Test de sélection du 4 juin 2013

Vous étiez 270 candidat-e-s à ce test de sélection, et 62 d'entre vous (23%) participeront au stage olympique de Montpellier, du 19 au 29 août 2013, dont 12 filles : la liste des stagiaires est publiée sur notre site www.animath.fr. Nous avons admis une plus grande proportion d'élèves de seconde et troisième, d'une part parce que ceux qui bénéficient de plusieurs années pour préparer les Olympiades peuvent progresser sensiblement d'une année sur l'autre, d'autre part car nous avons besoin de jeunes nés en 1999 ou plus tard pour les Olympiades Balkaniques Junior 2014 ainsi que de filles pour les Olympiades Européennes de Filles 2014. Mais j'espère que celles et ceux qui n'ont pas été admis-es ne se décourageront pas : un certain nombre d'entre elles et eux peuvent participer au(x) prochain(s) stage(s).

Comme promis, avec un peu de retard, nous vous renvoyons vos copies corrigées, ainsi que, ci-dessous, la solution des différents exercices.

Exercice 1

Trouver tous les quadruplets d'entiers strictement positifs (a, b, c, d) tels que $a+b+c+d = 2013$ et tels que chacun des nombres a, b, c, d divise 2013.

Solution de l'exercice 1

La première difficulté est de bien comprendre l'énoncé : en effet, *quadruplet* signifie quatre éléments non nécessairement distincts mais ordonnés. En ce qui concerne la divisibilité, il s'agit d'une relation entre nombres **entiers** et il ne faut pas oublier que 1 et 2013 divisent 2013, tandis que 0 ne le divise pas.

Beaucoup ont cherché les diviseurs de 2013 : la méthode la plus simple pour les nombres de cette taille reste de chercher la décomposition en facteurs premiers. Cette décomposition vise à écrire 2013 comme produit d'entiers n'ayant comme diviseurs que 1 et eux-même (1 exclu), les diviseurs de 2013 s'obtenant alors en réalisant des combinaisons de ces facteurs. Or les critères de divisibilité par 3 (somme des chiffres $2+0+1+3$ divisible par 3) et par 11 ($2-0+1-3$ divisible par 11) sont classiques. On obtient : $2013 = 3 \times 11 \times 61$, donc tous les diviseurs de 2013 sont :

$$\{1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013\}$$

On ne sait pas encore s'il existe ou non des solutions, et on va finalement prouver qu'il n'en existe pas. Pour ce faire, soit on commence par supposer par l'absurde l'existence d'une solution pour ensuite aboutir à une contradiction, soit on traite **méthodiquement** tous les quadruplets pris dans l'ensemble ci-dessus.

1$^{\text{ère}}$ Méthode Soit une solution (a,b,c,d). Puisque a divise 2013, un nombre impair, a est lui-même impair (pour ceux qui ont fait un peu de logique, c'est la contraposée du fait qu'un multiple d'un entier pair est pair), de même b,c,d sont impairs, donc $a+b$ et $c+d$ sont pairs, d'où $a+b+c+d$ est pair, il y a donc une contradiction. Par conséquent, il n'existe pas de quadruplet solution.

2$^{\text{ème}}$ Méthode Soit un quadruplet (a,b,c,d) parmi les diviseurs de 2013, on pose sans perdre de généralité $a \geq b \geq c \geq d$. Si $a = 2013$ alors comme $b \geq 1$ la somme dépasse 2013, on traite donc les cas où $a \leq 671$ soit $671 \geq a \geq b \geq c \geq d$. Si $c \leq 183$ alors on a $a+b+c+d \leq 671+671+183+183 = 1708$, il nous reste les cas où $a = b = c = 671$ mais alors $d \geq 1$ implique que la somme dépasse 2013, on a traité tous les cas sans trouver de solutions : il n'en existe donc pas.

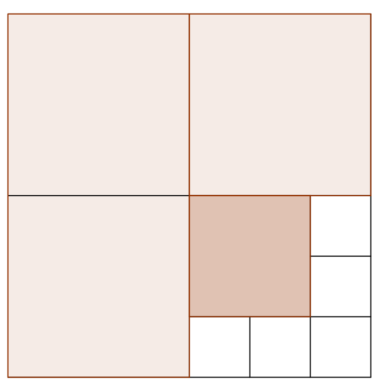
Exercice 2

Est-il possible découper un carré en neuf carrés et d'en colorer un en blanc, trois en gris et les cinq restants en noir de sorte que des carrés de couleur identique soient de même taille et des carrés de couleurs différentes aient des tailles différentes ?

