Corrigé du test de sélection

Exercice 1

Enoncé. Soient $q > r > 0$ deux nombres rationnels tels que $\sqrt{q} - \sqrt{r}$ soit lui aussi rationnel. Démontrer que, dans ce cas, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ sont eux-mêmes des nombres rationnels.

Première démonstration

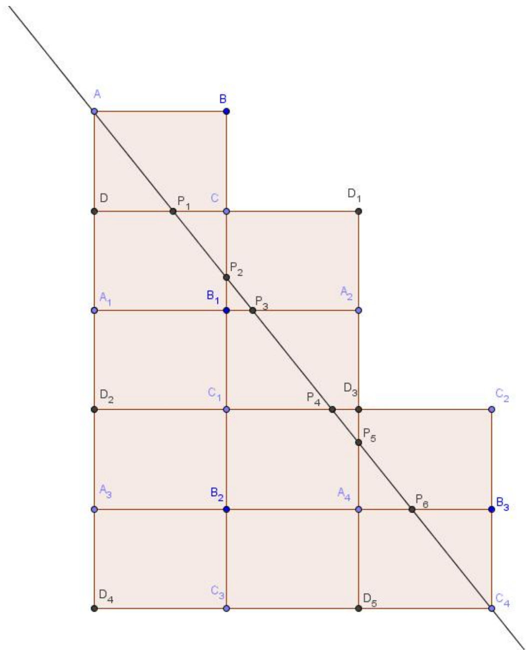
On sait que q et r sont rationnels. Donc $q - r$ est rationnel. De plus le quotient de deux nombres rationnels est rationnel. Or par hypothèse $\sqrt{q} - \sqrt{r}$ est un rationnel **non nul** (car $\sqrt{q} - \sqrt{r} > 0$). On en déduit que $\frac{p-q}{\sqrt{q}-\sqrt{r}}$ est rationnel. On sait aussi que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donc si on pose $a = \sqrt{q}$ et $b = \sqrt{r}$, on obtient : $q - r = (\sqrt{q} - \sqrt{r})(\sqrt{q} + \sqrt{r})$ donc $\sqrt{q} + \sqrt{r} = \frac{q-r}{\sqrt{q}-\sqrt{r}}$. Donc $\sqrt{q} + \sqrt{r}$ est rationnel. D'où $(\sqrt{q} + \sqrt{r}) + (\sqrt{q} - \sqrt{r}) = 2\sqrt{q}$ est rationnel donc $\sqrt{q}$ est rationnel. Et de même $(\sqrt{q} + \sqrt{r}) - (\sqrt{q} - \sqrt{r}) = 2\sqrt{r}$ est rationnel donc $\sqrt{r}$ est rationnel. D'où le résultat.

Deuxième démonstration

On pose $s = \sqrt{q} - \sqrt{r}$ qui est un rationnel **non nul** par hypothèse. Donc $\sqrt{q} = s + \sqrt{r}$ donc en élevant au carré on obtient : $q = s^2 + r + 2s\sqrt{r}$. Donc $\sqrt{r} = \frac{q-s^2-r}{2s}$. Comme q, s et r rationnels, $q - s^2 - r$ et $2s$ rationnels, donc $\sqrt{r}$ rationnel. Donc $\sqrt{q} = \sqrt{r} + s$ est rationnel (car s et $\sqrt{r}$ sont rationnels). D'où le résultat.

Exercice 2

Enoncé.
Soit $ABCD$ une table de billard rectangulaire, munie de rebords élastiques et de trous aux sommets A, B, C, D du rectangle, dont les dimensions vérifient : $AB = CD = 200cm$, $BC = DA = 150cm$. Soit P le point du côté CD tel que $CP = 80cm$, $PD = 120cm$. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. Démontrer qu'après six réflexions sur les côtés du rectangle, la boule tombe dans le trou C.
Solution.
Soit A_1B_1CD le symétrique $ABCD$ par rapport à (CD). On remarque que le deuxième point de rebond de la boule sur un côté de $ABCD$ est le symétrique de l'intersection P_2 de (AP) avec un côté de A_1B_1CD par rapport à (CD). Puis on fait de même le symétrique $A_2B_1CD_1$ de A_1B_1CD par rapport à (B_1C), etc... . (cf figure).



Il y a une correspondance entre A et les A_i, B et les B_i, ..., Det les D_i. Il suffit donc de montrer que $P_7 = C_i$ pour un certain i. On note H le projeté de P_7 sur (AD). ($P_7 \in (D_3C_4)$) Par le théorème de Thalès dans AHP_7, on a : $\frac{AD}{AH} = \frac{DP}{HP_7}$ or $HP_7 = 3DP$. Donc $HP_7 = 3AD = HC_4$ donc $P_7 = C_4$. D'où le résultat.

