



Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH

Mardi 3 juin 2014

Durée : 3 heures (collégiens), 4 heures (lycéens)

Instructions

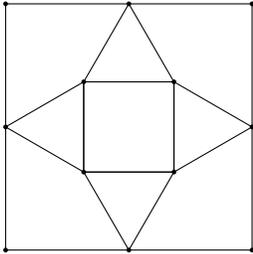
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées** (sauf pour l'exercice 1), où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Les collégiens traitent les exercices 1 à 4. Les lycéens traitent les exercices 4 à 7.
L'exercice 1 est noté sur 5 points, les autres sont notés sur 10 points.**

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collègue

Exercice 1. Dans cette question, et uniquement cette question, on demande une réponse sans justification.



Sachant que le petit carré est de côté x et que les triangles sont équilatéraux, déterminer la longueur du côté du grand carré.

Exercice 2. Trouver tous les couples de chiffres (a, b) tels que l'entier dont les quatre chiffres sont $ab32$ soit divisible par 99.

Exercice 3. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon R , l'autre de centre O' et de rayon R' avec $R < R'$, sont tangents extérieurement en B . Soit (T) la tangente commune passant par B .

On mène une autre tangente commune (MM') (où M appartient au premier cercle et M' au second). Cette tangente coupe (T) en A . Les droites (OA) et $(O'A)$ coupent BM et BM' en D et D' . Les droites (OO') et (MM') se rencontrent en E .

- (1) Démontrer que (DD') est parallèle à (MM') .
- (2) Prouver que OAO' est rectangle en A .
- (3) Calculer la longueur EO en fonction de R et R' .
- (4) Calculer la longueur DD' en fonction de R et R' .

Énoncé commun

Exercice 4. a) Est-il possible de répartir les nombres $1, 2, 3, \dots, 10$ en cinq paires de sorte que les cinq sommes par paires donnent cinq nombres premiers différents ?

b) Est-il possible de répartir les nombres $1, 2, 3, \dots, 20$ en dix paires de sorte que les dix sommes par paires donnent dix nombres premiers différents ?

Énoncés lycée

Exercice 5. Lors d'un tournoi de football, chaque équipe rencontre exactement deux fois chacune des autres. Il n'y a pas de match nul, une victoire rapporte deux points et une défaite ne rapporte rien. Il se trouve qu'une seule équipe a remporté le tournoi avec 26 points, et qu'il y a deux équipes dernières ex-aequo avec 20 points chacune. Déterminer le nombre d'équipes, et donner un exemple de tournoi où de tels résultats se produisent.

Exercice 6. Étant donné un point P et un cercle \mathcal{C} du plan, on appelle *distance de P à \mathcal{C}* la longueur minimale PM entre P et un point M du cercle \mathcal{C} . Par exemple, si P appartient au cercle alors la distance de P à \mathcal{C} est nulle, et si P est le centre du cercle alors la distance de P à \mathcal{C} est égale au rayon de \mathcal{C} .

Étant donné quatre points A, B, C, D non cocycliques, combien y a-t-il au maximum de cercles qui passent à égale distance de ces quatre points ?

Exercice 7. Déterminer tous les entiers $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$ tels que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_9 < x_{10}$ et $x_9 x_{10} \leq 2(x_1 + x_2 + \dots + x_9)$.