OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE RENTRÉE

MERCREDI 1ER OCTOBRE 2014

CORRIGÉ

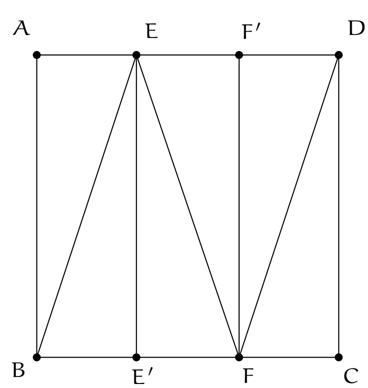
Exercice 1. Un restaurant propose trois desserts, et exactement deux fois plus d'entrées que de plats principaux. Un dîner consiste en une entrée, un plat et un dessert. Quel est le plus petit nombre de plats principaux que le restaurant doit proposer afin qu'un client puisse manger un dîner différent chaque soir de l'année 2014 ?

Solution de l'exercice 1 Désignons par p le nombre de plats principaux que le restaurant propose. Alors il y a $2p$ entrées possibles, p plats principaux possibles et 3 desserts possible, ce qui fait donc $(2p) \times p \times 3$ dîners possibles différents au total. Comme l'année 2014 comporte 365 jours, on cherche donc le plus petit entier positif p tel que $(2p) \times p \times 3 \geqslant 365$.

Cela revient à chercher le plus petit entier positif p tel que $6p^2 \geqslant 365$, ou encore $p^2 \geqslant 60 + \frac{5}{6}$. Comme $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$, le plus petit nombre de plats principaux que le restaurant doit proposer est donc 8.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré. On suppose qu'il existe un point E sur le segment $[AD]$ et un point F sur le segment $[BC]$ tels que $BE = EF = FD = 1$. Combien vaut l'aire du carré ?

Solution de l'exercice 2



Soit E' le milieu du segment $[BF]$. Nous allons d'abord montrer que $AEE'B$ est un rectangle. Comme le triangle BEF est isocèle en E, E' est aussi le pied de la hauteur issue de E. Donc $(EE') \mathbin{/\!/} (AB)$. Or $(AE) \mathbin{/\!/} (BE')$ car les côtés opposés d'un carré sont parallèles. Le quadralitaère $AEE'B$ a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme. Or $(AE) \perp (AB)$. Mais on sait qu'un parallelogramme ayant un angle droit est un rectangle. On en déduit que $AEE'B$ est un rectangle. En particulier, comme les côtés opposés d'un rectangle sont égaux, on a $AE = BE'$.

Si on note F' le milieu du segment $[ED]$, on montre exactement de la même manière $(FF') \mathbin{/\!/} (AB)$, puis que $EF'FE'$ et $F'DCF$ sont des rectangles, et enfin que $EF' = E'F$ et $F'D = FC$.

Maintenant, comme E' est le milieu de $[BF]$, on a $BE' = E'F$, et comme F' est le milieu de $[ED]$, on a $EF' = F'D$. Donc $BE = E'F = FC$. En notant a la longueur du côté du carré, on en déduit que les largeurs des rectangles $AEE'B$, $EF'FE'$, $F'DCF$ sont toutes de longueur $\frac{a}{3}$.

Appliquons alors le théorème de Pythagore dans le triangle AEB, rectangle en A :

$$1 = BE^2 = AE^2 + AB^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{10}{9}a^2.$$

Donc $a^2 = \frac{9}{10}$. On en conclut que l'aire du carré est égale à $\frac{9}{10}$.

Exercice 3. a) Est-ce que 2016 est divisible par 81 ? Est-ce que 20162016 est divisible par 81 ?

b) Montrer que l'entier $N = 2016 \cdots 2016$ ("2016" étant écrit 2016 fois) est divisible par 81.

