Chers élèves,

Vous étiez plus de 150, le 7 juin 2011, qui cherchiez à résoudre quatre des exercices ci-dessous (3 à 6 pour les élèves de première, 2 à 5 pour les secondes et 1 à 4 pour les collégiens), et 41 d'entre vous ont été sélectionnés pour le prochain stage olympique, du 25 août au 1er septembre au château de Grésillon. Les plus jeunes d'entre vous pourront participer à d'autres stages même s'ils n'ont pas été acceptés cette année.

Les mathématiques olympiques sont sensiblement différentes de ce que vous faites au lycée ou au collège, et certains des exercices proposés étaient réellement difficiles, même s'ils n'exigeaient pas de connaissances particulières. Mais j'espère que l'expérience a été profitable pour tout le monde ! Comme promis, nous vous renvoyons ci-joint vos copies corrigées ainsi que les solutions détaillées des six exercices.

Amicalement,

François LO JACOMO

Exercice 1. Sept personnes dînent chaque samedi soir autour d'une table ronde.

Combien de fois est-il possible d'aller dîner si chacun veut avoir deux nouveaux voisins à chaque fois ?

Quel est le résultat pour huit personnes ?

Solution : Sous les conditions de l'énoncé, à chaque dîner, une personne donnée a deux nouveaux voisins. Elle aura donc eu quatre voisins différents après le deuxième dîner, six voisins différents après le troisième, huit voisins différents après la quatrième, ce qui n'est pas possible : s'il y a sept personnes en tout, chacune ne peut avoir que six voisins différents, ce qui limite à trois le nombre de dîners réalisables sous les conditions de l'énoncé. Ce résultat est le même s'il y a huit personnes en tout.

Il reste à prouver qu'on peut organiser trois dîners de sorte que chacun ait deux nouveaux voisins à chaque dîner. Au premier dîner, les sept personnes sont numérotées dans l'ordre de 1 à 7 : 1 2 3 4 5 6 7. Au deuxième dîner, par rapport au premier, on les place « une personne sur deux » : 1 3 5 7 2 4 6, et au troisième, « une personne sur trois » : 1 4 7 3 6 2 5. On vérifie facilement qu'un tel placement convient, mais ce n'est pas le seul.

Si l'on ajoute une huitième personne, il suffit de l'intercaler de sorte qu'elle ait elle aussi deux nouveaux voisins à chaque fois, par exemple : 1 2 **8** 3 4 5 6 7 puis 1 3 5 **8** 7 2 4 6 et enfin 1 **8** 4 7 3 6 2 5. Ainsi, n'auront jamais été voisins : 2 et 3, 5 et 7, 1 et 4 ainsi que 8 et 6.

Exercice 2. Dans un jeu, un entier strictement positif n peut être remplacé par l'entier ab si $n = a + b$, avec des entiers strictement positifs a et b. Peut-on obtenir le nombre 2011 en commençant par $n = 5$?

Solution : Oui, on peut obtenir 2011 en commençant par $n = 5$: en effet, si on procède à la décomposition $n = (n-2) + 2$, le jeux permet de remplacer n par $2n - 4$ qui (lorsque $n \geq 5$) est strictement plus grand que n. Ainsi $5 = 3 + 2$ est remplacé par $3 \times 2 = 6$ puis $6 = 4 + 2$ est remplacé par $4 \times 2 = 8$ puis 8 par 12, puis 20, 36, 68, 132, 260, 516, 1028, 2052. On peut, par ce procédé, atteindre des nombres aussi grands que l'on veut. Et une fois arrivé à 2052, on peut redescendre jusqu'à 2011, en remarquant que la décomposition $n = (n-1) + 1$ permet de remplacer n par $(n-1)$, donc $2052 = 2051 + 1$ est remplacé par 2051, puis 2050… jusqu'à 2011.

