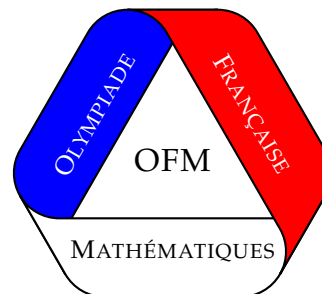


# ANIMATH OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DE RENTRÉE  
MERCREDI 5 OCTOBRE 2016

DURÉE :  
3 HEURES POUR LES ÉLÈVES DE COLLÈGE  
4 HEURES POUR LES ÉLÈVES DE LYCÉE

## Instructions

- ▷ Il est **impératif** de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Les élèves de collège doivent chercher les exercices de 1 à 5.
- Les élèves de lycée doivent chercher les exercices de 4 à 8.
- Les exercices sont notés chacun sur 7 points.

---

Animath, Olympiades Françaises de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.

olymp@animath.fr

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe et le numéro du problème en haut à droite.

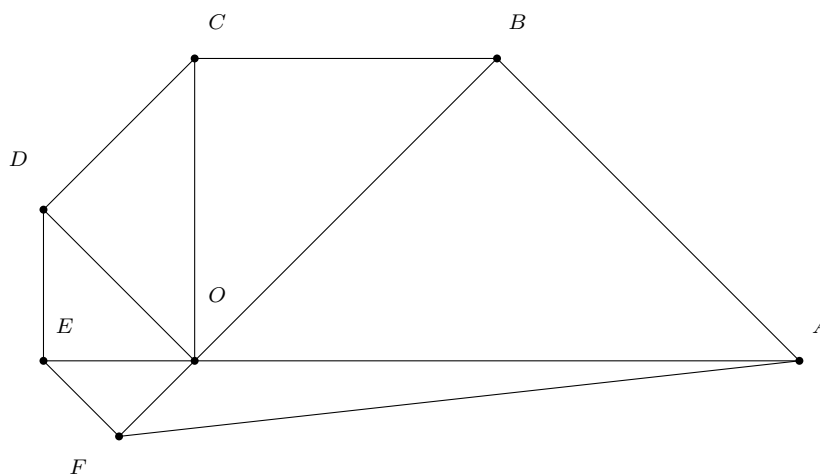
## EXERCICES COLLÈGE

**Exercice 1.** Alice, Bernard, Cédric et Diane jouaient au tennis dans la cour. Soudain, la balle brisa la fenêtre du voisin. Furieux, celui-ci s'approcha des quatre enfants.

Alice dit : "Ce n'est pas moi !". Bernard dit : "C'était Diane". Cédric dit : "Non, c'était Bernard". Diane dit : "Bernard a menti".

En supposant qu'exactement un des quatre enfants a dit la vérité, lequel d'entre eux a-t-il cassé la vitre du voisin ?

**Exercice 2.** Dans la figure ci-dessous, les triangles  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$ ,  $DEO$  et  $FEO$  sont rectangles isocèles. On suppose que  $OA = 8$  cm. Déterminer l'aire de  $AOF$  en  $\text{cm}^2$ .



**Exercice 3.** 2016 points sont alignés sur une droite. De combien de manières peut-on les colorier en rouge, vert ou bleu, de sorte que deux points voisins quelconques soient de couleur différente, et que chaque couleur soit utilisée au moins une fois ?

## EXERCICES COMMUNS

**Exercice 4.** Deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  sont tangents extérieurement en un point  $X$ . Une tangente commune aux deux cercles rencontre  $C_1$  en  $Y$  et  $C_2$  en  $Z$  (avec  $Y \neq Z$ ). Soit  $T$  tel que  $[YT]$  est un diamètre de  $C_1$ . Montrer que  $T, X, Z$  sont alignés.

**Exercice 5.** Un palindrome est un nombre dont l'écriture décimale ne change pas si on inverse l'ordre des chiffres. Par exemple, 3773 est un palindrome. Un nombre à quatre chiffres  $\overline{abcd}$

est dit *équilibré* si  $a + b = c + d$  (par exemple, 2736 est équilibré). Déterminer tous les nombres équilibrés à quatre chiffres qui sont somme de deux palindromes à quatre chiffres.

Note : un palindrome ne peut pas commencer par un zéro. Par exemple, 0770 n'est pas un palindrome.

## EXERCICES LYCÉE

*Exercice 6.* Déterminer tous les entiers  $n \geq 3$  tels que l'on puisse placer  $n$  nombres réels deux à deux distincts sur un cercle de sorte que chacun de ces nombres soit le produit de ses deux voisins.

*Exercice 7.* Le nombre "3" est écrit sur un tableau. Alice et Bernard jouent au jeu suivant : chacun leur tour, si on désigne par  $n$  le nombre écrit au tableau, le joueur le remplace par un entier  $m$  tel que  $n < m < n^2$ , et tel que  $m$  n'a pas de diviseur commun avec  $n$  autre que 1. Le premier joueur qui atteint un nombre plus grand ou égal à 2016 perd la partie. Alice commence.

Déterminer quel est le joueur pour lequel il existe une stratégie lui permettant de gagner à coup sûr, et décrire cette stratégie.

*Exercice 8.* Une liste de nombres est dite *jolie* si elle est constituée de nombres entiers strictement positifs tels que la somme de ces entiers est égale à leur produit. Déterminer le plus petit nombre d'entiers égaux à un qui peut contenir une jolie liste de 100 nombres.

\* \* \*