OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SÉLECTION 2012 – CORRIGÉ

EXERCICES POUR LES ÉLÈVES DE COLLÈGE ET DE SECONDE

Exercice 1. Fred et Sarah sont les aînés d'une même et grande famille. Fred a deux fois moins de frères que de sœurs, tandis que Sarah a autant de sœurs que de frères.

Combien d'enfants y a-t-il dans cette famille ?

Solution de l'exercice 1 Notons f le nombre de filles et g le nombre de garçons de cette famille.

Fred a donc $g-1$ frères et f sœurs, et le texte indique alors que $f = 2(g-1)$. D'autre part, Sarah a elle $f-1$ sœurs et g frères, et l'énoncé nous dit alors que $f-1 = g$.

En remplaçant g par $f-1$ dans la première égalité, on trouve $f = 2 \cdot (f-2)$, ce qui conduit à $f = 4$ puis à $g = f - 1 = 3$, ce qui donne un total de 7 enfants.

Exercice 2. Pour préparer un steak, il faut le cuire une minute sur chaque côté. On ne dispose que d'une seule poêle, dans laquelle on peut mettre deux steaks.

a) Comment préparer quatre steaks en quatre minutes ?

b) Comment préparer cinq steaks en cinq minutes ?

On ne tient évidemment pas compte du temps perdu lors des manipulations.

Solution de l'exercice 2

a) Il est clair que si l'on commence par cuire les steaks A et B ensemble pendant une minute, puis qu'on les retourne et qu'on les fait cuire à nouveau ensemble une minute, ces deux steaks seront alors cuits à souhait pour un temps total de deux minutes.

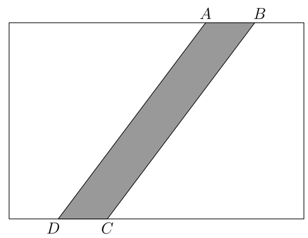
Il suffit alors de faire cuire les steaks C et D de la même façon pour obtenir nos quatre steaks cuits, pour un total de quatre minutes.

b) Il est facile de vérifier que l'on peut adopter la stratégie du a) pour un nombre pair quelconque de steaks. Mais, pour un nombre impair cela ne fonctionne plus.

Notons A, B, C, D, E les cinq steaks. Les faces du steak A sont notées A_1 et A_2, et on adopte des notations similaires pour les autres steaks.

Pour atteindre l'objectif souhaité, on peut alors utiliser la procédure suivante : on fait cuire une minute chacune des paires de faces A_2, B_1, puis B_2, C_1, puis C_2, D_1, puis D_2, E_1, puis E_2, A_1.

Exercice 3. Sur une boîte rectangulaire de dimension 6 cm $\times$ 4 cm, on a placé un ruban en diagonale comme le montre la figure ci-dessous (le ruban est représenté en gris sur la figure).



On a mesuré $AB = 1$ cm et $BC = 5$ cm. Calculer la largeur du ruban.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Pour trouver la largeur du ruban nous allons calculer la surface $\mathcal{A}$ du trapèze ABCD de deux façons différentes. L'aire d'un trapèze vaut base $\times$ hauteur. En prenant la base CD on trouve $\mathcal{A} = 1 \times 4 = 4\,\mathrm{cm}^2$. Si l est la largeur du ruban, en calculant $\mathcal{A}$ avec les base BC, on trouve $\mathcal{A} = 5 \times l$. On en déduit que $l = \frac{4}{5}$.

Exercice 4. Autour d'une même table sont assises 2013 personnes qui ont toutes des tailles différentes. On dit qu'une personne est *grande* si elle est plus grande que ses deux voisins, et qu'elle est *petite* si elle est plus petite que ses deux voisins.

Prouver que, quelle que soit la répartition choisie autour de la table, il y a autant de personnes grandes que de petites.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, entre deux personnes consécutives quelconques, on inscrit un $+$ si la deuxième personne est plus grande que la première, et un $-$ sinon.

On obtient ainsi une suite de 2013 symbôles $+$ et $-$. Une grande personne correspond alors à la succession $+-$, tandis qu'une petite correspond à la succession $-+$. Il s'agit donc de prouver qu'il y a autant d'alternances $+-$ que d'alternances $-+$.