Exercice 3

Enoncé.
Trouver tous les nombres entiers x, y, z qui vérifient : $1 < x < y < z$
et $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2009$.
Solution.
L'idée est de factoriser le terme de gauche de l'égalité de sorte à obtenir une relation de divisibilité entre le terme de gauche et le terme de droite (qui sera un nombre entier fixé et dont on connaîtra les diviseurs).
On remarque que $x + y + z + xy + xz + yz + xyz = (1 + x)(1 + y)(1 + z) - 1$. L'égalité se réécrit donc : $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$ (décomposition en facteurs premiers de 67). Comme $2 < 1 + x < 1 + y < 1 + z$, obtient : $(1 + x = 3,\ 1 + y = 2 \times 5,\ 1 + z = 67)$ ou $(1 + x = 3,\ 1 + y = 5,\ 1 + z = 2 \times 67)$ ou $(1 + x = 5,\ 1 + y = 2 \times 3,\ 1 + z = 67)$. Les couples (x, y, z) solutions sont donc : $(2, 9, 66)$, $(2, 4, 133)$ et $(4, 5, 66)$.

Exercice 4

Enoncé.
Huit équipes participent à un tournoi. Chaque équipe joue une et une seule fois contre chacune des autres équipes, et il n'y a pas de match nul.
a) Démontrer qu'il existe forcément quatre équipes A, B, C, D telles que A ait gagné contre B, C et D, B ait gagné contre C et D et C ait gagné contre D.

b) Peut-on affirmer la même chose s'il n'y a que sept équipes participant au tournoi ?

Solution.

a)

Puisqu'il y a 8 équipes dans le tournoi, 28 matchs seront donc joués et donc il y aura 28 victoires, en tout, à répartir. Or, si aucun équipe ne gagnait plus de 3 matchs, cela ne donnerait qu'au plus $3 \times 8 = 24$ victoires. On en déduit qu'au moins une équipe, appelons-la A, a gagné au moins quatre matchs. Ne considérons maintenant plus que quatre équipes battues par A. Entre elles, ces équipes disputent 6 matchs et le raisonnement ci-dessus s'adapte directement pour conclure qu'une des ces quatre équipes, appelons-la B, en a battu deux parmi les trois autres. Appelons X et Y les deux équipe battues par B (et, rappelons-le, déjà battues par A). Le vainqueur du match entre X et Y est alors appelé C et le perdant est appelé D. Ainsi, A a battu B, C, D, et B a battu C, D, et C a battu D.

b)

Comme on va le voir la conclusion n'est plus assurée pour un tournoi à 7 équipes. Pour prouver cela, il suffit de construire un exemple de tournoi à 7 équipes dans lequel il n'existe pas 4 équipes vérifiant les conditions du a). Plutôt que de partir un peu au hasard, regardons de plus près le raisonnement du a). Si une équipe a gagné au moins 4 matchs, tout se met en place et l'on conclurait comme au a). Il faut donc que dans notre tournoi aucune équipe n'ait gagné plus de trois matchs, et puisqu'avec 7 équipes il y a 21 matchs joués, cela signifie qu'il faut que chaque équipe ait gagné exactement trois matchs. Pour une équipe donnée, si parmi les trois équipes qu'elle a battu, l'une a battu les deux autres, la conclusion du a) est conservée. Il faut donc que, pour chaque équipe, les trois qu'elle a battues se sont battues entre elles en cycle $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$. Le même raisonnement montre également que, pour chaque équipe, les trois qui l'ont battue se sont également battues entre elles en cycle. Avec tout cela, il n'est alors plus difficile de construire un tournoi à 7 équipes qui ne satisfait pas la conclusion du a) :

	A	B	C	D	E	F	G
A		0	0	0	1	1	1
B	1		0	1	1	0	0
C	1	1		0	0	0	1
D	1	0	1		0	1	0
E	0	0	1	1		0	1
F	0	1	1	0	1		0
G	0	1	0	1	0	1	

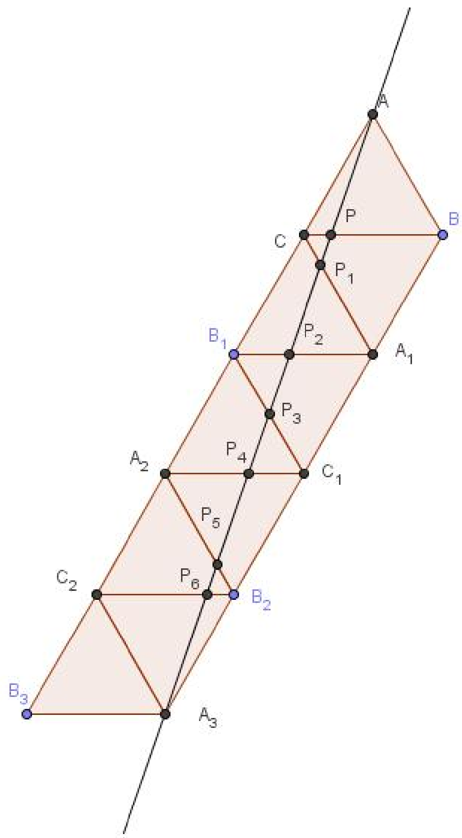
Exercice 6

Enoncé.