Solution de l'exercice 2

Pour cet exercice il n'y avait pas grand chose à dire. Il y avait bien une solution. Juste un conseil : certains ont essayé de prouver que ce n'était pas possible. Ils ont dû se rendre compte que c'était difficile et fastidieux d'écrire une telle démonstration (d'autant plus qu'elle était forcément fausse). Généralement dans des cas pareils, cela signifie qu'il existe bien une solution (surtout pour les exercices supposés faciles).

Pour faciliter la lecture de la figure, les couleurs ont été modifiées.

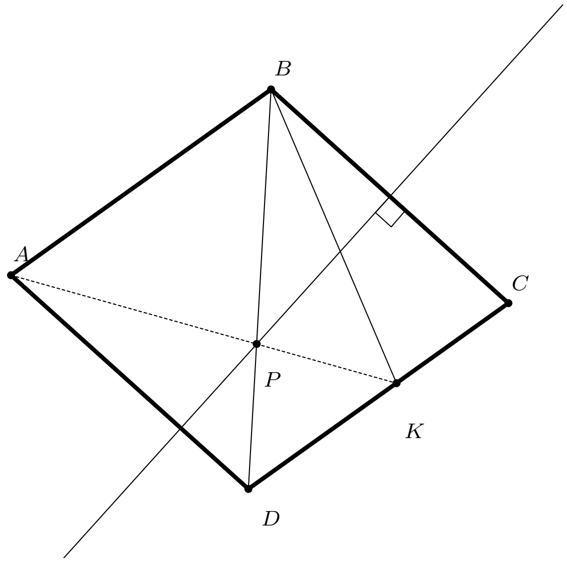


Exercice 3

Soit $ABCD$ un losange. Soit K un point de la droite (CD), autre que C et D, tel que $AD = BK$. Soit P le point d'intersection de la droite (BD) avec la médiatrice de $[BC]$. Prouver que les points A, K et P sont alignés.

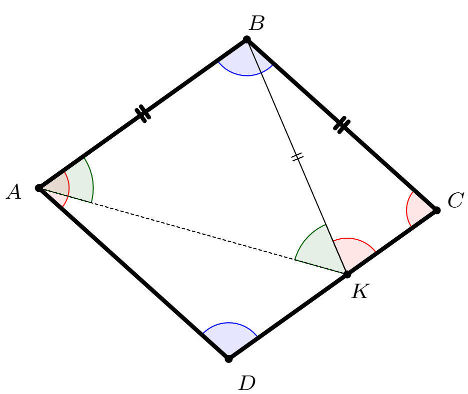
Solution de l'exercice 3

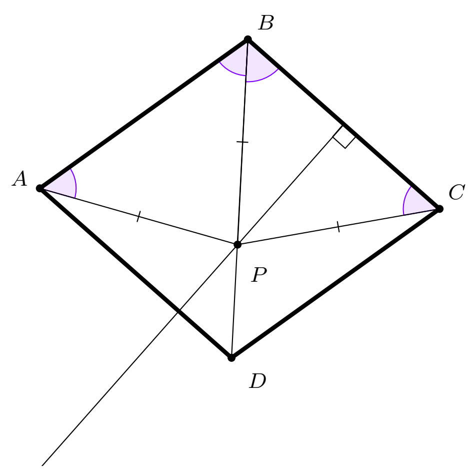
Commençons par faire la figure :



Nous allons simplement faire une chasse aux angles pour calculer les angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{BAK}$ dans notre figure. Si ces deux angles sont égaux, nous aurons démontré que les trois points sont alignés.

Notons $\widehat{BAD} = \widehat{DCB} = \alpha$ et $\widehat{CBA} = \widehat{ADC} = \beta$. Comme la somme des quatre angles d'un quadrilatère fait $360°$, on sait que $\alpha + \beta = 180°$.