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, on rappelle qu'un nombre entier est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres l'est. En particulier, remarquons déjà que 2016 est divisible par 9. Rappelons également le résultat suivant : soient n, a, b sont des nombres entiers positifs tels que a divise n. Si b divise n/a, alors ab divise n. Réciproquement, si b ne divise pas n/a, alors ab ne divise pas n.

a) Un petit calcul montre que $2016/9 = 224$. La somme des chiffres de 224 n'est pas divisible par 9. On en déduit que 2016 n'est pas divisible par $9 \times 9 = 81$. De même, on voit que $20162016/9 = 2240224$. Ce nombre n'est pas divisible par 9, donc 20162016 n'est pas divisible par 81.

b) On voit de même, en posant la division, que $N/9$ est égal à $0224 \cdots 0224$ ("0224" étant écrit 2016 fois). [1]

On doit montrer que ce nombre est divisible par 9. Or, la somme des chiffres de ce nombre est

$$(2+2+4) \times 2016 = 8 \times (9 \times 224)$$

qui est divisible par 9, donc $N/9 = 0224 \cdots 0224$ est bien divisible par 9. On en déduit que N est divisible par $9 \cdot 9 = 81$.

1. Enfin, expliquons pourquoi on a bien $N/9 = 0224 \cdots 0224$. On remarque que

$$N = 2016 + 2016 \cdot 10^4 + 2016 \cdot 10^8 + \cdots + 2016 \cdot 10^{4 \cdot 2015}.$$

Comme $2016/9 = 224$, on en déduit que

$$N/9 = 224 + 224 \cdot 10^4 + 224 \cdot 10^8 + \cdots + 224 \cdot 10^{4 \cdot 2015},$$

qui vaut bien $0224 \cdots 0224$ ("0224" étant écrit 2016 fois).

Exercices communs

Exercice 4. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite de nombres telle que $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, et $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pour tout entier $n \geqslant 3$. Par exemple, $a_3 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{2}$.

Déterminer la valeur de a_{2014}.

Solution de l'exercice 4 On a

$$a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}, \quad a_6 = \frac{2}{3}, \quad a_7 = 2 = a_1, \quad a_8 = 3 = a_2, \quad a_9 = \frac{3}{2} = a_3,$$

et ainsi de suite. On voit que les six mêmes termes se répètent. Comme $2014 = 4 + 6 \times 335$, on a $a_{2014} = a_4 = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5. Dans un pays se trouvent 10 villes. Deux villes quelconques sont toujours reliées directement par exactement une route à sens unique. Les routes ne se croisent jamais, certaines passant au besoin au-dessus des autres à l'aide de ponts.

Malheureusement, les responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on quitte une ville quelconque, il est alors impossible d'y revenir, même en passant par plusieurs villes et plusieurs routes.

a) Prouver qu'il existe une ville dont on ne peut pas sortir.

b) Prouver qu'il existe une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres (c'est-à-dire sans passer par les autres villes).

c) Combien, au minimum, faut-il changer d'orientation de routes pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) ?

Solution de l'exercice 5 a) Partons d'une ville V_1 quelconque. On visite successivement des villes V_2, V_3, etc. Comme on ne peut jamais revenir sur une ville déjà visitée, au bout de 10 étapes au maximum on reste forcément coincé en une ville.

b) Partons d'une ville V_1 quelconque. On visite successivement des villes V_2, V_3, etc. mais en remontant uniquement les sens interdits. Il est impossible de revenir sur une ville déjà visitée, sinon en faisant le parcours en sens inverse on pourrait visiter deux fois la même ville en respectant le sens de circulation. Au bout de 10 étapes au maximum, on atteint une ville à partir de laquelle on ne peut remonter aucun sens interdit, donc à partir de laquelle on peut atteindre directement toutes les autres villes.

c) Soit A une ville d'où on ne peut pas repartir, et B une ville à partir de laquelle on peut atteindre toutes les autres directement. On change l'orientation de la route entre B et A.

Soient X et Y deux villes.

Si $X = B$ et $Y \neq A$, il y a une route directe de X à Y.

Si $X = B$ et $Y = A$, on peut aller de X à Y en empruntant un chemin quelconque $X \to Z \to Y$.

