Combinatoire énumérative

Igor Kortchemski

- Introduction -

La Combinatoire est un sous-art des mathématiques qui consiste à compter et à étudier des structures finies. De nombreux problèmes difficiles sont formulés de manière très simple (mais la résolution nécessite des outils avancés). Le but de ce cours est de présenter quelques réflexes et idées de bases pouvant être utiles dans la résolution d'exercices de combinatoire de type olympiades.

On parlera de coefficients binomiaux, double-comptage, injections, surjections, bijections.

1 Coefficients binomiaux

1.1 Définitions

On rappelle qu'un ensemble E est une collection d'éléments dont l'ordre n'a pas d'importance (ainsi, les ensembles $\{2,3\}$ et $\{3,2\}$ sont les mêmes ensembles) et comptés sans multiplicité (par exemple, 2,2=2). On note $x \in A$ si x appartient à l'ensemble A. Si A et B sont deux ensemble, on écrit $A \subset B$ et on dit que A est inclus dans B si chaque élément de A appartient à B. L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$. On note $\mathrm{Card}(A)$ (on prononce « cardinal de A ») le nombre d'éléments de A. On dit que A est infini si $\mathrm{Card}(A) = \infty$, fini sinon.

Définition 1. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ (et on prononce « k parmi n ») le nombre de manières de choisir un sous-ensemble à k éléments d'un ensemble à n éléments différents. Pour $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Il est clair que dans la définition précédente, $\binom{n}{k}$ ne dépend pas de l'ensemble à n éléments différents considéré.

Exemple 2. On a $\binom{4}{2} = 6$, car les sous-ensembles à 2 éléments de $\{1,2,3,4\}$ sont $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ et il y en a 6

Pour un entier $n \geqslant 1$, rappelons la notation $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. On lit "$n$ factorielle".

Proposition 3. Le nombre de manières d'ordonner n éléments est $n!$.

Démonstration. Nous avons n possibilités pour choisir le premier élément, $n-1$ possibilités pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier élément pour lequel nous avons une seule possibilité. Le résultat en découle. □

Proposition 4. Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Démonstration. Utilisons le principe de *double-comptage*, très important en combinatoire. Il consiste à établir une égalité en comptant de deux manières différentes une certaines quantité. Ici, comptons le nombre de suites à k éléments qu'on peut créer en utilisant les n éléments d'un ensemble à n éléments différents.

D'une part, comme pour la proposition précédente, nous avons n choix pour le premier terme de la suite ; $n-1$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au k-ième élément pour lequel nous avons $n-k+1$ choix. Finalement, il y a en tout $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ suites à k éléments.

D'autre part, pour créer une suite à k éléments, on peut commencer par choisir les k éléments qui vont constituer la suite ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis les ordonner ($k!$ manières possibles de les ordonner). Il y a donc en tout $k! \cdot \binom{n}{k}$ suites à k éléments. □

1.2 Propriétés combinatoires

Exercice 1 Pour des entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Solution de l'exercice 1 *Première méthode :* On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et le résultat en découle immédiatement.

Deuxième méthode : On remarque que choisir k éléments parmi n revient à sélectionner les $n-k$ éléments qu'on ne choisira pas.

L'exercice précédent, bien que facile, est assez représentatif des exercices ayant pour but de prouver des relations d'égalité entre coefficients binomiaux. Très souvent, il y a toujours (au moins) deux approches possibles : remplacer les coefficients binomiaux par leur formule et ramener le problème à un exercice de manipulation de relations algébriques, ou bien interpréter de manière combinatoire les deux termes de part et d'autre de l'égalité et prouver qu'ils sont égaux. La deuxième approche est bien sûr bien plus élégante et fournit très souvent des preuves courtes, mais requiert davantage d'ingéniosité.