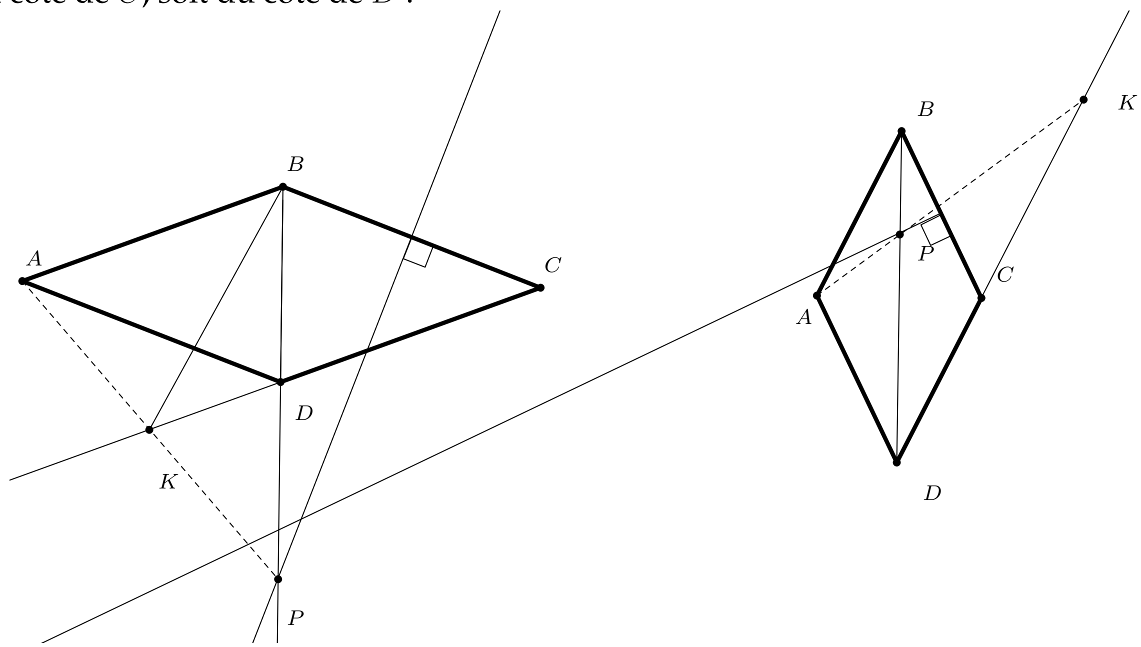
Calculons $\widehat{BAK}$. Par hypothèse, $BK = AD$, et commme $ABCD$ est un losange, $BK = AB = BC$ et les triangles ABK et KBC sont isocèles en B. Ainsi, $\widehat{CKB} = \widehat{BCK} = \alpha$, et $\widehat{KBC} = 180° - 2\alpha$. On sait que $\widehat{ABC} = \beta$, donc $\widehat{ABK} = \beta - \widehat{KBC} = \beta + 2\alpha - 180° = \alpha$ (puisque $\alpha + \beta = 180°$). Il suffit maintenant de calculer les angles de base du triangle isocèle ABK et on trouve

$$\widehat{BAK} = \frac{180° - \widehat{ABK}}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Calculons maintenant $\widehat{BAP}$. Le point P est l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la diagonale BD. Mais les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, donc BD est la médiatrice de $[AC]$. Le point P est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et $PA = PB = PC$. Les angles $\widehat{BAP}$, $\widehat{ABP}$, $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PCB}$ sont égaux et valent tous $\frac{\beta}{2}$.

$$\widehat{BAP} = \frac{\beta}{2}.$$

ATTENTION : La preuve n'est pas terminée. Cette démonstration ne marche que dans le cas où les points sont dans la configuration de ma figure. Il faut également montrer que la démonstration marche dans les autres cas : lorsque K est à l'extérieur du segment $[CD]$, soit du côté de C, soit du côté de D :



Ces démonstrations (semblables à la précédentes) sont laissées au lecteur.

Il est aussi possible de faire cet exercice de façon analytique. Il faut prendre le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où O est le point d'intersection des diagonales du losange et $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ sont des vecteurs unitaires colinéaires aux diagonales. Les coordonnées des quatre sommets sont alors $A : (a, 0)$, $B : (0, b)$, $C : (-a, 0)$ et $D : (0, -b)$. Les calculs sont un peu longs mais faisables.

Exercice 4

Les dénominateurs de deux fractions irréductibles sont 600 et 700. Quelle est la plus petite valeur possible du dénominateur de leur somme (lorsqu'on l'écrit comme fraction irréductible) ?

Solution de l'exercice 4

Réponse : 168. On appelle a et b les numérateurs respectifs de ces deux fractions, de sorte que la somme recherchée s'écrive $\frac{a}{600} + \frac{b}{700}$.

Montrons, d'abord, que la valeur 168 est bien atteinte. En effet, en posant $a = 1$ et $b = 3$, on trouve :

$$\frac{1}{600} + \frac{3}{700} = \frac{7 \times 1}{7 \times 600} + \frac{6 \times 3}{6 \times 700} = \frac{7 + 18}{4200} = \frac{25}{4200} = \frac{1}{168};$$

les fractions $\frac{1}{600}$ et $\frac{3}{700}$ sont bien irréductibles, et la fraction $\frac{1}{168}$ aussi.