Or, dans cette suite de 2013 symbôles, si l'on part d'un symbôle $+$ (par exemple celui écrit à la droite de la personne qui a la plus haute taille de toutes), et que l'on considère les groupes de symbôles identiques et consécutifs comme un seul et même symbôle, cela ne change pas les alternances $+-$ ou les alternances $-+$. Par contre, dans ces conditions, la nouvelle suite obtenue n'est qu'une succession d'alternances $+-+-+\cdots$. Et, puisque l'on doit revenir au point de départ, il y a donc autant d'alternances $+-$ que de $-+$, ce qui est bien la conclusion demandée.

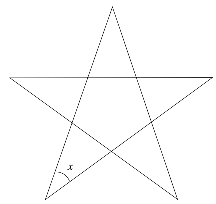
Exercice 5. Prouver que le nombre $10^{2011} + 10^{2012} + 10^{2013}$ est divisible par 37.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On a

$$10^{2011} + 10^{2012} + 10^{2013} = 10^{2011}(1 + 10 + 100) = 10^{2011} \times 111 = 10^{2011} \times 3 \times 37,$$

d'où le résultat.

Exercice 6. On considère une étoile régulière à cinq branches (cf.figure).



Déterminer l'angle x indiqué sur la figure.

Solution de l'exercice 6

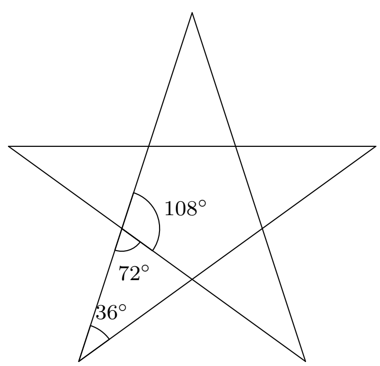
Première solution. Une fourmi qui parcourt l'étoile en commençant par le milieu d'une arête fera deux tours complets en tournant 5 fois d'angle $180° - x$. On trouve donc

$$5(180° - x) = 2 * 360°.$$

On en tire que $x = 36°$.

Deuxième solution. Inscrivons l'étoile dans un cercle. L'angle au centre qui correspond à x vaut un cinquième du circle, soit $360/5 = 72$. Par conséquent $x = 72/2 = 36°$.

Troisième solution. Commençons par calculer les angles du pentagone intérieur. La somme des angles dans un pentagone fait $540°$ (pour le voir, tracez deux diagonales pour découper le pentagone en 3 triangles, et $3 \times 180 = 540$), donc chaque angle mesure $\frac{540}{5} = 108°$. Regardons maintenant un des triangles qui forment les pointes. Les angles à la base mesurent $180 - 108 = 72°$, donc $x = 180 - 2 \times 72 = 36°$.



EXERCICES POUR LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE ET TERMINALE

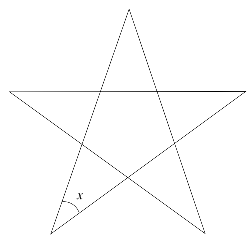
Exercice 7. Prouver que le nombre $10^{2011} + 10^{2012} + 10^{2013}$ est divisible par 37.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On a

$$10^{2011} + 10^{2012} + 10^{2013} = 10^{2011}(1 + 10 + 100) = 10^{2011} \times 111 = 10^{2011} \times 3 \times 37,$$

d'où le résultat.

Exercice 8. On considère une étoile régulière à cinq branches (cf.figure).



Déterminer l'angle x indiqué sur la figure.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

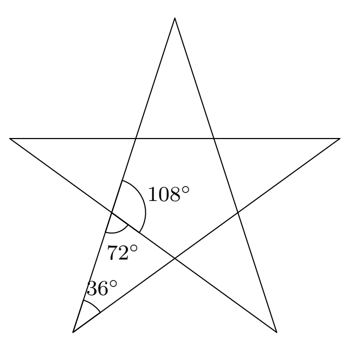
<u>Première solution.</u> Une fourmi parcourt l'étoile en commençant par le milieu d'une arête fera deux tours complets en tournant 5 fois d'angle $180° - x$. On trouve donc

$$5(180° - x) = 2 * 360°.$$

On en tire que $x = 36°$.

