OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SÉLECTION

Mercredi 5 octobre 2011

Durée : 4 heures (14h-18h)

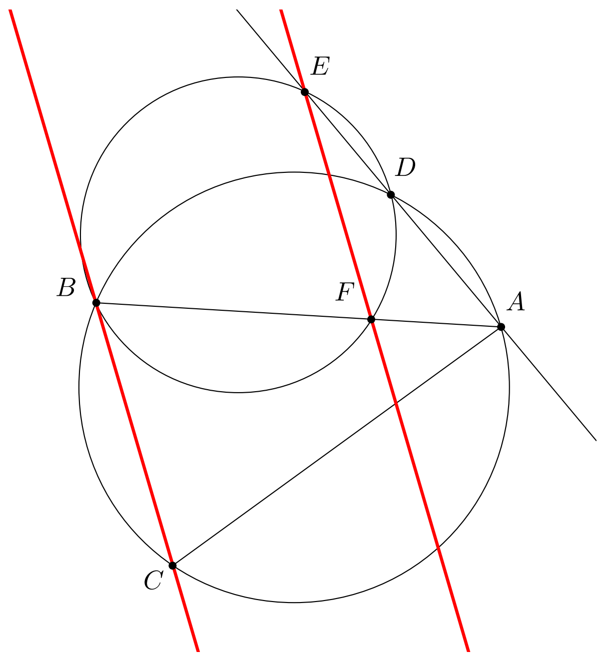
Éléments de correction

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle dans lequel $AB = AC$. Sur le cercle circonscrit à ce triangle on prend un point D appartenant au plus petit arc joignant A à B ; enfin on prend un point E appartenant à la droite (AD), extérieur au segment $[AD]$ et tel que les points A et E soient dans le même demi plan limité par la droite (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) en F ; montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Corrigé

Commençons par faire une figure.



$$\begin{array}{rcll}
\angle EFB & = & \angle EDB & \text{car } F,\ D \text{ appartiennent à l'arc } \widehat{EB} \\
 & = & 180^\circ - \angle ADB & \text{car } A,\ D,\ E \text{ sont alignés dans cet ordre} \\
 & = & \angle ACB & \text{car } C,\ D \text{ n'appartiennent pas au même arc } \widehat{AB} \\
 & = & \angle CBA & \text{car } ABC \text{ est isocèle en } A \\
 & = & \angle CBF & \text{car } A,\ F,\ B \text{ sont alignés dans cet ordre}
\end{array}$$

Les deux angles alternes-internes des droites (EF) et (BC) avec la droite sécante (BF) sont égaux dont les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2

Soit a, b deux nombres réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + ax + b$. On suppose qu'il existe un réel t tel que $f(t) = f(f(f(t))) = 0$.
Montrer que $f(0) \times f(1) = 0$.

Corrigé

Avec les notations de l'énoncé, on a immédiatement

$$0 = f(f(f(t))) = f(f(0)) = f(b) = b^2 + ab + b = b(1 + a + b) = f(0)f(1).$$

Exercice 3

Douze candidats au poste de maire participent à un débat télévisé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare « jusque là, on a menti une seule fois ». Un deuxième dit alors « Maintenant, cela fait deux fois ». Un troisième s'exclame alors « Trois fois, maintenant » et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion.
Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Corrigé

On va montrer que le premier candidat a dit la vérité et que les autres ont menti.
Notons $C_1, \ldots, C_{12}$ les candidats dans l'ordre de leur prise de parole. Par l'absurde, supposons que $k \geq 2$ et que C_k ait dit la vérité. On a donc menti exactement k fois avant que C_k ne parle. Mais alors :

- ▷ Soit C_{k-1} a dit la vérité et on a menti exactement $k-1$ fois avant que C_{k-1} ne parle, et donc après aussi. D'où C_k a menti.
- ▷ Soit C_{k-1} a menti et on a menti exactement p fois avant que C_{k-1} ne parle, avec $p \neq k-1$. Dans ce cas, on a menti exactement $p+1$ fois avant que C_k ne parle, avec $p+1 \neq k$. D'où C_k a menti.

Finalement, dans tous les cas, on trouve que, pour $k \geq 2$, si C_k a dit la vérité alors C_k a menti, ce qui est absurde. Donc, C_k a menti pour tout $k \geq 2$. Comme on sait qu'au moins un des candidats n'a pas menti, cela ne peut être que C_1.
Réciproquement, il est facile de vérifier que si l'on a menti exactement une fois avant que C_1 ne parle, alors C_1 dit effectivement la vérité et tous les autres mentent. Cela assure que la situation voulue est effectivement réalisable. Finalement, onze candidats ont menti et seul le premier à avoir parlé a dit la vérité.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui vérifient $xf(\frac{x}{2}) - f(\frac{2}{x}) = 1$ pour tout nombre réel non nul x.