Montrons maintenant que le dénominateur ne peut pas être inférieur à 168. La somme qui nous intéresse s'écrit :

$$\frac{a}{600} + \frac{b}{700} = \frac{7a}{7 \times 600} + \frac{6b}{6 \times 700} = \frac{7a + 6b}{4200}.$$

Comme la fraction $\frac{a}{600}$ est irréductible, a est premier avec 600 (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre qui divise à la fois a et 600). Puisque $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, on sait donc que a n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. De même, b est premier avec 700 et $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$, donc b n'est divisible ni par 2, ni par 5, ni par 7.

On en déduit que le produit $7a$ est divisible par 7, mais pas par 2 ni par 3 ni par 5. De même $6b$ est divisible par 2 et 3, mais pas par 7. Or quel que soit p, la somme d'un nombre divisible par p et d'un nombre non divisible par p n'est jamais divisible par p. On en déduit que la somme $7a + 6b$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 7.

On a $4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$. D'après ce qui précède, on ne peut jamais simplifier la fraction $\frac{7a+6b}{4200}$ par 2, 3 ou 7. Donc le dénominateur de la fraction réduite sera encore divisible par $2^3 \times 3 \times 7$, c'est-à-dire par 168. Il sera en particulier supérieur ou égal à 168, CQFD.

Exercice 5

Soient m, n des entiers strictement positifs. Un pion appelé (m, n)-condylure se déplace sur un tableau comportant une infinité de lignes (une infinité vers la gauche ainsi que vers la droite) et de colonnes (une infinité vers le haut ainsi que vers le bas). À chaque coup, le condylure se déplace de m cases dans une direction (horizontale ou verticale) et de n cases dans la direction perpendiculaire. Le cheval du jeu d'échecs est donc un (2, 1)-condylure.

Pour quelles valeurs de m et de n peut-on colorier les cases de ce tableau en bleu et en rouge de sorte qu'à chaque coup, la case sur laquelle se trouve le condylure change de couleur ?

Solution de l'exercice 5

La difficulté de cet exercice consistait à bien comprendre que le tableau n'était pas colorié au départ.

C'est possible pour toute valeur de m et n.

a) On commence par étudier l'exemple du $(2, 1)$-condylure, qui n'est autre que le cavalier du jeu d'échecs. Ce dernier, en se déplaçant sur un échiquier bleu-rouge (voir Figure 1), change de couleur à chaque fois qu'il se déplace. La raison est que deux carrés de l'échiquier ont la même couleur si et seulement si on arrive de l'une à l'autre en faisant

– ou bien un nombre pair de pas horizontaux et un nombre pair de pas verticaux ;
– ou bien un nombre impair de pas dans chaque direction (horizontale et verticale).

Comme le $(2, 1)$-condylure se déplace un nombre impair de pas dans une direction et un nombre pair dans l'autre direction, il change forcément de couleur.

Considérons le cas général d'un (m, n)-condylure tel que m et n ont des parités différentes. On colorie le plan comme un échiquier infini (Figure 1). Le même argument que dans le cas du $(2, 1)$-condylure montre que le (m, n)-condylure change de couleur à chaque mouvement.

b) Prenons maintenant le cas d'un (m, n)-condylure ou m et n sont impairs. On sait qu'à chaque mouvement on se déplace d'un nombre impair de pas dans une direction donnée, disons verticalement. Cela nous donne l'idée de colorier comme dans la Figure 1. On constate facilement que deux carrés ont la même couleur si et seulement si ils sont sur la même ligne ou leurs lignes différent d'un nombre pair de pas.

