit si et seulement si $n+1 = m^2+m$ ou $n+1 = m^2 = 2m$.
Conclusion : les solutions sont les entiers n de la forme $n = m^2+m-1$ ou $n = m^2+2m-1$.

Exercice 7. n points sont placés sur un cercle de diamètre n/π. On suppose que la longueur de n'importe quel arc entre deux de ces n points est strictement plus grande que le nombre de points sur cet arc (sans compter les points sur les extrémités). Montrer que le cercle peut être subdivisé en n arcs de même longueur contenant exactement un point chacun.

Solution de l'exercice 7 Le cercle est de périmètre n. On prend l'un de ces points comme origine, et on note a_k la longueur d'arc (parcourue dans le sens trigonométrique) comprise entre l'origine et le k-ième point. Notons $b_k = a_k - k$.
Si $k \leqslant \ell$, alors il y a $\ell - k - 1$ points sur l'arc entre a_k et a_ℓ, donc $\ell - k - 1 < b_\ell - b_k + \ell - k$, et donc $b_\ell - b_k < 1$. De même, en considérant l'autre arc on obtient $b_k - b_\ell < 1$.
Soient s et t tels que b_s est minimal et b_t est maximal. Soit x un réel strictement compris entre $b_t - 1$ et b_s. Alors pour tout k, on a $b_k \in]x, x+1[$, donc la subdivision du cercle en les n arcs d'extrémités $x, x+1, x+2, \ldots$ convient.

Exercice 8. Soit p, q, r des nombres premiers tels que chacun des trois nombres $pq+1$, $pr+1$ et $qr-p$ est le carré d'un entier. Prouver que $p+2qr+2$ est également le carré d'un entier.

Solution de l'exercice 8 Il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2 = pq+1$ et $b^2 = pr+1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $q \leqslant r$. On a $a^2 > pq \geqslant 4$, donc $a \geqslant 3$ et de même $b \geqslant 3$.
Comme $pq = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, et comme p et q sont premiers, on a ($p = a-1$ et $q = a+1$) ou ($p = a+1$ et $q = a-1$). On en déduit que $q = p \pm 2$ et de même $r = p \pm 2$. Déjà, p, q, r sont impairs. De plus, comme $q \leqslant r$, les seules possibilités sont :
1) $q = r = p+2$. On a alors $qr - p = q^2 - q + 2$ est strictement compris entre $q^2 - 2q + 1$ et q^2, donc n'est pas le carré d'un entier.
2) $q = r = p-2$. On a alors $qr - p = q^2 - q - 2$, donc $qr - p < q^2$. Comme $qr - p$ est le carré d'un entier, on en déduit que $qr - p \leqslant (q-1)^2$, ce qui équivaut à $q^2 - q - 2 \leqslant q^2 - 2q + 1$, ou encore $q \leqslant 3$. Comme q est un nombre premier impair, il vient $q = r = 3$ et $p = 5$. On vérifie alors que $p + 2qr + 2 = 25 = 5^2$.
3) $q = p-2$ et $r = p+2$. On a alors $qr - p = p^2 - p - 4 < p^2$. Comme $qr - p$ est le carré d'un entier, on en déduit que $p^2 - p - 4 \leqslant (p-1)^2 = p^2 - 2p + 1$, donc $p \leqslant 5$. De plus, $p = q + 2 \geqslant 5$, donc $p = 5$, $q = 3$ et $r = 7$. On vérifie alors que $p + 2qr + 2 = 49 = 7^2$.