Corrigé

Soit $x > 0$. Appliquons la relation de l'énoncé en x et $\frac{4}{x}$ pour obtenir le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xf(\frac{x}{2}) - f(\frac{2}{x}) & = & 1 \\ -f(\frac{x}{2}) + \frac{4}{x}f(\frac{2}{x}) & = & 1 \end{array} \right.$$

En additionnant la première ligne à x fois la deuxième, on obtient la condition $3f(\frac{2}{x}) = 1 + x$. En appliquant cette relation en $\frac{2}{x}$, on en déduit

$$f(x) = \frac{2+x}{3x}.$$

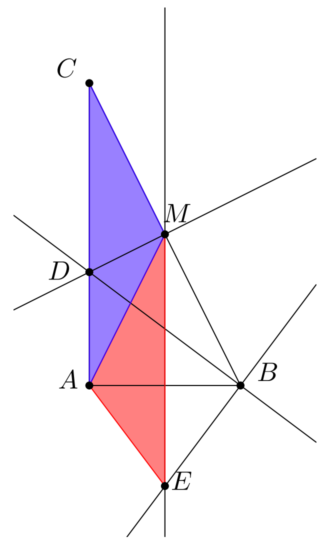
Or $f(-2) = 0$. Comme f doit être à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'il n'y a pas de fonctions vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB < AC$, M le milieu de $[BC]$, D l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par M et E le point d'intersection de la droite parallèle à (AC) passant par M avec la droite perpendiculaire à (BD) passant par B.
Montrer que les triangles AEM et MCA sont semblables si, et seulement si, $\angle ABC = 60°$.

Corrigé

Commençons par faire une figure.



Tout d'abord, comme $AB < AC$, D appartient au segment $[AC]$ et l'angle $\angle MAE$ est obtus. Comme $MC = MA$, cela implique que CAM et AME sont semblables si, et seulement si, AME est isocèle en A.

Supposons que les triangles AEM et MCA soient semblables. D'après le premier paragraphe, ceci implique $AM = AE$. Les droites (EM) et (AC) sont parallèles, donc les droites (AB) et (ME) sont perpendiculaires. Combiné avec le fait que $AM = AE$, ceci montre que AMB et ABE sont symétriques par rapport à (AB). Notons $\alpha = \angle MAB$. M étant le milieu de $[BC]$, on a $AM = MB$, ce qui donne $\alpha = \angle ABC$. D'autre part, $\alpha = \angle BAE = \angle ABE = 90° - \angle DBA = \angle ADB$.
Comme $\angle DAB = \angle DMB = 90°$, les points A, D, M, B sont cocycliques. On en déduit que $\angle AMB = \angle ADB = \alpha$. Le triangle AMB a ses trois angles égaux à α. Il est donc équilatéral et $\alpha = 60°$. On a donc bien $\angle ABC = 60°$.

Réciproquement, si $\angle ABC = 60°$, le même raisonnement montre que AMB et ABE sont symétriques par rapport à (AB), ce qui implique que AME est isocèle en A. Comme $\angle CAM = \angle AME$, AEM et MCA sont semblables.

Exercice 6

Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Prouver que l'on peut trouver des garçons g et g', et des filles f et f', tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et que g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Corrigé

Soit f une fille avec le nombre minimal de cavaliers et g l'un de ses cavaliers. Comme g n'a pas dansé avec toutes les filles, il existe une fille f' qui n'a pas dansé avec g. Supposons que tous les cavaliers de f' soient aussi des cavaliers de f, alors f admet strictement plus de cavaliers que f' (car il y a au moins g en plus des cavaliers de f') ce qui contredit la minimalité du choix initial de f. Par conséquent, il existe un garçon g' cavalier de f' mais pas de f. Ces choix pour f, f', g et g' conviennent.

Exercice 7

Trouver tous les triplets d'entiers positifs (p, n, m) tels que p soit premier et $p^n + 144 = m^2$.

Corrigé

La relation se réécrit $p^n = m^2 - 144 = (m-12)(m+12)$. Comme p est premier, il existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $m - 12 = p^k$ et donc $m + 12 = p^{n-k}$ (par conséquent $n - k > k$ soit $2k < n$). Discutons selon la valeur de k.

