Eliminatoires test de rentrée OFM 2015 : corrigé

Questionnaire lycéens

Exercice 1. Soit x un nombre réel strictement positif tel que $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{\sqrt{x^2+6x+9}} = \dfrac{37}{39}$. Déterminer la valeur de $10x$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On a $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{\sqrt{(x+3)^2}} = \dfrac{37}{39}$, donc $\dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{37}{39}$, ce qui donne $39(x+2) = 37(x+3)$. Ceci se simplifie en $(39-37)x = 37 \times 3 - 39 \times 2 = 111 - 78 = 33$, ou encore $x = 33/2$. Finalement, $10x = 33 \times 5 = 165$.

Exercice 2. Soit x un réel tel que $x^3 = x+4$. Soient a, b, c, d sont des entiers relatifs non nuls tels que $a + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$. Déterminer la valeur de $\dfrac{ac}{bd}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> En multipliant $x^3 = x+4$ par x, on trouve que $x^4 = x^2 + 4x = x^2 + 4(x^3 - 4) = 4x^3 + x^2 - 16$, donc $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16 = 0$. Pour $(a, b, c, d) = (16, -1, -4, 1)$, on a $\dfrac{ac}{bd} = 64$.

(On démontre que si (a', b', c', d') est un autre quadruplet qui convient, alors il est proportionnel à (a, b, c, d). Pour cela, on montre d'abord que $X^3 - X - 4$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$, donc qu'il est irréductible sur $\mathbb{Z}$; or, $(0, ab' - a'b, ac' - a'c, ad' - a'd)$ convient également, ce qui fournit un polynôme de degré au plus 2 qui annule x... Ceci n'était pas demandé dans l'énoncé, qui sous-entendait que le rapport $ac/(bd)$ avait une valeur unique.)

Exercice 3. Soient a et b des entiers tels que $0 < b < a$ et

$$\frac{2^{8060} - 1}{(2^{4030} + 1)(2^{2015} - 1)} = 2^a + b.$$

Déterminer la valeur de $a + b$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> $2^{8060} - 1 = (2^{4030})^2 - 1 = (2^{4030} - 1)(2^{4030} + 1) = (2^{2015} - 1)(2^{2015} + 1)(2^{4030} + 1)$, donc la fraction est égale à $2^{2015} + 1$. Comme $2^a < 2^a + b < 2^a + a < 2^{a+1}$, on en déduit $2^a < 2^{2015} + 1 < 2^{a+1}$ donc $a \leqslant 2015 < a + 1$. La seule possibilité est $a = 2015$ et $b = 1$, donc $a + b = 2016$.

Exercice 4. Il y a 2 manières de placer deux dominos identiques 1×2 afin de recouvrir un échiquier 2×2 : soit en les plaçant tous les deux horizontalement, soit en les plaçant tous les deux verticalement.

De combien de manières peut-on recouvrir un échiquier 2×11 avec 11 dominos identiques 1×2 ?

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Soit a_n le nombre de manière de recouvrir un échiquier à 2 lignes et n colonnes avec n dominos identiques 1×2. On a $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Si la case en haut à gauche est recouverte par un domino vertical, il reste un échiquier $2 \times (n-1)$ à recouvrir, ce qui fait a_{n-1} possibilités.

Si la case en haut à gauche est recouverte par un domino horizontal, alors la case en bas à gauche doit l'être également, et il reste un échiquier $2 \times (n-2)$ à recouvrir, ce qui fait a_{n-2} possibilités.

On en déduit que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout n. On calcule alors de proche en proche : $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$.

Exercice 5. Un joueur possède quatre cartes noires et trois cartes rouges, toutes distinctes. De combien de manières peut-il les ordonner de sorte que deux cartes successives ne soient pas toutes les deux rouges ?

Solution de l'exercice 5 On a les 10 dispositions $NRNRNRN$, $RNNRNRN$, $RNRNNRN$, $RNRNRNN$, $NNRNRNR$, $NRNNRNR$, $NRNRNNR$, $RNNNRNR$, $RNNRNNR$, $RNRNNNR$.

Pour chacune de ces dispositions, on peut permuter les quatre cartes noires (24 possibilités) et permuter les trois cartes rouges (6 possibilités), ce qui donne en tout $10 \times 24 \times 6 = 1440$.