Si $X = A$ et $Y = B$, il y a une route directe de X à Y.

Si $X = A$ et $Y \neq B$, alors il y a un chemin $X \to B \to Y$.

Si $X \neq A$, $X \neq B$ et $Y = A$ alors il y a une route directe entre X et Y.

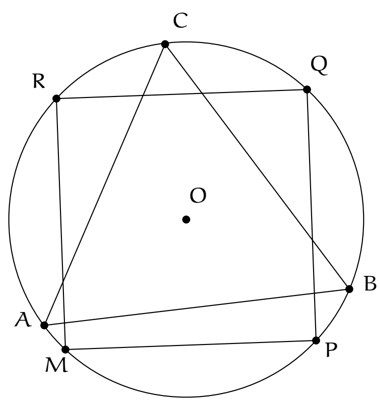
Si $X \neq A$, $X \neq B$ et $Y = B$ alors il y a un chemin $X \to B \to Y$.

Si X et Y sont différents de A et B alors il y a un chemin $X \to A \to B \to Y$.

Exercice 6. Sur un cercle de périmètre p, on marque les trois sommets d'un triangle équilatéral ainsi que les quatre sommets d'un carré. Ces sept points divisent le cercle en 7 arcs.

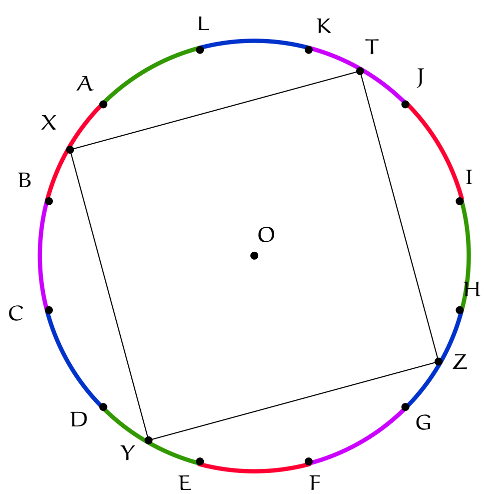
Prouver que l'un de ces arcs est de longueur ne dépassant pas $\frac{p}{24}$.

Solution de l'exercice 6 Si l'un de sommets du triangle est aussi un sommet du carré, la conclusion est immédiate. Sinon, les trois sommets du triangle équilatéral partagent le cercle en trois arcs de périmètre $\frac{p}{3}$ chacun. Les quatre sommets du carré se répartissent donc sur ces trois arcs, et le principe des tiroirs assure alors que deux des sommets consécutifs du carré, disons M et P, appartiennent à un même de ces trois arcs, délimité disons par les sommets A et B du triangle. Sans perte de généralité, on peut supposer que les points sont dans l'ordre A, M, P, B sur l'arc considéré.



Puisque l'arc de cercle reliant M et P est de longueur $\frac{p}{4}$, la somme des arcs qui relient A et M d'une part, P et B d'autre part, vaut $\frac{p}{3} - \frac{p}{4} = \frac{p}{12}$. L'un de ces deux arcs a donc une longueur qui ne dépasse pas $\frac{p}{24}$.

Autre solution.



Notons O le centre du cercle. Soient $A, B, \ldots, L$ douze points du cercle tels que chacun des arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \ldots, \widehat{LA}$ soit de longueur $p/12$, et tels que l'un des sommets du carré soit le milieu de l'arc AB.

Supposons qu'un triangle équilatéral a ses sommets sur le cercle. Comme les rotations de centre O et d'angles 120° et 240° envoient un sommet du triangle sur un autre sommet du triangle, et que ces rotations envoient un arc rouge sur les deux autres arcs rouges, si l'un arcs rouges contient un sommet du triangle alors les deux autres arcs rouges aussi, et donc l'un des sommets du triangle forme un arc de longueur $\leqslant \frac{p}{24}$ avec l'un des sommets du carré.

On raisonne de même dans le cas où l'un des arcs bleus, verts ou violets contiennent un sommet du triangle.

Exercice 7.