Proposition 5. (formule de Pascal) Soient n et $0 \leqslant k \leqslant n$ des entiers (avec $(k, n) \neq (0, 0)$). Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration. Première méthode : On utilise la formule :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{n}{k(n-k)}\right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire. Considérons l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ et dénombrons ses sous-ensembles à k éléments. On distingue les ensembles qui contiennent l'élément n et les ensembles qui ne le contiennent pas. Il y a $\binom{n-1}{k}$ ensembles qui ne contiennent pas n (on choisit k éléments dans $\{1,2,\ldots,n\}$ et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ qui contiennent n. Au total on a donc $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ manières de choisir nos k éléments parmi nos n entiers, d'où le résultat. □

La formule de Pascal nous permet ensuite de construire le triangle de Pascal, que vous connaissez peut-être déjà. La case située dans la k-ième colonne de la n-ième ligne contient le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. D'après la formule de Pascal, on obtient donc chaque case comme la somme des deux cases qui sont au-dessus.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

On constate qu'il y a un lien entre la n-ième ligne du triangle de Pascal et le développement de $(x+y)^n$:

Proposition 6 (Formule du binôme de Newton)**.** Soient x, y des nombres réels et $n \geqslant 1$ un entier. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=(x+y)^n.$$

Notation. Avant de démontrer cette formule, un petit rappel de notation :

Lorsqu'on veut faire une grosse somme de termes qui peuvent s'exprimer selon un entier, souvent noté k (ou i mais cela n'a pas d'importance), qui varie entre deux valeurs, on utilise le symbole $\sum$. Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = 1 + 1 + ... + 1 = n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Pour un produit on utilise de la même manière le symbole $\prod$. Par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Démonstration. Première méthode : par récurrence sur n (s'entraîner à le faire).

Seconde méthode : lorsqu'on développe $(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)$, pour trouver le coefficient devant $x^k y^{n-k}$, parmi les n termes $(x+y)$, il faut en choisir k pour lesquels on garde le x et qui vont donner un terme x^k, et les $n-k$ autres termes pour lesquels on sélectionne y (et qui sont fixés par le choix des k premiers) vont donner le terme y^{n-k}. Le résultat s'ensuit. □

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Exercice 3 Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 4 Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Exercice 5 Prouver que pour $0 \leqslant m \leqslant n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Exercice 6 Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0,0)$, faisant des pas $+(1,0)$ ou $+(0,1)$, et finissant en (m,n), où $m, n \geqslant 0$?

Exercice 7 De combien de manières peut-on placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes ?

Solution de l'exercice 2 *Première méthode :* Si on n'a pas d'idée comment commencer de manière astucieuse, on peut essayer de procéder par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons le résultat acquis au rang n et montrons-le au rang $n+1$ en écrivant, avec la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} &= 1+\sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\ &= 2^n+2^n \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= 2^{n+1},\end{aligned}$$

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant le nombre N de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$. D'une part, pour un entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant le tout, on voit que $N = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Mais, pour construire un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a le choix de choisir 1 ou non, 2 ou non, et ainsi de suite jusqu'à n. On a donc n choix à faire entre deux possibilités et ces choix sont indépendants (le choix de prendre k ou non n'influence pas le choix de prendre k' ou non si $k \neq k'$), d'où $N = 2^n$, ce qui permet de conclure.

En particulier, la solution précédente montre qu'il existe 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Troisième méthode : On utilise la formule du binôme de Newton avec $x = y = 1$.

Solution de l'exercice 3 *Première méthode :* On utilise la formule exprimant $\binom{n}{k}$ (on vous laisse le faire).

Seconde méthode : Démontrons ce résultat de manière combinatoire en comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k ayant un élément distingué (qu'on appellera chef).

D'une part, il suffit de choisir un sous-ensemble de cardinal k ($\binom{n}{k}$ choix), puis de choisir un chef (k choix indépendants). On obtient donc en tout $k\binom{n}{k}$ possibilités.

