OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SÉLECTION

Mercredi 5 octobre 2011

Durée : 4 heures (14h-18h)

Instructions

- ▷ On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Chacun des huit problèmes est noté sur 10. Il est possible de les traiter dans n'importe quel ordre mais ils sont essentiellement présentés dans l'ordre de difficulté croissante.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Énoncés

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle dans lequel $AB = AC$. Sur le cercle circonscrit à ce triangle on prend un point D appartenant au plus petit arc joignant A à B ; enfin on prend un point E appartenant à la droite (AD), extérieur au segment $[AD]$ et tel que les points A et E soient dans le même demi plan limité par la droite (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) en F ; montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2

Soit a, b deux nombres réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + ax + b$. On suppose qu'il existe un réel t tel que $f(t) = f(f(f(t)) = 0$.
Montrer que $f(0) \times f(1) = 0$.

Exercice 3

Douze candidats au poste de maire participent à un débat télévisé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare ≪ jusque là, on a menti une seule fois ≫. Un deuxième dit alors ≪ Maintenant, cela fait deux fois ≫. Un troisième s'exclame alors ≪ Trois fois, maintenant ≫ et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion.
Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui vérifient $xf(\frac{x}{2}) - f(\frac{2}{x}) = 1$ pour tout nombre réel non nul x.

Exercice 5

Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB < AC$, M le milieu de $[BC]$, D l'intersection de (AC) avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par M et E le point d'intersection de la droite parallèle à (AC) passant par M avec la droite perpendiculaire à (BD) passant par B.
Montrer que les triangles AEM et MCA sont semblables si, et seulement si, $\angle ABC = 60°$.

Exercice 6

Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Prouver que l'on peut trouver des garçons g et g', et des filles f et f', tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et que g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 7

Trouver tous les triplets d'entiers positifs (p, n, m) tels que p soit premier et $p^n + 144 = m^2$.

Exercice 8

Soit x, y, z trois réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ vérifiant

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = xyz$$

1. Montrer que, au moins, l'un des trois réels $(1 - x)y$, $(1 - y)z$, $(1 - z)x$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que, au moins, l'un des trois réels $(1 - x)y$, $(1 - y)z$, $(1 - z)x$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.