Eliminatoires du test de rentrée OFM 2016

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription au test OFM 2016 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath 2016 ou aux tests d'entrée de l'OFM passés. Les codes d'inscription des tests passés ne sont donc plus valides.

Exercices collégiens

Exercice 1. Trouver a tel que $\frac{1}{\sqrt{a+7}}+\frac{1}{7}=\frac{19}{84}$.

Solution de l'exercice 1 On a $\frac{1}{\sqrt{a+7}}=\frac{1}{12}$, donc $a+7=144$, ce qui donne $a=137$.

Exercice 2. Un train roule à vitesse constante. Il met 7 secondes à dépasser un point fixe au bord de la voie. D'autre part, entre le moment où l'avant du train aborde un pont de 870 mètres et le moment où l'arrière du train quitte le pont, il s'écoule 37 secondes. Déterminer la longueur du train, exprimée en mètres.

Solution de l'exercice 2 L'avant du train met $37-7=30$ secondes à franchir le pont, donc la longueur du train est $\frac{7}{30}\times 870=203$ mètres.

Exercice 3. Déterminer un nombre a tel que $85a-2630$ soit un nombre premier.

Solution de l'exercice 3 Comme ce nombre est divisible par 5, on doit avoir $85a-2630=5$, ce qui donne $a=31$.

Exercice 4. Déterminer le nombre d'entiers naturels qui sont multiples de 8 et de 50, et qui sont des diviseurs de 10000.

Solution de l'exercice 4 Un tel entier est multiple de 200. Tout revient à chercher le nombre de diviseurs de $10000/200=50=2\times 5^2$. Il y en a 6.

Exercice 5. Combien y a-t-il de manières de former une équipe de 4 personnes parmi 5 garçons et 4 filles, de sorte que l'équipe comporte au moins un garçon et au moins une fille ?

Solution de l'exercice 5 1 garçon et 3 filles : 5×4. 3 garçons et 1 fille : 10×4 2 garçons et 2 filles : 10×6.

Réponse : 120 (cela peut se faire à la main, même si on ne connaît pas les coefficients binomiaux).

Exercice 6. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot PROBLEME, ayant un sens ou non, telles que deux lettres E ne se suivent pas. (Par exemple, l'anagramme RPOELBEM convient mais pas POREEBML.)

Solution de l'exercice 6 On commence par permuter les lettres PROBLM : cela donne $1\times 2\times\cdots 6=720$ possibilités. Ensuite, on doit placer deux E dans 7 emplacements, ce qui donne encore 21 choix. La réponse est 15120.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On note $|ABC|$ son aire. Soit P un point intérieur au triangle tel que $\frac{|ABC|}{|PAB|}=\frac{|ABC|}{|PAC|}=10$. Soient M le point de $[AB]$ tel que (PM) soit parallèle à (AC), et N le point de $[AC]$ tel que (PN) soit parallèle à (AB). Déterminer $\frac{|ABC|}{|PMAN|}$.

Solution de l'exercice 7 Les hypothèses impliquent que $AN/AC=AM/AB=1/10$ donc la réponse est $10\times 10/2=50$.

Exercice 8. Des points $A, B, C, \ldots, T$ sont situés sur un cercle de sorte que le polygone $ABC \cdots T$ soit régulier (à 20 côtés). Les tangentes en A et en B au cercle se coupent en un point X. Déterminer, en degrés, l'angle $\widehat{AXB}$.

Solution de l'exercice 8 $180 - \frac{360}{20} = 162$.

Exercices communs

Exercice 9. Alice, Bernard et Célia sont partis en vacances. Alice a dépensé 138 euros, Bernard 173 euros et Célia 265 euros. Pour que les dépenses soient réparties de manière équitable, Alice donne une certaine somme d'argent à Célia et Bernard donne une certaine somme à Célia. Déterminer le montant, en euros, qu'Alice a donné à Célia.

Solution de l'exercice 9 Alice, Bernard et Célia dépensent en tout $138 + 173 + 265 = 576$ Euros, chacun doit donc contribuer 192 Euros. Par conséquent, Alice doit donner $192 - 138 = 54$ Euros.

Exercice 10. Déterminer le plus grand nombre qui divise à la fois 110000 et 121000, et qui a au plus deux diviseurs premiers.

Solution de l'exercice 10 Les nombres sont $2^4.5^4.11$ et $2^3.5^3.11^2$. On doit comparer $2^3.5^3$ et $5^3.11$. Le plus grand est $5^3.11 = 1375$.

Exercice 11. Une palette de 6 couleurs différentes est donnée. De combien de manières peut-on peindre un cube, en utilisant toutes les 6 couleurs, et exactement une couleur par face ? Deux manières de colorier sont considérées comme identiques si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une rotation quelconque dans l'espace.

Solution de l'exercice 11 On place la face ayant la couleur 1 en bas. Il y a 5 choix pour la face du haut. Il y a ensuite 24 choix pour les quatre faces latérales, mais à rotation près il n'y a que 6 choix possibles, donc la réponse est $5 \times 6 = 30$.

Exercice 12. Soit $MNPQ$ un losange tel que $MP = 180$. On suppose qu'il existe un carré $ABCD$ tel que $AB = 18$, $A \in [MN]$, $B \in [NP]$, $C \in [PQ]$ et $D \in [QM]$. Déterminer l'aire de $MNPQ$.