Soit a_0 un entier strictement positif. On construit une suite d'entiers $a_1, a_2, \cdots$ selon la procédure suivante :

- si le chiffre des unités de a_i est strictement plus grand que 5, alors $a_{i+1} = 9a_i$.

- si le chiffre des unités de a_i est inférieur ou égal à 5, on efface ce chiffre et le nombre ainsi formé est a_{i+1}.

Evidemment, si on a effacé tous les chiffres de a_i, la procédure s'arrête et il n'y a pas de a_{i+1}.

Peut-on choisir a_0 pour que la suite ainsi construite soit infinie ?

Solution de l'exercice 7 Montrons que la suite s'arrête forcément. Comme la suite est constituée d'entiers strictement positifs, on peut trouver un entier $i \geqslant 0$ tel que le nombre a_i soit le plus petit parmi les nombres $\{a_0, a_1, a_2, \ldots,\}$.

Si $a_i \leqslant 5$, alors la suite s'arrête au cran suivant donc elle est finie.

Si $a_i > 5$ et si le chiffre des unités de a_i est $\leqslant 5$, alors le terme suivant est strictement plus petit que a_i, ce qui est impossible puisque a_i est le terme le plus petit.

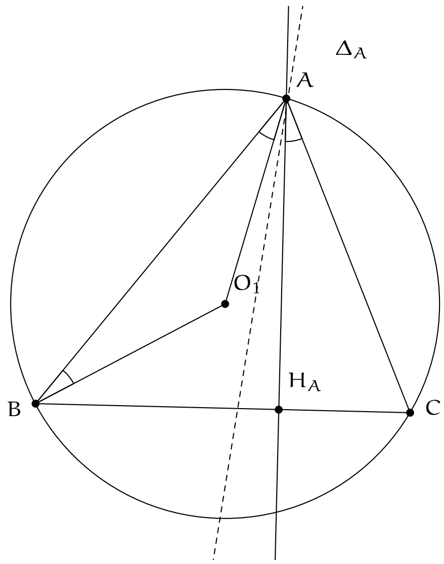
Si le chiffre des unités de a_i est > 5, alors comme $9 \times 6 = 54$, $9 \times 7 = 63$, $9 \times 8 = 72$ et $9 \times 9 = 81$, le chiffre des unités de a_{i+1} est $4, 3, 2$ ou 1, donc $a_{i+2} < \frac{a_{i+1}}{10} = \frac{9a_i}{10} < a_i$, ce qui contredit la minimalité de a_i.

On en conclut que la suite s'arrête toujours (au terme a_i).

Exercices lycéens

Exercice 8. Soit ABC un triangle. Soient M, N deux points sur $[BC]$ tels que les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{NAC}$ soient égaux. Soient O_1 le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle AMN. Montrer que les points O_1, O_2 et A sont alignés.

Solution de l'exercice 8



On a

$$
\begin{aligned}
2\widehat{BAO_1} &= \widehat{BAO_1} + \widehat{O_1BA} \quad \text{car } O_1AB \text{ isocèle} \\
&= 180° - \widehat{AO_1B} \quad \text{(la somme des angles du triangle } O_1AB \text{ vaut } 180°\text{)} \\
&= 180° - 2\widehat{ACB} \quad \text{(théorème de l'angle au centre)}
\end{aligned}
$$

donc $\widehat{BAO_1} = 90° - \widehat{ACB}$.
De même, $\widehat{MAO_2} = 90° - \widehat{ANM}$.
On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\widehat{BAO_2} &= \widehat{BAM} + \widehat{MAO_2} \\
&= \widehat{NAC} + 90° - \widehat{ANM} \\
&= -90° + \widehat{NAC} + 180° - \widehat{ANM} \\
&= -90° + \widehat{NAC} + \widehat{CNA} \\
&= -90° + (180° - \widehat{ACN}) \quad \text{(la somme des angles du triangle } ANC \text{ vaut } 180°\text{)} \\
&= 90° - \widehat{ACN} = \widehat{BAO_1}.
\end{aligned}
$$

On en conclut que les droites (AO_1) et (AO_2) sont confondues.