Exercice 6. On dispose de 102 cadeaux distincts. On veut les distribuer aux 100 gagnants d'un concours, de sorte que chaque gagnant reçoive au moins un cadeau. Soit N le nombre de manières dont on peut le faire. Calculer

$$\frac{N \times 48}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 102}.$$

Solution de l'exercice 6 Premier cas : l'un des gagnants reçoit 3 cadeaux (il faut donc choisir 3 cadeaux parmi 102, puis 1 personne parmi 100, puis attribuer 99 cadeaux à 99 personnes). Cela fait en tout

$$\frac{102 \times 101 \times 100}{6} \times 100 \times 99! = \frac{100 \times 102!}{6}$$

possibilités.

Deuxième cas : deux gagnants reçoivent deux cadeaux chacun. On sélectionne 2 personnes parmi 100, puis 2 cadeaux parmi 102, puis 2 cadeaux parmi les 100 restants, et enfin il faut attribuer 98 cadeaux à 98 personnes. Cela fait en tout

$$\frac{100 \times 99}{2} \times \frac{102 \times 101}{2} \times \frac{100 \times 99}{2} \times 98! = 102! \times \frac{100 \times 99}{8}$$

Cela donne en tout

$$102! \times (\frac{100 \times 99}{8} + \frac{100}{6}) = 102! \times 100 \times \frac{99 \times 6 + 8}{48},$$

donc $N = 100 \times (99 \times 6 + 8) = 100 \times (100 \times 6 + 2) = 60200$.

Exercice 7. Déterminer la somme de tous les entiers *relatifs* a tels que $a^2 - 82a$ soit un nombre premier.

Solution de l'exercice 7 $a(a-82)$ est premier, donc l'un des facteurs est égal à 1 ou à -1. Si $a = 1$ alors $a(a-82)$ est négatif, donc n'est pas premier. Si $a = -1$ alors $a(a-82) = 83$ est premier. Si $a - 82 = 1$ alors $a = 83$ donc $a(a-82)$ est premier. Enfin, si $a - 82 = -1$ alors $a(a-82) < 0$ n'est pas premier. La réponse est donc $-1 + 83 = 82$.

Exercice 8. Déterminer le nombre d'entiers naturels $n > 2015$ tels que n est divisible par $n - 2015$.

Solution de l'exercice 8 Ecrivons $n = 2015 + k$. On cherche donc le nombre d'entiers strictement positifs k tels que $2015 + k$ est divisible par k. Ceci équivaut à ce que k divise $2015 = 5 \times 13 \times 31$. Les diviseurs de 2015 sont les nombres de la forme $5^a 13^b 31^c$ avec a, b, c égaux à 0 ou 1 : il y en a 8.

Exercice 9. Déterminer le nombre d'entiers $1 \leqslant a \leqslant 1000$ tels que $(a^2+1)(a^2+5)$ est divisible par 4.

Solution de l'exercice 9 Si a est pair alors $(a^2+1)(a^2+5)$ est impair donc n'est pas divisible par 4. Si a est impair alors a^2+1 et a^2+5 sont pairs donc leur produit est divisible par 4. Il y a donc 500 entiers qui conviennent.

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{CBA} = 61°$. Soit E le point, autre que A, situé sur le cercle circonscrit à ABC tel que $EB = EC$. Soit D le point autre que A tel que $DB = DC = AB$.

Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BED}$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On a $\widehat{BAC} = 180° - 2\widehat{CBA} = 58°$.

D est le symétrique de A par rapport à la droite (AB). On a $\widehat{BED} = 180° - \widehat{AEB} = 180° - (90° - \widehat{BAE}) = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90 + 29 = 119°$.

Exercice 11. Un cercle de centre A et de rayon 99 est tangent extérieurement à un cercle de centre B et de rayon 100. On note D et D' les deux droites qui sont tangentes extérieurement aux deux cercles à la fois, et M leur point d'intersection. Déterminer la longueur MA.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On a $\dfrac{99}{100} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MA}{MA+99}$ donc après simplification, $MA = 99 \times 199 = 19701$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 130$ et $BC = 240$. Un cercle de rayon R est tangent en B à (AB) et tangent en C à (AC). Déterminer la valeur de R.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC. On a $(DB) \perp (BA)$ et $(DC) \perp (AC)$. De plus, pour des raisons de symétrie on a $DB = DC$, donc D est le centre du cercle de rayon R dans l'énoncé.

Soit M le milieu de $[BC]$. Alors ABM est rectangle en M avec $BM = 120$ et $AB = 130$, donc en utlisant le théorème de Pythagore on trouve que $AM = 50$.

En écrivant de deux manière la tangente de l'angle $\widehat{BAM}$, on trouve $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{BM}{AM}$, donc $\dfrac{R}{130} = \dfrac{120}{50}$, ce qui se simplifie en $R = 312$.