

TEST DE SELECTION

Stage olympique de Grésillon 2009

Jeudi 4 juin 2009

collégiens

Durée : 3 heures

*Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Utilisez des copies distinctes pour des exercices distincts,
et écrivez vos nom, prénom et classe sur chaque copie.*

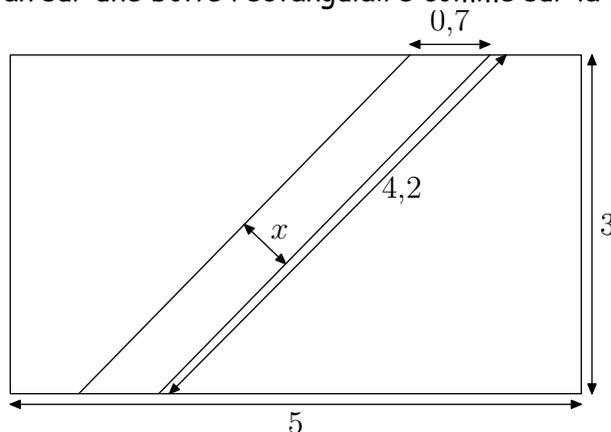
Exercice 1

Soit n un entier naturel. Montrer que :

- si n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs, alors : $2n - 1$ est le carré d'un entier.
- si $2n - 1$ est le carré d'un entier, alors n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Exercice 2

On a tendu un ruban sur une boîte rectangulaire comme sur la figure ci-dessous :



Calculer la largeur x du ruban.

Exercice 3

- On considère 11 nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir deux d'entre eux qui aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.
- On considère 41 nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir cinq d'entre eux tels que deux quelconques parmi ces cinq aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.

Exercice 4

Lors de la soirée du nouvel an chez mes grands parents, chaque convive a serré la main d'exactly 7 autres, et a fait la bise à tous les autres. Montrer que le nombre de convives était pair.