D'autre part, on peut d'abord choisir un chef (n choix) puis compléter les $k-1$ éléments à choisir dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ privé du chef (donc un ensemble à $n-1$ éléments). Il y a alors $n\binom{n-1}{k-1}$ éléments.

Solution de l'exercice 4

Première méthode (d'après une idée d'élèves) : On regroupe un ensemble avec son complémentaire. Si $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A^c l'ensemble des entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui ne sont pas dans A. Notons N ce cardinal moyen. Alors :

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}\mathrm{Card}(A) = \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}\frac{\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}(A^c)}{2}\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}\frac{n}{2} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n}{2}2^n = \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Autre méthodes : Il faut évaluer la somme

$$S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Si on ne sait pas commencer, il faut étudier les premiers cas : $n = 1, 2, \ldots$. On trouve toujours $S_n = n/2$. Essayer donc de démontrer cela.

Seconde méthode : Si on n'a pas d'idée, on peut procéder par récurrence sur n.

Troisième méthode, plus avancée. On utilise le résultat de la proposition 6. Considérons le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. D'après la formule du binôme de Newton, $P_n(x) = (1+x)^n$. Dérivons cette égalité par rapport à x :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Évaluons alors cette quantité en $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Le résultat en découle.

Solution de l'exercice 5 On remarque d'abord que seuls les k tels que $k \geqslant m$ contribuent de manière non nulle. On va procéder à un double comptage en comptant le nombre N de sous-ensembles A, B de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $A \subset B$ et $\mathrm{Card}(A) = m$. En effet, d'une part, pour construire A, B on peut d'abord choisir A de cardinal m ($\binom{n}{m}$ choix), puis rajouter un sous-ensemble quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ privé des éléments de A, qui a $n - m$ éléments (et donc 2^{n-m} choix indépendants). En ainsi, $N = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

D'autre part, pour construire A, B on peut d'abord choisir B de cardinal quelconque entre m et n (si B est de cardinal k, $\binom{n}{k}$ choix), puis choisir A de cardinal m comme sous-ensemble de B ($\binom{k}{m}$ choix si B est de cardinal k). Ainsi, $N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Solution de l'exercice 6 Un tel chemin doit faire $m+n$ pas, dont m fois $+(1, 0)$ et n fois $+(0, 1)$. Il suffit donc de choisir parmi les $m + n$ pas possibles la position des m qui font $+(1, 0)$. Le nombre total vaut donc $\binom{m+n}{m}$.

Solution de l'exercice 7 Considérons la figure suivante (avec deux barres) :

Remplaçons chaque rond soit par une pièce, soit par une barre de sorte qu'il y ait en tout 2 barres et 5 pièces. Les pièces entre les deux premières barres seront contenues dans la première poche, les pièces entre la deuxième barre et la troisième barre seront contenues dans la seconde poche, et finalement les pièces entre la troisième barre et la quatrième barre seront contenues dans la troisième poche.

Ainsi, placer 5 pièces identiques dans 3 poches différentes, revient à choisir la position des 2 barres parmi 7 positions possibles. La réponse est donc $\binom{7}{2} = 21$.

Plus généralement, en procédant de la même façon, on voit qu'il y a $\binom{a+b-1}{b-1} = \binom{a+b-1}{a}$ manières de placer a pièces identiques dans b poches différentes.

2 Principe d'Inclusion-Exclusion

On sait que si A et B sont deux ensembles finis, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$. La formule suivante, dite d'inclusion-exclusion, généralise cela au cas où nous en avons un nombre quelconque.

Proposition 7 (Formule d'inclusion-exclusion)**.** Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Démonstration. Par récurrence (bon courage !) □

Exercice 8 Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Exercice 9 Les n stagiaires au stage de Montpellier vont se baigner et laissent leurs t-shirts Animath en vrac sur le sable. Ils reviennent et prennent un t-shirt complètement au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne se retrouve avec son t-shirt ?