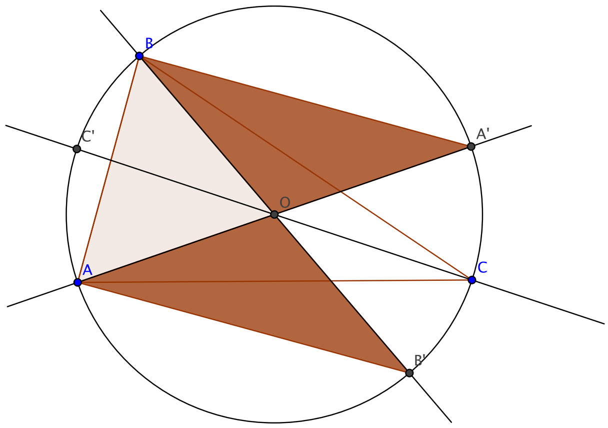
Il existe de nombreuses autres manières d'atteindre un nombre supérieur à 2011 : certains ont jugé plus naturel, par exemple, d'écrire : $5 = 3 + 2$, puis $3 \times 2 = 6 = 3 + 3$, puis $3 \times 3 = 9 = 4 + 5$, puis $4 \times 5 = 20 = 10 + 10$, puis $10 \times 10 = 100 = 50 + 50$, et enfin $50 \times 50 = 2500$. Il reste alors 489 opérations pour redescendre jusqu'à 2011. En réalité, il est possible d'atteindre 2011 beaucoup plus rapidement, par exemple : $5 = 3 + 2$, puis $3 \times 2 = 6 = 4 + 2$, puis $4 \times 2 = 8 = 4 + 4$, puis $4 \times 4 = 16 = 8 + 8$, puis $8 \times 8 = 64 = 36 + 28$, puis $36 \times 28 = 1008 = 1006 + 2$, et enfin $1006 \times 2 = 2012 = 2011 + 1$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle ayant trois angles aigus, et soit O le centre de son cercle circonscrit Γ. Les droites $(AO), (BO), (CO)$ rencontrent Γ une seconde fois en A', B', C' respectivement. Démontrer que l'aire de l'hexagone $AC'BA'CB'$ est deux fois plus grande que l'aire du triangle ABC.

Solution 1 : Les triangles AOB et AOB' ont même hauteur issue de A et des bases OB et OB' de même longueur. Ainsi $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{AOB'}$. On montre de même que $\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{A'OB}$, $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{BOC'}$, $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{B'OC}$, $\mathcal{A}_{COA} = \mathcal{A}_{COA'}$ et $\mathcal{A}_{COA} = \mathcal{A}_{C'OA}$. En sommant ces identités membre à membre, on obtient

$$2(\mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{COA}) = \mathcal{A}_{AOB'} + \mathcal{A}_{A'OB} + \mathcal{A}_{BOC'} + \mathcal{A}_{B'OC} + \mathcal{A}_{COA'} + \mathcal{A}_{C'OA}.$$

Ainsi, $2\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AC'BA'CB'}$.

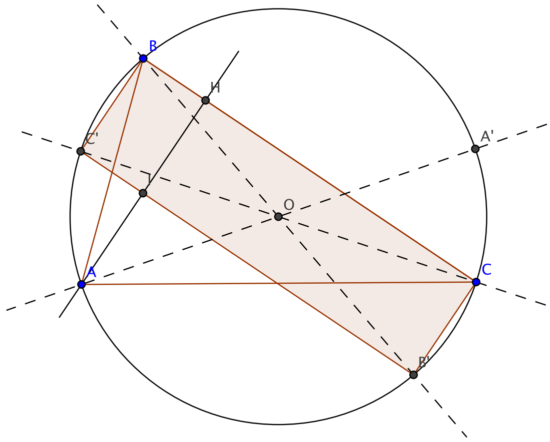


Solution 2 : Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I le point d'intersection de (AH) et $(B'C')$. Comme les diagonales du quadrilatère $BC'B'C$ sont de même longueur et se coupent en leur milieu, $BC'B'C$ est un rectangle. En particulier, $BC = B'C'$ et, en utilisant le parallélisme, (AI) est une hauteur du triangle $AB'C'$ puis $C'B = IH$.

