

Eliminatoires test de rentrée OFM 2015

Questionnaire lycéens

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il n'est pas nécessaire de trouver toutes les bonnes réponses pour se qualifier.

Exercice 1. Soit x un nombre réel strictement positif tel que $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{\sqrt{x^2 + 6x + 9}} = \frac{37}{39}$. Déterminer la valeur de $10x$.

Exercice 2. Soit x un réel tel que $x^3 = x + 4$. Soient a, b, c, d sont des entiers relatifs non nuls tels que $a + bx^2 + cx^3 + dx^4 = 0$. Déterminer la valeur de $\frac{ac}{bd}$.

Exercice 3. Soient a et b des entiers tels que $0 < b < a$ et

$$\frac{2^{8060} - 1}{(2^{4030} + 1)(2^{2015} - 1)} = 2^a + b.$$

Déterminer la valeur de $a + b$.

Exercice 4. Il y a 2 manières de placer deux dominos identiques 1×2 afin de recouvrir un échiquier 2×2 : soit en les plaçant tous les deux horizontalement, soit en les plaçant tous les deux verticalement.

De combien de manières peut-on recouvrir un échiquier 2×11 avec 11 dominos identiques 1×2 ?

Exercice 5. Un joueur possède quatre cartes noires et trois cartes rouges, toutes distinctes. De combien de manières peut-il les ordonner de sorte que deux cartes successives ne soient pas toutes les deux rouges ?

Exercice 6. On dispose de 102 cadeaux distincts. On veut les distribuer aux 100 gagnants d'un concours, de sorte que chaque gagnant reçoive au moins un cadeau. Soit N le nombre de manières dont on peut le faire. Calculer

$$\frac{N \times 48}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 102}.$$

Exercice 7. Déterminer la somme de tous les entiers *relatifs* a tels que $a^2 - 82a$ soit un nombre premier.

Exercice 8. Déterminer le nombre d'entiers naturels $n > 2015$ tels que n est divisible par $n - 2015$.

Exercice 9. Déterminer le nombre d'entiers $1 \leq a \leq 1000$ tels que $(a^2 + 1)(a^2 + 5)$ est divisible par 4.

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{CBA} = 61^\circ$. Soit E le point, autre que A , situé sur le cercle circonscrit à ABC tel que $EB = EC$. Soit D le point autre que A tel que $DB = DC = AB$.

Déterminer la valeur de l'angle \widehat{BED} .

Exercice 11. Un cercle de centre A et de rayon 99 est tangent extérieurement à un cercle de centre B et de rayon 100. On note D et D' les deux droites qui sont tangentes extérieurement aux deux cercles à la fois, et M leur point d'intersection. Déterminer la longueur MA .

Exercice 12. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 130$ et $BC = 240$. Un cercle de rayon R est tangent en B à (AB) et tangent en C à (AC) . Déterminer la valeur de R .