Solution de l'exercice 8 Trouvons plutôt le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 divisibles par 3, 5, ou 7. Notons A (respectivement B et C) l'ensemble des nombres entiers strictement positifs divisibles par 3 (respectivement 5 ou 7). On a :

$$\begin{aligned}
|A| &= \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40 && (1)\\
|B| &= \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24 && (2)\\
|C| &= \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17 && (3)\\
|A \cap B| &= \left\lfloor \frac{120}{3 \times 5} \right\rfloor = 8 && (4)\\
|B \cap C| &= \left\lfloor \frac{120}{5 \times 7} \right\rfloor = 3 && (5)\\
|C \cap A| &= \left\lfloor \frac{120}{7 \times 3} \right\rfloor = 4 && (6)\\
|A \cap B \cap C| &= \left\lfloor \frac{120}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1 && (7)
\end{aligned}$$

D'où d'après la formule d'inclusion-exclusion,

$$|A \cup B \cup C| = 40 + 24 + 17 - 8 - 5 - 3 + 1 = 66.$$

Ainsi, le nombre cherché vaut $120 - 66 = 54$.

Solution de l'exercice 9 On assigne à chaque stagiaire un chiffre différent entre 1 et n, et on note x_i le numéro de l'élève prenant le i-ième t-shirt. Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ est une permutation de $(1, \dots, n)$. Calculons plutôt la probabilité qu'au moins une personne retrouve son t-shirt en vue d'utiliser le principe d'inclusion-exclusion. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit A_i l'ensemble des permutations telles que $x_i = i$. Il est clair que pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a :

$$\text{Card}\left(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right) = (n-k)!.$$

Ainsi, d'après la formule d'inclusion-exclusion :

$$\begin{aligned}
\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.
\end{aligned}$$

La probabilité cherchée vaut $1 - \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)/n!$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $\frac{1}{e} \approx 37\%$.

3 Injections, surjections, bijections

Définition 8. Une *application* $f : E \to F$ permet d'associer à tout élément x de l'ensemble E un unique élément, noté $f(x)$ de l'ensemble F.

On dit que E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée. Si $f(x) = y$, on dit que x est l'*antécédent* de y et y l'*image* de x.

3.1 Injections et surjections

Définition 9. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

(i) On dit que f est *injective* si pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$.

(ii) On dit que f est *surjective* si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Pour montrer que $f : E \to F$ est injective, on montre très souvent que si $x, y \in E$ sont tels que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ (voir le cours sur les équations fonctionnelles).

On introduit la notation $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier $n \geqslant 1$.

Proposition 10. Il existe une injection $[m] \to [n]$ si, et seulement si, $m \leqslant n$. Il existe une surjection de $[m] \to [n]$ si, et seulement si, $m \geqslant n$.

Démonstration. Exercice. $\square$

En pratique, on utilise la proposition précédente en combinatoire comme suit : pour montrer que $a \leqslant b$, on construit deux ensembles A, B tels que $\text{Card}(A) = a$, $\text{Card}(B) = b$, ainsi qu'une injection de A dans B. Ou encore, pour montrer que $a \geqslant b$, on construit deux ensembles A, B tels que $\text{Card}(A) = a$, $\text{Card}(B) = b$, ainsi qu'une surjection de A dans B.

Exercice 10 (Olympiades Balkaniques de Mathématiques 1997) Soient $m, n > 1$ des entiers. Soit S un ensemble de cardinal n et $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des sous-ensembles de S. On suppose que pour tous éléments $x \neq y$ de S, il existe $1 \leqslant i \leqslant m$ tel que $x \in A_i$ et $y \notin A_i$, ou bien $x \notin A_i$ et $y \in A_i$. Prouver que $n \leqslant 2^m$.

Exercice 11

(i) Combien existe-t-il de fonctions de $[m] \to [n]$?

(i) On suppose $m \leqslant n$. Combien existe-t-il d'injections de $[m] \to [n]$?