La symétrie de centre O échange les points A, B' et C' avec les points $A'B$ et C respectivement, ce dont on déduit que $\mathcal{A}_{A'BC} = \mathcal{A}_{AB'C'}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{AC'BA'CB'} &= \mathcal{A}_{A'BC} + \mathcal{A}_{AB'C'} + \mathcal{A}_{BC'B'C} = 2\mathcal{A}_{AB'C'} + \mathcal{A}_{BC'B'C} \\
&= AI \cdot B'C' + IH \cdot BC = AI \cdot BC + IH \cdot BC \\
&= (AI + IH) \cdot BC = AH \cdot BC \\
&= 2\frac{AH \cdot BC}{2} = 2\mathcal{A}_{ABC}.
\end{aligned}$$

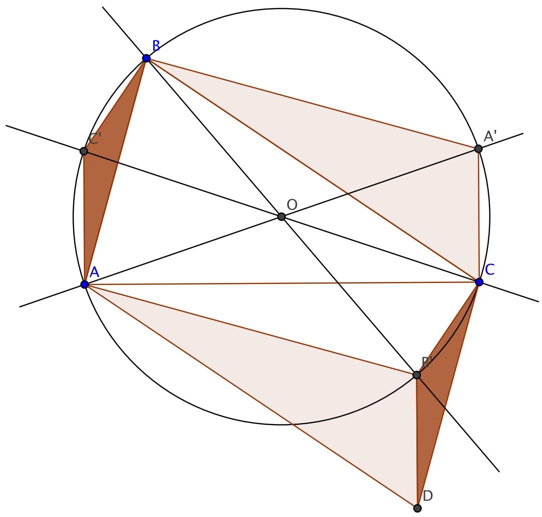


Solution 3 : La symétrie de centre O échangeant A, B et C avec A', B' et C', on sait que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'A}$.

Soit D le point tel que $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{A'C}$. Alors, comme $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$, le triangle $AB'D$ est un translaté du triangle $BA'C$. En particulier, $\mathcal{A}_{AB'D} = \mathcal{A}_{BA'C}$ et $AD = BC$.

Comme $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'A}$, on sait que $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{C'A}$. On en déduit de même que $\mathcal{A}_{AC'B} = \mathcal{A}_{DB'C}$ et $CD = BA$.

On remarque donc que les triangles ABC et CDA sont isométriques, d'où $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{CDA}$.



Ainsi,

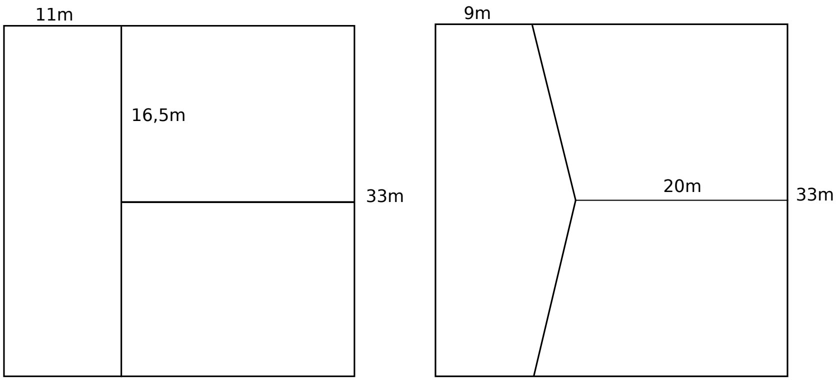
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{AC'BA'CB'} &= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{ABC'} \\
&= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{AB'C} + \mathcal{A}_{CB'D} + \mathcal{A}_{AB'D} \\
&= \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CDA} = 2\mathcal{A}_{ABC}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Un paysan possède un pré carré de 33m de côté, clôturé sur tout son périmètre. Il désire le partager en trois parcelles de même aire. Un tel partage est-il possible avec

1. au plus 55m de clôture,
2. au plus 54m de clôture,

Solution : Avec 33 m de clôture, on peut obtenir une parcelle de 11m $\times$ 33m et une parcelle de 22m $\times$ 33m. Avec 22m de clôture, on peut partager la seconde parcelle en deux parties de même aire.

Mais au lieu de diviser le pré en trois rectangles, on peut le diviser en deux trapèzes de 16,5m de hauteur (la somme des côtés parallèles étant donc 44 m) et un pentagone, comme sur la figure. Ainsi, au lieu d'utiliser 22m+2 $\times$ 16,5m= 55m, il suffit d'utiliser 20m+2 $\times$ $\sqrt{16,5^2+4^2}$m, d'après le théorème de Pythagore. Or, $16,5^2+16<17^2$, car $17^2-16,5^2=(17-16,5)(17+16,5)=16,75$, ce qui suffit.