Solution de l'exercice 12 On prend des coordonnées telles que $A = (-9, 9)$, $B = (-9, -9)$, $C = (9, -9)$, $D = (9, 9)$, $M = (0, y)$, $N = (-x, 0)$, $P = (0, -y)$, $Q = (x, 0)$. On vérifie que $\frac{x}{y} = \frac{9}{y-9}$, donc $x = 10$. L'aire de $MNPQ$ est $2xy = 1800$.

Exercices lycéens

Exercice 13. Soit $u_0 = 10 + \frac{1}{10}$. On définit $u_1 = u_0^2 - 2$, $u_2 = u_1^2 - 2$, et plus généralement $u_{k+1} = u_k^2 - 2$ pour tout entier naturel k. Soit a l'entier le plus proche de u_{20}. Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de a.

Solution de l'exercice 13 On a $u_k = 10^{2^k} + 10^{-2^k}$ donc $a = 10^{2^{20}}$ possède $2^{20} + 1 = 1048577$ chiffres.

Exercice 14. Soit x un nombre rationnel tel que $\sqrt{x} + \sqrt{x+13} = \sqrt{4x+17}$. On écrit x sous la forme $x = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels n'ayant pas de diviseurs communs. Déterminer la valeur de $a + b$.

Solution de l'exercice 14 On élève au carré et on simplifie : $2\sqrt{x^2 + 13x} = 2x + 4$. On élève encore au carré et on simplifie, ce qui donne $x = 4/9$. Réciproquement, on vérifie que x convient, donc $a + b = 13$.

Exercice 15. De combien de manières peut-on écrire 10^6 comme un produit $A \times B \times C$ de trois entiers naturels ? (N.B. Par exemple, les écritures $1 \times 1000 \times 1000$ et $1000 \times 1 \times 1000$ sont considérées comme différentes.)

Solution de l'exercice 15 On cherche $A = 2^a 5^b$, $B = 2^c 5^d$ tels que $a + c \leqslant 6$ et $b + d \leqslant 6$. Il y a $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$ solutions pour (a, c) et autant pour (b, d) donc en tout $28^2 = 784$ solutions.

Exercice 16. Déterminer le nombre d'entiers divisibles par 11, dont l'écriture décimale est de la forme $N = abcdabcd \cdots abcd$, le motif $abcd$ étant répété 2016 fois, et a, b, c, d étant des chiffres tels que $a \neq 0$.

Solution de l'exercice 16 $N = \overline{abcd} \times 100010001 \cdots 0001$ est divisible par 11 si et seulement si $\overline{abcd}$ l'est. On cherche donc le nombre de multiples de 11 parmi $1001, 1012, \ldots, 9999$. Il y en a $\frac{9999-1001}{11} + 1 = 819$.

Exercice 17. Déterminer le nombre d'entiers s'écrivant avec 15 chiffres consistant en des 1, des 2 et des 3, tels qu'il y ait au moins un 1, au moins un 2 et au moins un 3.

Solution de l'exercice 17 Soit $n = 15$. Le nombre recherché est $3^n - 3 \times 2^n + 3 = 14250606$.

Exercice 18. Déterminer le nombre de suites $a_1, \ldots, a_{100}$ d'entiers telles que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{100}$, $a_1 = 1$, $a_{100} = 4$, et telles qu'il existe m et n vérifiant $a_m = 2$ et $a_n = 3$.

Solution de l'exercice 18 On prend k, m, n maximaux tels que $a_k = 1$, $a_m = 2$ et $a_n = 3$. Alors $1 \leqslant k < m < n \leqslant 99$, et le triplet (k, m, n) détermine la suite. Par conséquent, le nombre recherché est $\dfrac{99 \times 98 \times 97}{6} = 156849$.

Exercice 19. Un triangle ABC est isocèle en A. On suppose que tous les rectangles dont deux sommets appartiennent à $[BC]$ et les deux autres sommets à $[AB]$ et $[AC]$ ont un périmètre égal à 84. Déterminer la valeur de AB^2.

Solution de l'exercice 19 On note $MNPQ$ le rectangle, avec $M, N \in [B, C]$. Soit D le milieu de $[BC]$. Posons $x = BM$. On a $MQ = x\frac{AD}{BD}$ et $MN = BC - 2x$. Comme $42 = MQ + MN$, on a $\frac{AD}{BD} = 2$ et $BC = 42$, donc $AD = 42$ et $AB^2 = BD^2 + AD^2 = 21^2 + 42^2 = 2205$.

Exercice 20. Trois droites D_1, D_2, D_3 sont parallèles entre elles. La droite D_2 est située entre les deux autres. Elle se situe à 13 centimètres de D_1 et à 31 centimètres de D_3. Déterminer l'aire, exprimée en centimètres carrés, d'un carré dont chacune de ces trois droites contient un sommet.

Solution de l'exercice 20 On note $ABCD$ le carré tel que $A \in D_1, B \in D_2$ et $C \in D_3$. Soit $x = AB$. On note α l'angle entre D_2 et (BA). Alors $\sin \alpha = \frac{13}{x}$ et $\cos \alpha = \frac{31}{x}$ donc $x^2 = 13^2 + 31^2 = 1130$.