<u>Deuxième solution.</u> Inscrivons l'étoile dans un cercle. L'angle au centre qui correspond à x vaut un cinquième du circle, soit $360/5 = 72$. Par conséquent $x = 72/2 = 36°$.

<u>Troisième solution.</u> Commençons par calculer les angles du pentagone intérieur. La somme des angles dans un pentagone fait $540°$ (pour le voir, tracez deux diagonales pour découper le pentagone en 3 triangles, et $3 \times 180 = 540$), donc chaque angle mesure $\frac{540}{5} = 108°$. Regardons maintenant un des triangles qui forment les pointes. Les angles à la base mesurent $180 - 108 = 72°$, donc $x = 180 - 2 \times 72 = 36°$.



Exercice 9. Trouver tous les couples (p, q) de nombres premiers pour lesquels les nombres $2p + q$, $p + 2q$ et $p + q - 18$ sont tous les trois des nombres premiers.

On rappelle qu'un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Soit p et q deux nombres premiers, s'il en existe, qui vérifient les conditions demandées.

Puisque $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, on a $2p+q \geqslant 6$ et $p+2q \geqslant 6$. S'agissant de nombres premiers, c'est donc que $2p + q$ et $p + 2q$ sont impairs, et ainsi que p et q sont impairs. Mais alors le nombre $p + q - 18$ est un nombre pair et premier, d'où $p + q - 18 = 2$.

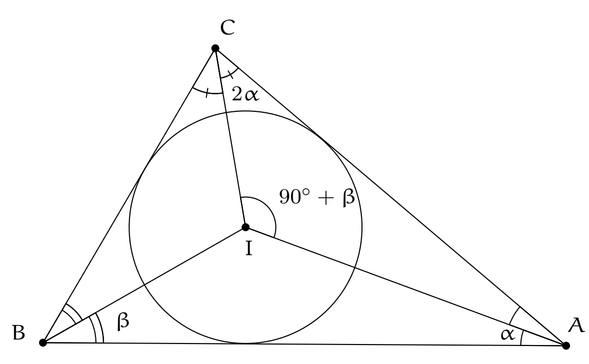
Nous sommes donc amenés à chercher les nombres premiers p et q tels que $p+q = 20$. Une exploration directe et "à la main" montre alors que le couple (p, q) est l'un des couples $(3, 17), (7, 13), (13, 7), (17, 3)$.

Si l'on revient maintenant à la condition que $2p+q$ et $p+2q$ sont premiers, on constate alors que seuls les cas $p = 3, q = 17$ et $p = 17, q = 3$ correspondent effectivement à des solutions du problème posé.

Exercice 10. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On suppose que $AI = BC$ et que $\widehat{ICA} = 2\widehat{IAC}$.

Quelle est la valeur de $\widehat{ABC}$?

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Notons α l'angle $\widehat{IAB}$ et β l'angle $\widehat{IBA}$. Par hypothêse, $\widehat{ICA} = 2\alpha$.



Il est facile de vérifier que $\beta = 90° - 3\alpha$ et $\widehat{IAC} = 90° + \beta$. Nous allons utiliser la loi des sinus dans les triangles AIC et ABC ce qui donne respectivement

$$\frac{AI}{\sin(2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(90° - \beta)} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{\sin(2\beta)} = \frac{BC}{\sin(2\alpha)}.$$

Par hypothèse $AI = BC$. On a donc,

$$\frac{AI}{AC} \cdot \sin(2\alpha) = \sin(90° - \beta) = \sin(2\beta).$$

D'après les propriétés de la fonction sinus, si deux angles x et y de moins de $180°$ vérifient $\sin(x) = \sin(y)$, alors $x = y$ ou $x = 180° - y$. Regardons les deux cas :

- si $90° - \beta = 2\beta$, on a alors $\beta = 90°$ et $\widehat{ABC} = 180°$ et le triangle est plat, ce qui n'est pas une bonne solution
- $90° - \beta = 180° - 2\beta$, on a alors $\beta = 30°$ et $\widehat{ABC} = 60°$, ce qui donne la figure présentée ci dessus.