C'est un coup de chance que le trapèze de côtés parallèles 20m et 24m convienne. On pouvait étudier plus généralement le trapèze de côtés parallèles $22-x$ et $22+x$, ce qui revient à l'étude de fonction définie par $f(x)=22-x+2\sqrt{16,5^2+(2x)^2}$. C'est pour $5/3<x<13/5$ que $f(x)<54$, donc en particulier pour $x=2$, mais le minimum $22+33/4\sqrt{15}=53,9521126\ldots$ est atteint en $x=11/5\sqrt{15}=2,13014\ldots$.

Exercice 5. Dix-sept personnes dînent chaque samedi soir autour d'une table ronde.

Combien de fois est-il possible d'aller dîner si chacun veut avoir deux nouveaux voisins à chaque fois ?

Quel est le résultat pour dix-huit personnes ?

Remarque : Cet exercice est le même que l'exercice 1 (les collégiens devaient résoudre le 1, les lycéens le 5), mais dans un cas moins particulier. La solution proposée ci-dessous est très générale, mais difficilement accessible à un lycéen moyen. Cet exercice permettait donc de repérer les élèves les mieux à même d'affronter de redoutables problèmes olympiques.

Solution : La première chose à remarquer est la suivante. On appelle n le nombre de convives (17 ou 18), et k le nombre de dîners ; on s'intéresse à un convive en particulier parmi les n. Sachant qu'il a deux voisins à chaque dîner, et qu'il ne doit jamais rencontrer deux fois la même personne, il rencontrera donc $2k$ personnes différentes au total. Or il n'y a que $n-1$ personnes qu'il peut rencontrer ; on a donc $2k\leq n-1$, ce qui signifie – dans les deux cas – qu'il y a au plus 8 dîners possibles.

Montrons maintenant qu'il existe effectivement 8 placements tels que deux personnes ne sont jamais voisines plus d'une fois. On numérote les convives et les places de 0 à $n-1$ (puisque la table est ronde, la $(n-1)$-ième place est donc à côté de la 0-ième), et les placements de 1 à 8.

Pour $n=17$, on peut procéder de la façon suivante : au i-ième dîner, on place la j-ième personne à la ij-ième place modulo 17. (Le schéma complet des placements est présenté un peu plus bas. De façon moins abstraite, mais plus longue et plus vague, on peut dire que le premier samedi, on place tous les convives dans l'ordre ; le deuxième samedi, on en place un sur deux ; le troisième, un sur trois ; et ainsi de suite ; sachant que quand les numéros dépassent 17, on « revient à 0 ».) On doit vérifier deux choses.

Vérifions d'abord que c'est un vrai placement. Chaque convive reçoit une et une seule place, car entre 0 et 16, il y a un et un seul nombre congru à un résidu donné modulo 17. Aucune place n'est occupée par deux convives : en effet, soit j et j' deux convives qui occupent la même place au i-ième dîner. Alors on a $ij \equiv ij'(mod 17)$, soit $17|ij-ij'$ ou encore $17|i(j-j')$. Puisque 17 est premier et que $0 < i < 17$, i est premier avec 17, donc $17|j-j'$. On a donc $j \equiv j'(mod 17)$, c'est-à-dire $j = j'$. Et comme il y a autant de places que de convives, toutes les places sont forcément occupées.

Vérifions maintenant que c'est bien une solution du problème. Puisque la différence entre les numéros de deux places voisines est congrue à ± 1 modulo 17, cela signifie qu'au i-ième dîner, la différence entre les numéros de deux personnes voisines est congrue à $\pm i$ modulo 17. Or les nombres $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8$ sont tous différents modulo 17 : deux personnes données ne peuvent donc être voisins qu'à un seul dîner.

On aurait pu aussi présenter explicitement le schéma des placements :

Place	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1er dîner	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2e dîner	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15
3e dîner	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14
4e dîner	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	14	1	5	9	13
5e dîner	0	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6e dîner	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	15	4	10	16	5	11
7e dîner	0	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8e dîner	0	8	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9

et vérifier que chaque convive apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et a des voisins différents à chaque ligne. Mais une telle solution, bien que moins abstraite, serait beaucoup plus laborieuse (366 vérifications à faire au total !), et a le défaut d'être « parachutée » : on peut voir qu'elle marche, mais on ne comprend pas bien pourquoi elle marche.

