Eliminatoires du test de rentrée OFM 2016

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription au test OFM 2016 est indépendante de l'inscription à la coupe Animath 2016 ou aux tests d'entrée de l'OFM passés. Les codes d'inscription des tests passés ne sont donc plus valides.

Exercices collégiens

Exercice 1. Trouver a tel que $\frac{1}{\sqrt{a+7}}+\frac{1}{7}=\frac{19}{84}$.

Exercice 2. Un train roule à vitesse constante. Il met 7 secondes à dépasser un point fixe au bord de la voie. D'autre part, entre le moment où l'avant du train aborde un pont de 870 mètres et le moment où l'arrière du train quitte le pont, il s'écoule 37 secondes. Déterminer la longueur du train, exprimée en mètres.

Exercice 3. Déterminer un nombre a tel que $85a-2630$ soit un nombre premier.

Exercice 4. Déterminer le nombre d'entiers naturels qui sont multiples de 8 et de 50, et qui sont des diviseurs de 10000.

Exercice 5. Combien y a-t-il de manières de former une équipe de 4 personnes parmi 5 garçons et 4 filles, de sorte que l'équipe comporte au moins un garçon et au moins une fille ?

Exercice 6. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot PROBLEME, ayant un sens ou non, telles que deux lettres E ne se suivent pas. (Par exemple, l'anagramme RPOELBEM convient mais pas POREEBML.)

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On note $|ABC|$ son aire. Soit P un point intérieur au triangle tel que $\frac{|ABC|}{|PAB|}=\frac{|ABC|}{|PAC|}=10$. Soient M le point de $[AB]$ tel que (PM) soit parallèle à (AC), et N le point de $[AC]$ tel que (PN) soit parallèle à (AB). Déterminer $\frac{|ABC|}{|PMAN|}$.

Exercice 8. Des points $A, B, C, \ldots, T$ sont situés sur un cercle de sorte que le polygone $ABC \cdots T$ soit régulier (à 20 côtés). Les tangentes en A et en B au cercle se coupent en un point X. Déterminer, en degrés, l'angle $\widehat{AXB}$.

Exercices communs

Exercice 9. Alice, Bernard et Célia sont partis en vacances. Alice a dépensé 138 euros, Bernard 173 euros et Célia 265 euros. Pour que les dépenses soient réparties de manière équitable, Alice donne une certaine somme d'argent à Célia et Bernard donne une certaine somme à Célia. Déterminer le montant, en euros, qu'Alice a donné à Célia.

Exercice 10. Déterminer le plus grand nombre qui divise à la fois 110000 et 121000, et qui a au plus deux diviseurs premiers.

Exercice 11. Une palette de 6 couleurs différentes est donnée. De combien de manières peut-on peindre un cube, en utilisant toutes les 6 couleurs, et exactement une couleur par face ? Deux manières de colorier sont considérées comme identiques si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une rotation quelconque dans l'espace.

Exercice 12. Soit $MNPQ$ un losange tel que $MP=180$. On suppose qu'il existe un carré $ABCD$ tel que $AB=18$, $A\in[MN]$, $B\in[NP]$, $C\in[PQ]$ et $D\in[QM]$. Déterminer l'aire de $MNPQ$.

Exercices lycéens

Exercice 13. Soit $u_0 = 10 + \frac{1}{10}$. On définit $u_1 = u_0^2 - 2$, $u_2 = u_1^2 - 2$, et plus généralement $u_{k+1} = u_k^2 - 2$ pour tout entier naturel k. Soit a l'entier le plus proche de u_{20}. Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de a.

Exercice 14. Soit x un nombre rationnel tel que $\sqrt{x} + \sqrt{x+13} = \sqrt{4x+17}$. On écrit x sous la forme $x = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels n'ayant pas de diviseurs communs. Déterminer la valeur de $a + b$.

Exercice 15. De combien de manières peut-on écrire 10^6 comme un produit $A \times B \times C$ de trois entiers naturels ? (N.B. Par exemple, les écritures $1 \times 1000 \times 1000$ et $1000 \times 1 \times 1000$ sont considérées comme différentes.)

Exercice 16. Déterminer le nombre d'entiers divisibles par 11, dont l'écriture décimale est de la forme $N = abcdabcd \cdots abcd$, le motif $abcd$ étant répété 2016 fois, et a, b, c, d étant des chiffres tels que $a \neq 0$.

Exercice 17. Déterminer le nombre d'entiers s'écrivant avec 15 chiffres consistant en des 1, des 2 et des 3, tels qu'il y ait au moins un 1, au moins un 2 et au moins un 3.

Exercice 18. Déterminer le nombre de suites $a_1, \ldots, a_{100}$ d'entiers telles que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{100}$, $a_1 = 1$, $a_{100} = 4$, et telles qu'il existe m et n vérifiant $a_m = 2$ et $a_n = 3$.

Exercice 19. Un triangle ABC est isocèle en A. On suppose que tous les rectangles dont deux sommets appartiennent à $[BC]$ et les deux autres sommets à $[AB]$ et $[AC]$ ont un périmètre égal à 84. Déterminer la valeur de AB^2.

Exercice 20. Trois droites D_1, D_2, D_3 sont parallèles entre elles. La droite D_2 est située entre les deux autres. Elle se situe à 13 centimètres de D_1 et à 31 centimètres de D_3. Déterminer l'aire, exprimée en centimètres carrés, d'un carré dont chacune de ces trois droites contient un sommet.