La solution est $\widehat{ABC} = 60°$.

Exercice 11. Autour d'une même table sont assises 2013 personnes qui ont toutes des tailles différentes. On dit qu'une personne est *grande* si elle est plus grande que ses deux voisins, et qu'elle est *petite* si elle est plus petite que ses deux voisins.

a) Prouver que, quelle que soit la répartition choisie autour de la table, il y a autant de personnes grandes que de petites.

b) Quelles sont les entiers n pour lesquels on peut trouver une répartition des personnes contenant exactement n personnes grandes ?

Solution de l'exercice 11

a) En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, entre deux personnes consécutives quelconques, on inscrit un $+$ si la personne de gauche est plus grande que celle de droite (en regardant toujours vers le centre de la table...), et un $-$ sinon.

On obtient ainsi une suite de 2013 symbôles $+$ et $-$. Une grande personne correspond alors à la succession $+-$, tandis qu'une petite correspond à la succession $-+$. Il s'agit donc de prouver qu'il y a autant d'alternances $+-$ que d'alternances $-+$.

Or, dans cette suite de 2013 symbôles, si l'on part d'un symbôle $+$ (par exemple celui écrit à la droite de la personne qui a la plus haute taille de toutes), et que l'on considère les groupes de symbôles identiques et consécutifs comme un seul et même symbôle, cela ne change pas les alternances $+-$ ou les alternances $-+$. Par contre, dans ces conditions, la nouvelle suite obtenue n'est qu'une succession d'alternances $+-+-+\cdots$. Et, puisque l'on doit revenir au point de départ, il y a donc autant d'alternances $+-$ que de $-+$, ce qui est bien la conclusion demandée.

b) Prouvons que les entiers n pour lesquels on peut trouver une répartition des personnes contenant exactement n personnes grandes sont ceux qui vérifient $1 \leqslant n \leqslant 1006$.

Pour une répartition donnée, on note g le nombre de personnes grandes, p le nombre de personnes petites et m le nombre de personnes qui ne sont ni grandes ni petites. On a donc $g + p + m = 2013$. De plus, d'après a), on a $g = p$ donc $2g + m = 2013$. En particulier, on a $2g \leqslant 2013$ et donc $g \leqslant 1006$. D'autre part, si l'on considère la personne de plus haute taille, il est clair que c'est aussi une personne grande, donc on a $g \geqslant 1$.

Ainsi, pour toute répartition des personnes, le nombre n de personnes grandes vérifie $1 \leqslant n \leqslant 1006$.

Pour conclure, il reste à prouver qu'il existe une répartition adéquate pour chacun de ces entiers. Soit donc $g \in \{1, \ldots, 1006\}$. On note $P_1, \ldots, P_g$ les g personnes de plus hautes tailles, $p_1, \ldots, p_g$ les g personnes de plus petites tailles, et $A_1, \ldots, A_m$ les autres personnes, où dans chacun des trois groupes la numérotation se fait par taille croissante. Notons qu'alors chaque P_i est plus grande que chaque A_j qui est elle-même plus grande que chaque p_k.

La répartition $P_1, p_1, P_2, p_2, P_3, \ldots, P_g, p_g, A_1, A_2, \ldots, A_m$ contient alors exactement g personnes grandes, à savoir les P_i.

Exercice 12. Prouver que, pour tous réels x et y, on a

$$5x^2 + y^2 + 4 \geqslant 4x + 4xy.$$

Pour quelles valeurs de x et y l'égalité a-t-elle lieu ?

Solution de l'exercice 12 Pour tous réels x et y, on a

$$5x^2 + y^2 + 4 - 4x - 4xy = 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 = (2x - y)^2 + (x - 2)^2 \geqslant 0.$$

Par suite, on a $5x^2 + y^2 + 4 \geqslant 4x + 4xy$.

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $2x - y = 0$ et $x - 2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 2$ et $y = 4$.

Fin