Pour $n = 18$, une solution possible consiste à partir de la disposition précédente, et à intercaler la nouvelle personne quelque part à chaque fois. Comme on sait déjà que les 17 premières personnes sont bien placées comme il faut, il suffit de faire en sorte que la dernière personne (qui porte, elle, le numéro 17 : ceci n'est pas une erreur, car on a numéroté à partir de 0) ait des voisins différents à chaque fois. On peut par exemple la mettre entre 3 et 4 au premier dîner, entre 11 et 13 au deuxième, puis entre 2 et 5, entre 10 et 14, entre 1 et 6, entre 9 et 15, entre 0 et 7, et enfin entre 8 et 16 au huitième dîner : chaque nombre entre 0 et 16 apparaît bien au plus une fois dans cette liste. La disposition complète est donc la suivante :

Place	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1er dîner	0	1	2	3	17	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2e dîner	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	17	13	15
3e dîner	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	17	5	8	11	14
4e dîner	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	17	14	1	5	9	13
5e dîner	0	5	10	15	3	8	13	1	17	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6e dîner	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	17	15	4	10	16	5	11
7e dîner	0	17	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8e dîner	0	8	17	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9.

Exercice 6. Soient p et q deux nombres réels tels que l'équation du second degré $x^2+px+q=0$ admette deux racines réelles distinctes u et v ($u>v$). On modifie légèrement les coefficients p et q, de moins de $0,01$, et on suppose que l'équation modifiée $x^2+p'x+q'=0$ (où $|p'-p|<0,01$ et $|q'-q|<0,01$) admet elle aussi deux racines réelles distinctes, u' et v' ($u'>v'$). Existe-t-il de telles valeurs p,q,p',q' pour lesquelles $|u'-u|>10000$?

La réponse est oui.

Solution 1 : Supposons que $|p'-p|<0,01$ et $|q'-q|<0,01$. On a $2|u-u'|=|p'-p+\sqrt{p^2-4q}-\sqrt{p'^2-4q'}|$. Comme $|p'-p|<0,01$, pour avoir $|u'-u|>10000$, il suffit d'avoir $|\sqrt{p^2-4q}-\sqrt{p'^2-4q'}|>20001$ d'après l'inégalité triangulaire. Posons alors $\eta=p^2-4q$, $p'=p+\epsilon_1$ et $q'=q+\epsilon_2$ de sorte que :

$$\left|\sqrt{p^2-4q}-\sqrt{p'^2-4q'}\right|=\left|\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta+2p\epsilon_1+\epsilon_1^2-4\epsilon_2}\right|.$$

Pour rendre cette quantité grande, l'idée est de prendre η suffisamment « petit » et p grand.

Par exemple , on fixe $p=10^{14}$, $\epsilon_1=10^{-3},\epsilon_2=10^{-3}$. On pose alors $\eta=4\epsilon_2-\epsilon_1^2>0$ et $q=(p^2-\eta)/4$. Finalement, on pose $p'=p+\epsilon_1$ et $q'=q+\epsilon_2$. Vérifions que ces valeurs conviennent. On a :

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{p^2-4q}-\sqrt{p'^2-4q'}\right| &= \left|\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta+2p\epsilon_1+\epsilon_1^2-4\epsilon_2}\right|\\ &= \left|\sqrt{\eta}-\sqrt{2p\epsilon_1}\right|\\ &\geq \sqrt{2p\epsilon_1}-1=\sqrt{2\times 10^{14}\times 10^{-3}}-1>20001,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution 2 : u et v sont racines de l'équation $0=(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)x+uv$, donc $p=-(u+v)$ et $q=uv$.

Il existe une valeur de N, pour laquelle l'équation de racines $u=N+1$ et $v=N-1$, à savoir $x^2-2Nx+(N^2-1)=0$, et celle de racines $N+10001,001$ et $N-10001$ à savoir $x^2-(2N+0,001)x+(N^2+0,001N-(10001,001\times 10001))=0$, ont même coefficient constant (il suffit que $0,001N=10001\times 10001,001-1$, donc que $q=100020010001$) tout en vérifiant $p'=-(2N+0,001)=p-0,001$.