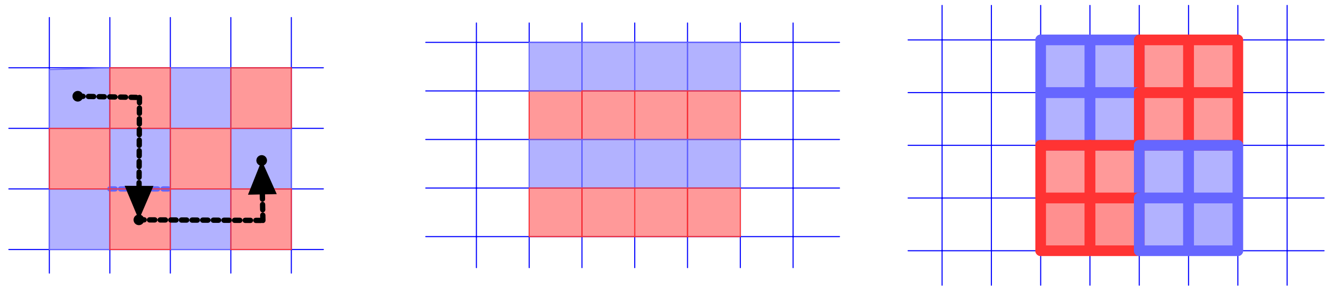


FIGURE 1 – Cas a : m et n de parités différentes. Cas b : m et n impairs. Cas c : pgcd$(m, n) \neq 1$.

c) Le cas ou m et n sont pairs se résout en se ramenant aux cas précédemment traités. En effet, posons $d = \text{pgcd}(m, n)$. Alors, on peut écrire $n = n'd$ et $m = m'd$ où n' et m' sont deux entiers premiers entre eux. En particulier, n' et m' ne peuvent pas être tous deux pairs. Alors, on colorie le plan en carrés de taille $d \times d$ correspondant au (n', m')-condylure. Voire la Figure 1 pour une illustration du cas où $d = 2$ et les entiers n' et m' ont des parités différentes.

Exercice 6

Le code secret du coffre-fort d'Animath est composé de 7 chiffres tous différents. Le coffre-fort s'ouvre lorsqu'on compose une suite de 7 chiffres si les deux conditions suivantes sont respectées : - les 7 chiffres sont tous différents, - au moins l'un des 7 chiffres est à la bonne place.

a) Est-il possible d'ouvrir le coffre en au plus 6 essais ?

b) Quel est le nombre minimal d'essais pour pouvoir ouvrir le coffre, quel que soit le code secret ?

Solution de l'exercice 6

a) Puisque le code secret comporte 7 chiffres différents, au moins 4 d'entre eux sont parmi $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. La première idée qui vient est alors d'essayer le code 0123456, puis de faire tourner ces chiffres en essayant si besoin les codes 1234560,2345601,3456012,4560123,5601234 et 6012345. Comme chacun des 7 chiffres aura été utilisé à chacune des 7 positions possibles, n'importe lequel des 4 bons chiffres finira par être à la place requise, assurant ainsi l'ouverture du coffre.

Cela montre qu'en choisissant bien ses essais, on peut ouvrir le coffre en au plus 7 tentatives.

Evidemment, cela ne répond pas exactement à la question posée, puisqu'on voudrait y arriver en au plus 6 essais. Cela étant, rien ne prouve que la méthode ci-dessus est la meilleure possible, et justement une petite modification de celle-ci va nous permettre d'atteindre notre objectif : En effet, 4 bons chiffres parmi les 7, c'est plus qu'il n'en faut. Et si au lieu de faire tourner 7 chiffres sur les 7 places, on ne faisait qu'en tourner 6 sur 6 places ? Par exemple, on peut utiliser les codes

$$0123456, 1234506, 2345016, 3450126, 4501236, 5012346$$

Parmi les 6 chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5$, que l'on teste dans chacune des 6 premières positions, au moins 3 sont dans le code secret. Donc au moins 2 sont dans le code secret et dans les six premières positions. Ainsi, avec ces 6 essais, on ouvrira le coffre à coup sûr.

b) Peut-on encore améliorer notre méthode ou en trouver une autre plus efficace ? On va prouver que non et, du coup, prouver que le minimum cherché est 6.

Parmi les candidats qui ont abordé cette question, l'erreur commune a été de penser que si l'on trouvait 6 codes deux à deux sans un même chiffre à une même place (soit donc 6 codes qui éliminent chacun 7 possibilités de positionnement) et un code secret pour lequel le coffre ne s'ouvrirait pas, cela prouverait que le minimum cherché est 6. Hélàs, c'est faux. Par exemple, les 7 codes

0123456
1234067
2340178
3401289
4012395
5678901
6789512

ne testent jamais deux fois un même chiffre à une même position, et ne permettent pas d'ouvrir le coffre si la combinaison est 7895634. Pourtant, cela ne prouve pas que l'on ne peut pas ouvrir en 7 essais, puisqu'on peut même y arriver en 6 avec une meilleure "coordination" des choix...

