OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DE RENTRÉE

Mercredi 7 octobre 2015

Durée :

3 heures pour les élèves de collège

4 heures pour les élèves de lycée

Instructions

- Il est **impératif** de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

- Les élèves de collège doivent chercher les exercices de 1 à 5.

- Les élèves de lycée doivent chercher les exercices de 4 à 8.

- Les exercices sont notés chacun sur 7 points.

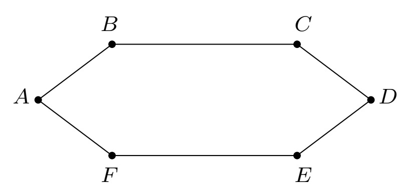
Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe et le numéro du problème en haut à droite.*

EXERCICES COLLÈGE

Exercice 1. Quinze élèves participent à un stage de mathématiques. Chaque soir, trois d'entre elles vont manger une glace. À la fin du stage, il se trouve que deux élèves quelconques sont toujours allées manger une glace en même temps une et une seule fois. Combien de jours le stage a-t-il duré? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. On prend trois chiffres x, y, z tels que $x > y > z > 0$. En faisant la somme des six nombres à trois chiffres obtenus en permutant ces 3 chiffres on trouve 4884 (par exemple, si $x = 3$, $y = 2$ et $z = 1$ on aurait trouvé $321 + 312 + 213 + 231 + 123 + 132 = 1332$). Quelles sont les valeurs possibles du nombre formé par les trois chiffres x, y, z (pris dans cet ordre)? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Dans la figure ci-dessous, $AB = AF = CD = DE = 18$, $BC = EF = a$ et $BF = 24$. Par ailleurs, le quadrilatère $BCEF$ est un rectangle.



On suppose que l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est égale à l'aire d'un rectangle dont deux côtés qui se suivent ont pour longueur a et 36. Trouver a^2. Justifiez votre réponse.

Note. On pourra utiliser le théorème de Pythagore, qui s'énonce comme suit. Si XYZ est un triangle rectangle en X, alors $XY^2 + XZ^2 = YZ^2$.

EXERCICES COMMUNS

Exercice 4. Pour tout entier strictement positif k, si k est inscrit au tableau, on peut l'effacer et le remplacer par le nombre $a + b$, du moment que a et b sont des entiers strictement positifs tels que $ab = k$ (par exemple, il est possible de remplacer 20 par 12, car $12 = 2 + 10$ et $20 = 2 \times 10$).

Initialement, on a inscrit l'entier $n > 0$ au tableau. Déterminer, selon les valeurs de n, le plus petit nombre qu'il est possible d'écrire au tableau après un nombre fini de remplacements (éventuellement aucun).

Exercice 5. On fixe un nombre entier $n \geq 2$ et on considère des nombres $a_1, \ldots, a_n$ tels que $-\frac{1}{2} \leq a_i \leq \frac{1}{2}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On suppose que si on retire n'importe lequel de ces nombres, la somme des $n - 1$ autres est toujours un nombre entier relatif.

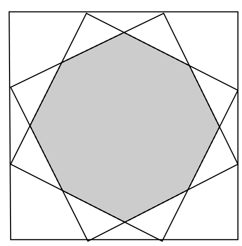
(1) Si n est pair, montrer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(2) Si n est impair, a-t-on toujours $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$?

Exercices lycée

Exercice 6. Un certain nombre d'élèves passent une épreuve de mathématiques. Si on dispose les tables pour former un carré, il y a aura 5 élèves qui n'auront pas de place. Par contre, si on forme un rectangle avec 7 rangées de plus que de colonnes, tous les élèves auront une place (et il n'y aura pas de place vide). Quel est le plus grand nombre d'élèves possible ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7. Chaque côté d'un carré unité est partagé en 3 segments égaux. On trace la figure ci-dessous à partir de ce partage. Quelle est l'aire du polygône grisé ? Justifiez votre réponse.



Exercice 8. On considère une suite de nombres réels $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tels que $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ et

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq 1.$$

Par exemple, $a_3 = \frac{7^2-1}{1} = 48$. Montrer que $9a_na_{n+1} + 1$ est le carré d'un nombre entier pour tout entier $n \geq 1$.

* * *