Soit $ABCD$ une table de billard triangulaire, munie de rebords élastiques et de trous aux sommets A, B, C du triangle, dont les dimensions vérifient : $AB = BC = CA = 200cm$. Soit P le point du côté BC tel que $BP = 160cm$, $PC = 40cm$. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. Démontrer qu'après sept réflexions sur les côtés du triangle, la boule tombe dans le trou A.

Question supplémentaire (à traiter uniquement si vous avez résolu tous les autres problèmes du test) : démontrer que deux points de la table de billard ABC sont traversés trois fois chacun par

la boule.
Solution.
Soit A_1BC le symétrique de ABC par rapport à (BC). On remarque que le deuxième point de rebond de la boule sur un côté de ABC est le symétrique de l'intersection de (AP) avec un côté de A_1BC par rapport à (BC). Pour trouver le 3^{me} point de rebond avec ABC on fait de même le symétrique CB_1A_1 de A_1CB par rapport à (A_1C) et on calcule le point d'intersection de (AP) avec un côté de A_1B_1C. On réitère le procédé (cf figure).



On est donc ramené à montrer que (AP) passe par A_3. Par le théorème de Thalès dans AB_3P_7, $\frac{CP}{B_3P_7} = \frac{AC}{AB_3} = \frac{1}{5}$ donc $B_3P_7 = 5CP = 200cm$ donc $P_7 = A_3$ d'où le résultat.

Exercice 5

Enoncé. Soit n un entier strictement positif, qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire : qui n'est pas le carré d'un entier). En regardant l'écriture décimale de $\sqrt{n}$, on constate que les k premières décimales ont toutes la même valeur v (par exemple, si $n = 48273160$, dans $\sqrt{n} = 6947,88888800044067...$, les 6 premières décimales sont égales à 8, donc $k = 6$ et $v = 8$).
(a) Si v $= 0$ ou v $= 9$, démontrer que $\sqrt{n} > \frac{10^k}{2}$.

Solution. Soit r l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Compte tenu de l'hypothèse, on constate que :

$$|r - \sqrt{n}| < 10^{-k}.$$

Soit $\epsilon = r - \sqrt{n}$ de sorte que $\sqrt{n} = r + \epsilon$. Alors $n = r^2 + 2r\epsilon + \epsilon^2$. Il vient :

$$n - r^2 = 2(\sqrt{n} - \epsilon)\epsilon + \epsilon^2 = 2\epsilon\sqrt{n} - \epsilon^2.$$

Or $|n-r^2| \geq 1$ car n et r^2 sont deux entiers distincts. En remarquant que $|2\epsilon\sqrt{n}-\epsilon^2| < |2\epsilon\sqrt{n}|$ (distinguer suivant si $\epsilon > 0$ ou $\epsilon < 0$), on en déduit :

$$1 \leq |n - r^2| \leq |2\epsilon\sqrt{n} - \epsilon^2| \leq 2|\epsilon|\sqrt{n}.$$

Or $2|\epsilon|\sqrt{n} = 2\sqrt{n}|r - \sqrt{n}| < 2 \cdot 10^{-k}\sqrt{n}$. En combinant les deux inégalités obtenues, on conclut $1 < 2 \cdot 10^{-k}\sqrt{n}$, ce qui résout la question.

(b) Pour toutes les valeurs de v, démontrer que $\sqrt{n} > \frac{10^k}{144}$.

Solution. Soit m la partie entière de $\sqrt{n}$ (c'est-à-dire que m est le plus grand entier inférieur à $\sqrt{n}$). Introduisons ϵ défini par $\sqrt{n} = m + \frac{v}{9} + \epsilon$. De même que dans le a), on montre que :

$$\left|\left(m + \frac{v}{9}\right)^2 - n\right| < 2|\epsilon|\sqrt{n}.$$

L'idée est de minorer la première quantité précédente par sa partie décimale, compte tenu du fait que n n'est pas un carré parfait. Lorsque $1 \leq v \leq 9$, on vérifie sans peine que la partie décimale de $\left(\frac{v}{9}\right)^2 + \frac{2mv}{9}$ est supérieure ou égale à $1/81$. On en déduit :

$$\frac{1}{81} \leq \left|\left(m + \frac{v}{9}\right)^2 - n\right| < 2|\epsilon|\sqrt{n}.$$

Or, comme $1 \leq v \leq 9$, on voit que $|\epsilon| < \frac{8}{9}10^{-k}$. On conclut que :

$$\frac{1}{81} < \frac{2 \cdot 8}{9}10^{-k}\sqrt{n},$$

d'où $\sqrt{n} > \frac{10^k}{144}$, ce qui résout l'exercice.

N.B. Ces solutions sont celles de Vincent Mouly.