On prouve maintenant notre affirmation initiale. Pour cela, supposons que l'on fasse les essais

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array}$$

Il s'agit de prouver qu'il existe un code

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7$$

pour lequel les cinq essais ci-dessus ne conviennent pas. L'idée est de prendre successivement x_1 différent de a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, puis x_2 différent de $x_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2$, puis x_3 différent de $x_1, x_2, a_3, b_3, c_3, d_3, e_3$ etc.
Sauf que cela risque de coincer à partir de x_6, et qu'il va falloir être plus fin.

Dans le tableau 5×7, on note C_j l'ensemble des nombres qui apparaîssent dans la colonne j et $|C_j|$ le nombre d'éléments de C_j (i.e. le nombre de chiffres différents dans la colonne j). Ainsi, on a $|C_j| \leq 5$ pour tout j.

- Premier cas : si l'un des C_j ne contient pas plus de 4 nombres.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $|C_7| \leq 4$. Il existe donc $x \in C_7$ qui apparaît au moins deux fois dans la colonne 7.

Si on avait $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6$, il n'y aurait pas plus de 5 nombres différents dans les 6 premières colonnes. En particulier, les nombres $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ne seraient pas tous distincts, en contradiction avec le fait que notre premier essai soit un code possible.
Ainsi, quitte à permuter des lignes ou des colonnes, on peut supposer que $a_6 \notin C_1$.

Si on avait $C_7 \subset C_j$ pour $j = 2, 3, 4, 5$, alors x apparaîtrait aussi au moins une fois dans chacune des colonnes C_2, C_3, C_4, C_5 et donc au moins 6 fois dans le tableau. Ce tableau ne contenant que 5 lignes, le principe des tiroirs assure que x apparaîtrait au moins deux fois dans une même ligne, ce qui nous redonnerait une contradiction comme ci-dessus.
Par conséquent, toujours sans perte de généralité, on peut supposer que C_7 n'est pas inclus dans C_2 et donc qu'il existe $\alpha \in C_7$ tel que $\alpha \notin C_2$.

On pose alors $x_1 = a_6$ et $x_2 = \alpha$.
Si on élimine $x_1, x_2, a_3, b_3, c_3, d_3, e_3$, il reste alors au moins 3 valeurs possibles pour x_3. Une d'elles étant choisie, il reste alors de même au moins 2 valeurs possibles pour x_4, puis à nouveau au moins une valeur possible pour x_5.
Puisque $x_1 \in C_6$, éliminer les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et les au plus 4 autres valeurs qui apparaîssent dans C_6 laisse au moins une valeur disponible pour x_6.
De même, puisque $x_2 \in C_7$, éliminer les valeurs $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ et les au plus 3 autres valeurs qui apparaîssent dans C_7 laisse au moins une valeur disponible pour x_7.

Ainsi, dans ce premier cas, il existe effectivement un code pour lequel nos essais ne permettent pas d'ouvrir le coffre.

- Deuxième cas : si $|C_j| = 5$ pour tout j.

Comme $C_j \subset \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ pour tout j, les ensembles $C_1, C_2, \cdots, C_7$ ne sont pas tous disjoints. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $a_7 \in C_6$.

D'autre part, le chiffre b_7 n'apparaît pas plus d'une fois par ligne, et donc pas plus de 5 fois dans le tableau. Ainsi, au moins deux des colonnes ne contiennent pas b_7, et donc l'une d'elles n'est pas la colonne 6. Quitte à renuméroter les colonnes, on peut donc supposer que $b_7 \notin C_1$.

De même, a_7 n'apparaît pas dans au moins deux des colonnes mais appartient aux colonnes 6 et 7, donc a_6 n'apparaît pas dans une colonne qui n'est ni la colonne 1 ni la colonne 6 ni la colonne 7. Sans perte de généralité, on suppose donc que $a_7 \notin C_2$.

On pose alors $x_1 = b_7$ et $x_2 = a_7$.
Comme ci-dessus, on vérifie facilement qu'il reste au moins 3 valeurs pour x_3, puis au moins 2 valeurs pour x_4, et enfin au moins une valeur pour x_5.
Comme $x_2 \in C_6$, éliminer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et au plus 4 autres valeurs qui sont dans C_6 laisse au moins une valeur disponible pour x_6.
Enfin, puisque x_1 et x_2 sont dans C_7, éliminer $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ et au plus 3 autres valeurs qui sont dans C_7 laisse au moins une valeur disponible pour x_7.

Ainsi, dans ce deuxième cas également, il existe un code pour lequel nos essais ne permettent pas d'ouvrir le coffre, ce qui conclut.