▷ Si $k = 0$, alors $m = 13$ et donc $p^n = 13^2 - 12^2 = 25$ ce qui entraîne $p = 5$ et $n = 2$. La seule solution correspondant à ce cas est
$$(p, n, m) = (5, 2, 13).$$

▷ Sinon, $24 = p^k - p^{n-k}$ est divisible par p^k donc $p \in \{2, 3\}$.
- Si $p = 2$, $k \in \{1, 2, 3\}$ (car 2^k divise 24) et les valeurs de m correspondantes sont $m = \{14, 16, 20\}$. Seule la valeur $m = 20$ entraîne que $m^2 - 144$ est une puissance de 2 (et c'est 2^8). La seule solution correspondant à ce cas est
$$(p, n, m) = (2, 8, 20).$$
- Si $p = 3$, $k = 1$ (car 3^k divise 24) et donc $m = 15$ et $n = 4$ (car $15^2 - 144 = 81 = 3^4$). La seule solution correspondant à ce cas est
$$(p, n, m) = (3, 4, 15).$$

En conclusion, les solutions sont $(5, 2, 13)$, $(2, 8, 20)$ et $(3, 4, 15)$

Exercice 8

Soit x, y, z trois réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ vérifiant
$$(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$$

1. Montrer que, au moins, l'un des trois réels $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que, au moins, l'un des trois réels $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Il y a deux corrigés distincts de cet exercice.

Corrigé

Soit x, y, z trois réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ vérifiant
$$(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$$

1. Notons $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ et $\sigma_3 = xyz$. La condition de l'énoncé se réécrit
$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\sigma_3 - 1.$$
Les réels $X = (1-x)y$, $Y = (1-y)z$, $Z = (1-z)x$ vérifient
$$\begin{aligned} X + Y + Z &= \sigma_1 - \sigma_2 = 1 - 2\sigma_3, \\ XYZ &= \sigma_3^2. \end{aligned}$$
Si $\sigma_3^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^3$, alors l'un au moins des réels X, Y ou Z est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$. Sinon, $\sigma_3 < \frac{1}{8}$ et donc $X + Y + Z \geq \frac{3}{4}$: alors l'un au moins des réels X, Y ou Z est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. On procède de même en distinguant les cas $\sigma_3 < \frac{1}{8}$ et $\sigma_3 \geq \frac{1}{8}$.

Corrigé

1. On va distinguer plusieurs cas, selon la position de x, y, z par rapport à $\frac{1}{2}$: Clairement, si $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$, on a $(1-x)y \geq \frac{1}{4}$. De même, si $y \leq \frac{1}{2}$ et $z \geq \frac{1}{2}$, on a $(1-y)z \geq \frac{1}{4}$, et si $z \leq \frac{1}{2}$ et $x \geq \frac{1}{2}$, on a $(1-z)x \geq \frac{1}{4}$. Donc, il ne reste qu'à étudier le problème lorsque

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} & \text{ou} \quad y < \frac{1}{2} \\ y > \frac{1}{2} & \text{ou} \quad z < \frac{1}{2} \\ z > \frac{1}{2} & \text{ou} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   - ▷ Si $x > \frac{1}{2}$, le système conduit alors à $z > \frac{1}{2}$, puis à $y > \frac{1}{2}$. Mais alors d'une part $xyz > \frac{1}{8}$ et d'autre part $(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}$, ce qui contredit que $(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$.
   - ▷ Si $x < \frac{1}{2}$, le système conduit alors à $y < \frac{1}{2}$, puis à $z < \frac{1}{2}$. Mais alors d'une part $xyz < \frac{1}{8}$ et d'autre part $(1-x)(1-y)(1-z) > \frac{1}{8}$, ce qui contredit à nouveau que $(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$.

2. La démarche ci-dessus s'adapte pour cette question. Mais, ici, on peut aussi raisonner de la façon suivante. Par l'absurde, supposons que $(1-x)y > \frac{1}{4}$ et $(1-y)z > \frac{1}{4}$ et $(1-z)x > \frac{1}{4}$. Alors

$$x(1-x)y(1-y)z(1-z) > \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

   Mais

$$x(1-x)y(1-y)z(1-z) = \left[\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2\right] \left[\frac{1}{4} - (y - \frac{1}{2})^2\right] \left[\frac{1}{4} - (z - \frac{1}{2})^2\right] < \left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

   en contradiction avec l'inégalité précédente.
   Donc $(1-x)y \leq \frac{1}{4}$ ou $(1-y)z \leq \frac{1}{4}$ ou $(1-z)x \leq \frac{1}{4}$.