Autre démonstration (voisine). Soit H_A le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. La première partie de la démonstration ci-dessus montre que les angles $\widehat{BAO_1}$ et $\widehat{H_AAC}$ sont égaux, donc (AO_1) et (AH_A) sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Or, ABC et AMN ont la même hauteur et la même bissectrice issues de A, donc les droites (AO_1) et (AO_2) sont confondues.

Exercice 9. Étant donnés 25 nombres strictement positifs distincts, montrer qu'on peut en choisir deux tels qu'aucun des 23 autres nombres n'est égal à la somme ou à la différence des deux nombres choisis.

Solution de l'exercice 9 Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_{25}$ ces nombres. Supposons par l'absurde que pour tous choix de deux nombres, la somme ou la différence de ces nombres soit égale à l'un des 23 autres nombres.

Pour tout $i < 25$, $a_i + a_{25}$ ne figure pas parmi les autres nombres, donc $a_{25} - a_i$ est l'un des nombres $a_1, \ldots, a_{24}$. Comme $a_{25} - a_1 > \cdots > a_{25} - a_{24}$, on en déduit que $a_{25} - a_i = a_{25-i}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, 24$.

Soit maintenant i tel que $2 \leqslant i \leqslant 23$. On a $a_{24} + a_i > a_{24} + a_1 = a_{25}$, donc $a_{24} - a_i$ doit figurer parmi les nombres $a_1, \ldots, a_{23}$.

D'autre part, $a_{24} - a_i = a_{25} - a_1 - a_i \leqslant a_{25} - a_2 - a_1 = a_{23} - a_1 < a_{23}$, donc $a_{24} - a_i$ est l'un des nombres $a_1, \ldots, a_{22}$. Comme il y a 22 nombres compris entre 2 et 23, on en déduit que $a_{24} - a_i = a_{24-i}$ pour tout $2 \leqslant i \leqslant 23$.

Pour $i = 12$, on obtient que $a_{24} - a_{12} = a_{12}$. D'autre part, $a_{24} + a_{12} > a_{24} + a_1 = a_{25}$ donc la somme et la différence des nombres a_{12} et a_{24} n'est égale à aucun des 23 autres nombres. Ceci est absurde, et conclut la solution.

Exercice 10. 22 cartes portant les numéros $1, 2, \ldots, 22$ sont sur la table. Alcindor et Benoît retirent à tour de rôle une carte de leur choix de la table, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. C'est Alcindor qui commence. Ensuite, chacun calcule le chiffre des unités de la somme de ses cartes. La personne qui gagne est celle qui a le résultat le plus élevé.

L'un des deux joueurs a-t-il un moyen de gagner à coup sûr ? Si oui, déterminer lequel.

Solution de l'exercice 10 Montrons que Alcindor peut gagner à coup sûr.

On remarque d'abord qu'on ne change rien à l'issue du jeu si on remplace les valeurs des cartes par leur chiffre des unités. Toutes les cartes sont alors en double, sauf les cartes 1 et 2 qui sont en triple.

Alcindor choisit la stratégie suivante : il commence par piocher la carte 2. Puis, à chaque fois que Benoît prend une carte, il choisit une carte de même valeur si possible ; s'il n'en reste plus, il choisit une carte quelconque.

La partie se déroule ainsi, à partir du deuxième coup : Benoît et Alcindor prennent à tour de rôle des cartes de même valeur, jusqu'à ce que Benoît pioche le dernier 1. Alors Alcindor pioche une carte de valeur quelconque v. Benoît et Alcindor prennent à tour de rôle des cartes de même valeur, jusqu'à ce que Benoît pioche le dernier v, et ainsi de suite.

A la fin, Alcindor a deux cartes "2" et une carte de chacune des autres valeurs, tandis que Benoît a deux cartes "1" et une carte de chacune des autres valeurs. Ils obtiennent comme résultats respectifs 7 et 6, donc Alcindor gagne.