(ii) On suppose $m \geqslant n$. Combien existe-t-il de surjections de $[m] \to [n]$?

Solution de l'exercice 10 À tout élément $x \in S$, on associe le m-uplet $(x_1, \ldots, x_m)$ où $x_i = 0$ si $x \notin A_i$ et $x_i = 1$ si $x \in A_i$. Cette application est définie sur S, et son ensemble d'arrivée est $\{0, 1\}^m$. Par hypothèse, si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, f est injective. Le cardinal de l'ensemble de départ est donc inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble d'arrivée.

Solution de l'exercice 11 Pour (i), il y en a clairement n^m (n choix pour chacun des m entiers au départ)

Pour (ii), on a n choix pour l'image de 1, $n-1$ choix pour l'image de 2, et ainsi de suite jusqu'à m pour lequel on a $n-m+1$ choix pour son image. La réponse est donc $\frac{n!}{(n-m)!}$.

Pour (iii), on va utiliser le principe d'inclusion-exclusion et compter le nombre de fonctions $[m] \to [n]$ qui ne sont par surjectives. À cet effet, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons A_i l'ensemble des fonctions $[m] \to [n]$ telles que i n'est pas atteint par la fonction. Il est clair que pour des entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, on a $\text{Card}(A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k}) = (n-k)^m$, car chaque élément de $[m]$ peut être envoyé sur un des $n-k$ entiers de $[n]$ autorisés. Ainsi, d'après le principe d'inclusion exclusion, si on note $s(m, n)$ le nombre de surjections de $[m] \to [n]$, on a :

$$\begin{aligned}
n^m - s(m,n) &= \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)^m \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^m
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$s(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

3.2 Preuves par bijections en combinatoire

Définition 11. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est *bijective* si elle est à la fois injective et à la fois surjective.

Proposition 12. Soient A et B deux ensembles finis. Alors A et B ont même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre A et B

Démonstration. Exercice $\square$

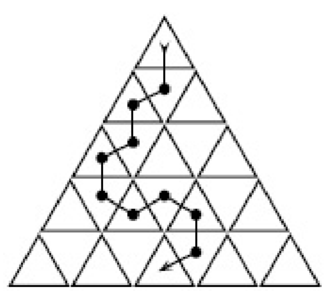
En combinatoire, cette proposition est souvent utilisée de la manière suivante. Si on veut montrer que $a = b$, où $a, b \geqslant 0$ sont des entiers, il suffit de trouver deux ensembles finis A et B tels que $\text{Card}(A) = a$ et $\text{Card}(B) = b$, et de construire une bijection entre A et B.

Pour vérifier qu'une fonction est bijective, il est parfois pratique d'exhiber la fonction réciproque. Plus précisément :

Proposition 13. Si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $f(g(b)) = b$ pour tout $b \in B$ et $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$, alors f et g sont des bijections (on dit qu'elles sont *réciproques*, ou *inverses*, l'une de l'autre).

Démonstration. Montrons d'abord que f est surjective. Soit $b \in B$. On sait que $f(g(b)) = b$, ainsi $g(b)$ est un antécédent de b, de sorte que f est surjective. Pour montrer l'injectivité, soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. On a $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$. La fonction f est donc injective, et comme elle est surjective, elle est bien bijective. Par symétrie, g est aussi bijective. $\square$

Exercice 12 (Canada 2005) Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusq'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2012)$.



Solution de l'exercice 12 L'application qui à un chemin associe un $(n-1)$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ où x_i est l'entier x tel que le chemin traverse la i-ième ligne horizontale en partant du haut au x-ième segment en partant de la gauche. Cette application est clairement une bijection entre l'ensemble des chemins considérés et l'ensemble $[1] \times [2] \times \cdots \times [n-1]$, qui est de cardinal $(n-1)!$. Ainsi, $f(2012) = 2011!$.